

MATEMATIKA

O jednom důkazu Hamiltonovy věty

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V příspěvku [2], který je zaměřen na využití vektorů při řešení geometrických úloh, jsou uvedeny mj. také dva odlišné důkazy tzv. Hamiltonovy věty a některá její využití. Pomocí ní bylo možno řešit např. také jednu z planimetrických úloh zadaných soutěžícím na 49. MMO v Madridu (v roce 2008), viz [3].

Obsahem tohoto článku je prezentace jiného (autorova) důkazu výše zmíněné věty. Nejprve však dokážeme následující tvrzení:

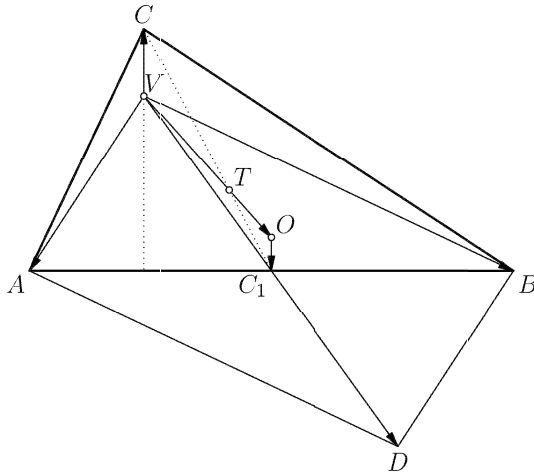
Věta 1

Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a V jeho ortocentrum (průsečík výšek). Pak platí

$$\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC} = 2 \cdot \overrightarrow{VO}.$$

Důkaz. Označme C_1 střed strany AB uvažovaného trojúhelníku ABC a D vrchol rovnoběžníku $ADB V$, viz obr. 1. Úhlopříčky tohoto rovnoběžníku se přitom protínají v bodě C_1 ¹. Označme dále T těžiště trojúhelníku ABC .

¹V případě, že ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu A , resp. B , je rovnoběžník $ADB V$ *degenerovaný* (přechází v úsečku AB). Všechny následující úvahy však zůstávají v platnosti.



Obr. 1

Protože $2 \cdot \overrightarrow{VC_1} = \overrightarrow{VD} = \overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB}$, platí podle obr. 1

$$\overrightarrow{VO} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{VC_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB}).$$

Vzhledem k tomu, že stejnoolehlost se středem v bodě T a koeficientem $-\frac{1}{2}$ převádí trojúhelník ABC na příčkový trojúhelník $A_1B_1C_1$ (A_1 , B_1 a C_1 jsou po řadě středy stran BC , CA a AB) a současně jeho ortocentrum V na střed kružnice opsané O trojúhelníku ABC (ortocentrum příčkového trojúhelníku $A_1B_1C_1$), platí dále $\overrightarrow{OC_1} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{VC}$. Odtud

$$\overrightarrow{VO} - \frac{1}{2} \overrightarrow{VC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB}). \quad (1)$$

Užitím principu cyklické záměny dostaneme další dva vztahy

$$\overrightarrow{VO} - \frac{1}{2} \overrightarrow{VA} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC}). \quad (2)$$

$$\overrightarrow{VO} - \frac{1}{2} \overrightarrow{VB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{VC} + \overrightarrow{VA}). \quad (3)$$

Součtem rovností (1)–(3) obdržíme po snadné úpravě

$$\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC} = 2 \cdot \overrightarrow{VO}.$$

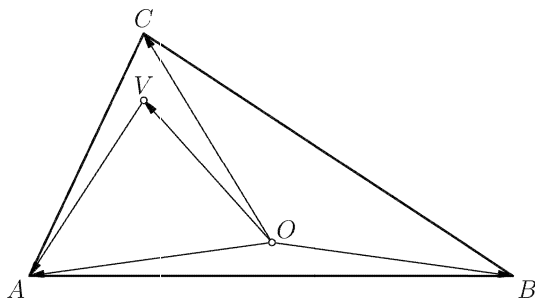
Tím je důkaz uzavřen.

Věta 2 (Hamiltonova²)

Nechť O značí střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a V jeho ortocentrum. Pak platí

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OV}.$$

Důkaz.



Obr. 2

Z obr. 2 je patrné, že platí

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{VA}$$

a analogicky

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{VB}, \\ \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{VC}.\end{aligned}$$

Jejich součtem a využitím věty 1 dostaneme

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OV} + (\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC}) = 3 \cdot \overrightarrow{OV} - 2 \cdot \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OV},$$

což jsme chtěli dokázat.

²W. R. Hamilton (1805–1865), irský matematik

Poznámka. Z uvedeného postupu vyplývá, že Hamiltonova věta je důsledkem věty 1. Lze však naopak také ukázat, že z Hamiltonovy věty plyne tvrzení věty 1. O důkaz obrácené věty se pokuste samostatně. (Obě rovnosti uvedené ve větách 1 a 2 jsou tudíž ekvivalentní.)

K samostatnému procvičení uvedené problematiky uvádíme pro zájemce následující dva příklady.

Příklad 1

Nechť T značí těžiště trojúhelníku ABC . Dokažte, že platí

$$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{0},$$

kde $\overrightarrow{0}$ značí nulový vektor.

Příklad 2

Nechť $M_1, M_2, \dots, M_6$ jsou po řadě středy stran $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_6A_1$ konvexního šestiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Dokažte, že existuje trojúhelník, jehož strany jsou shodné s úsečkami M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6 .

K dalšímu prohloubení znalostí lze čtenářům doporučit např. publikaci [1], v níž je vektorům věnována celá kapitola.

Literatura

- [1] *Prasolov, V. V.*: Zadačí po planimetrii, část I (rusky). Nauka, Moskva 1986.
- [2] *Švrček, J.*: Užití vektorů při řešení geometrických úloh. In Sborník MAKOS 2010, JČMF, Praha (v tisku).
- [3] *Horák, K. a kol.*: 57. ročník MO na středních školách, JČMF, Praha 2010.

Znalost problematiky hypotečních úvěrů – nezbytná součást finanční gramotnosti

VLADIMÍRA PETRÁŠKOVÁ

Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích, Pedagogická fakulta

Úvod

V posledních třech letech je věnována zvýšená pozornost finančnímu vzdělávání. Byly vydány některé dokumenty (např. [3], [4]), které se touto otázkou zabývají. V návaznosti na tyto dokumenty proběhla v letech 2008 a 2009 implementace tzv. standardů finanční gramotnosti (dále FG) do rámcových vzdělávacích programů (dále RVP), resp. školních vzdělávacích programů (dále ŠVP). Zavedení těchto standardů do RVP, popř. ŠVP by mělo přispět ke zvýšení finanční gramotnosti jak žáků ZŠ, tak studentů SŠ. Poznamenejme, že standardy FG pro studenty SŠ odpovídají standardům FG dospělého člověka. Obsahově pokrývají tato témata: peníze, hospodaření domácností, finanční produkty a práva spotřebitele.

V článku [2] jsou uvedeny příklady týkající se spotřebitelských úvěrů a splátkového prodeje (ve standardech FG oblast finančních produktů), které by mohly být řešeny v hodinách matematiky na SŠ. Čtenář zde byl seznámen i s některými detaily, které je třeba při jejich využívání brát v úvahu, protože zdaleka nejsou zanedbatelné. V tomto článku se zaměříme na další finanční produkt, a to na hypoteční úvěry. Opět upozorníme na některé aspekty, které je nutno při výběru produktů zohlednit. Klasické příklady na výpočet výše splátky, doby splatnosti, úrokové sazby apod. ponecháme stranou, neboť jsou již přehledně a nápaditě zpracovány v [1]. Při řešení níže uvedených problémů budeme předpokládat, že čtenář má základní znalosti z oblasti hypotečních úvěrů. Pokud tyto znalosti postrádá, může si je doplnit např. v [5].

Klasický hypoteční úvěr

Příklad 1

Mladý manželský pár s dostačujícími příjmy se rozhodl postavit si menší

rodinný domek. Podle předběžné kalkulace bude potřebovat 3 170 000 Kč. Vzhledem k tomu, že jako svatební dar od rodičů obdržel hotovost ve výši 1 000 000 Kč, chybí mu k realizaci jeho plánů částka 2 170 000 Kč. Mladí manželé chtějí chybějící finanční prostředky získat prostřednictvím hypotečního úvěru. Banka jim tento úvěr nabídne s roční úrokovou mírou 4,9 %, dobou splatnosti 20 let a měsíční splátkou 14 201 Kč. Jak vysoké budou náklady na úvěr?

Řešení. Manželé počítají s tím, že ve splátkách zaplatí celkem $20 \cdot 12 \cdot 14\,201 \text{ Kč} = 3\,408\,240 \text{ Kč}$, tzn. jsou srozuměni s úroky $3\,408\,240 - 2\,170\,000 = 1\,238\,240 \text{ Kč}$. Vzápětí se ovšem dozví, že banka si účtuje za schválení úvěru 0,75 % ze zapůjčené částky (minimálně 6 000 Kč, maximálně 25 000 Kč), za vedení účtu 150 Kč měsíčně, za odhad tržní budoucí ceny domku 5 000 Kč (odhad nemovitosti je nutný pro poskytnutí úvěru). Dále budou muset vzít v úvahu každoroční výdaj 4 500 Kč za pojištění domku, neboť bez pojištění nemovitosti banka úvěr neposkytne.

Nyní se podívejme, jaké budou skutečné náklady na úvěr:

Úroky	1 238 240 Kč
Poplatek za schválení úvěru	$2\,170\,000 \cdot 0,0075 = 16\,275 \text{ Kč}$
Poplatek za vedení úvěrového účtu	$20 \cdot 12 \cdot 15 = 36\,000 \text{ Kč}$
Pojištění nemovitosti	$20 \cdot 4\,500 = 90\,000 \text{ Kč}$
Odhad nemovitosti	5 000 Kč
Celkem	1 385 515 Kč

Skutečné náklady na úvěr ve výši 2 170 000 Kč budou činit 1 385 515 Kč, tedy o 147 275 Kč (poplatky) více než manželé předpokládali.

Klasický hypoteční úvěr versus doba splatnosti

Příklad 2

Mladému manželskému páru z příkladu 1 se zdá měsíční splátka ve výši 14 201 Kč příliš vysoká. Požádá banku, zda by nemohla dobu splatnosti úvěru prodloužit na více než 20 let, protože se tím samozřejmě sníží výše měsíční splátky. Vzhledem k jejich věku (manželům je kolem 30 let) jim banka nabídne tyto varianty:

1. dobu splatnosti 25 let, výši měsíční splátky 12 560 Kč,
2. dobu splatnosti 30 let, výši měsíční splátky 11 517 Kč,
3. dobu splatnosti 35 let, výši měsíční splátky 10 814 Kč.

Manželům se samozřejmě líbí varianta 3, neboť výše splátky by se snížila oproti původní splátce 14 201 Kč přibližně o jednu čtvrtinu (o 3 387 Kč). Jak vysoké by byly náklady na úvěr, pokud by zvolili tuto variantu? Porovnejte s náklady z příkladu 1. Kolik by „stál“ úvěr při době splatnosti 25 let a 30 let?

Řešení.

Varianta 3

V případě, že manželé zvolí variantu 3, splátky je přijdou na $35 \cdot 12 \cdot 10\,814$ Kč = 4 541 880 Kč, tzn. úroky činí $4\,541\,880 - 2\,170\,000 = 2\,371\,880$ Kč.

Náklady na úvěr tedy budou

Úroky	2 371 880 Kč
Poplatek za schválení úvěru	$2\,170\,000 \cdot 0,0075 = 16\,275$ Kč
Poplatek za vedení úvěrového účtu	$35 \cdot 12 \cdot 150 = 63\,000$ Kč
Pojištění nemovitosti	$35 \cdot 4\,500 = 157\,500$ Kč
Odhad nemovitosti	5 000 Kč
Celkem	2 613 655 Kč.

Náklady na úvěr ve výši 2 170 000 Kč činí 2 613 655 Kč: úroky 2 371 880 Kč a poplatky 241 775 Kč.

Srovnáme-li náklady této varianty s náklady z příkladu 1, vidíme, že se měsíční splátka sice snížila o 3 387 Kč, ale úroky vzrostly z 1 238 240 Kč na 2 371 880, tj. přibližně se zdvojnásobily, převýšily i vypůjčenou částku. Také poplatky spojené s úvěrem narostly ze 147 275 Kč na 241 775 Kč (o 94 500 Kč).

Varianta 2

V případě varianty 2 splátky činí $30 \cdot 12 \cdot 11\,517$ Kč = 4 146 120 Kč, tzn. úroky $4\,146\,120 - 2\,170\,000 = 1\,976\,120$ Kč.

Náklady na úvěr jsou

Úroky	1 976 120 Kč
Poplatek za schválení úvěru	$2\,170\,000 \cdot 0,0075 = 16\,275$ Kč
Poplatek za vedení úvěrového účtu	$25 \cdot 12 \cdot 150 = 54\,000$ Kč
Pojištění nemovitosti	$30 \cdot 4\,500 = 135\,000$ Kč
Odhad nemovitosti	5 000 Kč
Celkem	2 186 395 Kč.

Úvěr ve výši 2 170 000 Kč s dobou splatnosti 30 let bude „stát“ 2 186 395 Kč: úroky 1 976 120 Kč a poplatky 210 275 Kč.

Varianta 1

Pokud by manželé zvolili variantu 1, zaplatí ve splátkách $25 \cdot 12 \cdot 12\,560$ Kč = 3 768 000 Kč, tzn. za úroky $3\,768\,000 - 2\,170\,000 = 1\,598\,000$ Kč.

Náklady budou

Úroky	1 598 000 Kč
Poplatek za schválení úvěru	$2\,170\,000 \cdot 0,0075 = 16\,275$ Kč
Poplatek za vedení úvěrového účtu	$25 \cdot 12 \cdot 150 = 45\,000$ Kč
Pojištění nemovitosti	$25 \cdot 4\,500 = 112\,500$ Kč
Odhad nemovitosti	5 000 Kč

Celkem 1 776 775 Kč.

Úvěr ve výši 2 170 000 Kč s dobou splatnosti 25 let bude „stát“ 1 776 775 Kč: úroky 1 598 000 Kč a poplatky 178 775 Kč.

Z výše uvedeného je zřejmé, že čím je delší doba splatnosti, tím je úvěr dražší. Narůstají jednak úroky, jednak poplatky s úvěrem spojené. Sice se při prodlužování doby splatnosti snižuje výše měsíční splátky (14 201 Kč, 12 560 Kč, 11 517 Kč, 10 814 Kč), ale toto snížení není přímo úměrné zvýšení úroků a poplatků (úroky: 1 238 240 Kč, 1 598 000 Kč, 1 976 120 Kč, 2 371 880 Kč; poplatky: 147 275 Kč, 178 775 Kč, 210 275 Kč, 241 775 Kč).

V tabulce 1 je uvedena část umořovacího plánu*) hypotečního úvěru s dobou splatností 35 let a v tabulce 2 část umořovacího plánu hypotečního úvěru s dobou splatností 20 let (roční úroková sazba je v obou případech 4,9 %). Po nahlédnutí do těchto tabulek můžeme odhalit příčinu markantního nárůstu úroků při prodloužení této doby, a to je pomalejší umořování dluhu. V případě doby splatnosti 35 let v prvním roce splácení jde přibližně 80 % splátky na úroky a přibližně 20 % na umoření úvěru. Teprve v 251. splátce (asi po 21 letech) je úmor větší než úrok. Při dvacetiletém splácení je v prvním roce rozložení úmoru a úroku příznivější, poměr úrok a úmor je přibližně 60 % k 40 %. Již v 70. měsíci (asi po 6 letech) se rozložení splátky změní ve prospěch úmoru.

*) Umořovací plán slouží k tomu, aby klient měl přehled o tom, jaká část splátky (anuity) jde na úrok a jaká na úmor, a jaký je zůstatek dluhu.

Tab. 1: Umořovací plán hypotéčního úvěru s dobou splatnosti 35 let a roční úrokovou mírou 4,9 %

období	anuita	úrok	úmor	zůstatek
0				2170000
1	10814	8860,833	1953,167	2168047
2	10814	8852,858	1961,142	2166086
3	10814	8844,85	1969,15	2164117
4	10814	8836,809	1977,191	2162139
5	10814	8828,736	1985,264	2160154
6	10814	8820,629	1993,371	2158161
7	10814	8812,49	2001,51	2156159
8	10814	8804,317	2009,683	2154150
9	10814	8796,111	2017,889	2152132
10	10814	8787,871	2026,129	2150106
11	10814	8779,597	2034,403	2148071
12	10814	8771,29	2042,71	2146028
...				
251	10814	5404,229	5409,771	1318075
252	10814	5382,139	5431,861	1312643
253	10814	5359,959	5454,041	1307189
254	10814	5337,688	5476,312	1301713
255	10814	5315,327	5498,673	1296214
256	10814	5292,874	5521,126	1290693
257	10814	5270,329	5543,671	1285149
258	10814	5247,692	5566,308	1279583
259	10814	5224,963	5589,037	1273994
260	10814	5202,142	5611,858	1268382
261	10814	5179,226	5634,774	1262747
262	10814	5156,218	5657,782	1257089
...				

Tab. 2: Umořovací plán hypotéčního úvěru s dobou splatnosti 35 let a roční úrokovou mírou 4,9 %

období	anuita	úrok	úmor	zůstatek
0				2170000
1	14201	8860,833	5340,167	2164660
2	14201	8839,028	5361,972	2159298
3	14201	8817,133	5383,867	2153914
4	14201	8795,149	5405,851	2148508
5	14201	8773,075	5427,925	2143080
6	14201	8750,911	5450,089	2137630
7	14201	8728,656	5472,344	2132158
8	14201	8706,311	5494,689	2126663
9	14201	8683,874	5517,126	2121146
10	14201	8661,346	5539,654	2115606
11	14201	8638,726	5562,274	2110044
12	14201	8616,013	5584,987	2104459
...				
70	14201	7126,95	7074,05	1738301
71	14201	7098,064	7102,936	1731198
72	14201	7069,06	7131,94	1724067
73	14201	7039,938	7161,062	1716905
74	14201	7010,697	7190,303	1709715
75	14201	6981,337	7219,663	1702496
76	14201	6951,857	7249,143	1695246
77	14201	6922,256	7278,744	1687968
78	14201	6892,534	7308,466	1680659
79	14201	6862,692	7338,308	1673321
80	14201	6832,727	7368,273	1665953
...				

Klasický hypoteční úvěr versus americká hypotéka

Příklad 3

Mladí manželé chtějí rekonstruovat byt. Předběžný odhad na rekonstrukci je 1 000 000 Kč. Manželé mají uspořeno 300 000 Kč. Zbývající částku, tj. 700 000 Kč, si musí vypůjčit. Rozhodují se mezi hypotečním úvěrem a americkou hypotékou. Hypoteční úvěr má roční úrokovou sazbu 4,95 %, doba splatnosti je stanovena na 20 let s měsíční splátkou 4 600 Kč, poplatek za schválení úvěru je 0,75 % z vypůjčené částky (minimálně 6 000 Kč, maximálně 25 000 Kč), poplatek za vedení účtu 150 Kč/měsíc. Americká hypotéka má roční úrokovou sazbu 7 %, doba splatnosti je 15 let s měsíční splátkou 6 292 Kč, poplatek za schválení úvěru je 0,8 % z vypůjčené částky (minimálně 9 000 Kč, maximálně 30 000 Kč), poplatek za vedení účtu 97 Kč/měsíc. V obou případech musí manželé zaplatit částku 2 000 Kč za odhad tržní ceny bytu a každoročně 2 200 Kč za pojištění bytu. Jaký produkt je pro ně výhodnější?

Poznámka: Americká hypotéka je neúčelový úvěr (peníze lze použít na cokoliv), který je zajištěn nemovitostí. Úroková sazba bývá o něco vyšší než u hypotečního úvěru, ale zároveň nižší než u spotřebitelského úvěru.

Řešení.

Klasický hypoteční úvěr

V případě klasického hypotečního úvěru splátky činí $20 \cdot 12 \cdot 4\,600 \text{ Kč} = 1\,104\,000 \text{ Kč}$, tzn. úroky $1\,104\,000 - 700\,000 = 404\,000 \text{ Kč}$.

Náklady na úvěr jsou

Úroky	404 000 Kč
Poplatek za schválení úvěru	6 000 Kč ($0,0075 \cdot 700\,000 = 5\,250 \text{ Kč}$, ale minimální sazba je 6 000 Kč)
Poplatek za vedení úvěrového účtu	$20 \cdot 12 \cdot 150 = 36\,000 \text{ Kč}$
Pojištění nemovitosti	$20 \cdot 2\,200 = 44\,000 \text{ Kč}$
Odhad nemovitosti	2 000 Kč

Celkem 492 000 Kč.

Náklady na hypoteční úvěr ve výši 700 000 Kč jsou 492 000 Kč: úroky 404 000 Kč a poplatky 88 000 Kč.

Americká hypotéka

Pokud by se manželé rozhodli pro americkou hypotéku, ve splátkách zaplatí $15 \cdot 12 \cdot 6\,292 \text{ Kč} = 1\,132\,560 \text{ Kč}$, tzn. úroky $1\,132\,560 - 700\,000 = 432\,560 \text{ Kč}$.

Náklady na americkou hypotéku jsou

Úroky	432 560 Kč
Poplatek za schválení úvěru	9 000 Kč ($0,008 \cdot 700\,000 = 5\,600 \text{ Kč}$, ale minimální sazba je 9 000 Kč)
Poplatek za vedení úvěrového účtu	$15 \cdot 12 \cdot 97 = 17\,460 \text{ Kč}$
Pojištění nemovitosti	$15 \cdot 2\,200 = 33\,000 \text{ Kč}$
Odhad nemovitosti	2 000 Kč
Celkem	494 020 Kč.

Náklady na americkou hypotéku ve výši 700 000 Kč jsou 494 020 Kč: úroky 432 560 Kč a poplatky 61 460 Kč.

Rekonstrukce bytu manžele přijde v obou případech přibližně stejně, rozdíl je pouhých 2 020 Kč.

Při rozhodování pro ten či onen produkt by je mohly ovlivnit tyto skutečnosti:

- Při volbě hypotečního úvěru manželé zaplatí o 2 020 Kč méně, ale podstatnější je skutečnost, že výše měsíční splátky je o 1 692 Kč menší než u americké hypotéky. Nižší měsíční splátka může hrát při rozhodování důležitou roli, neboť nezatíží tolik rodinný rozpočet.
- Volba americké hypotéky může být pro manžele lákavá z důvodu, že vypůjčené prostředky nemusí být využity pouze na rekonstrukci bytu. V případě, že se manželům podaří při rekonstrukci ušetřit, např. při různých slevových akcích, mohou zbývající prostředky použít na cokoliv (nákup spotřebního zboží, pořízení ojetého automobilu, financování dovolené ...). Výše zmíněné produkty či služby lze získat i prostřednictvím spotřebitelského úvěru, popř. leasingu, ale úrokové sazby jsou podstatně vyšší než u americké hypotéky (rozdíl v úrokových sazbách může činit až 12 %).

Přefinancování hypotéky

Příklad 4

Přibližně před 5 lety si pan Novák vzal hypoteční úvěr u banky AB

ve výši 1 800 000 Kč s roční úrokovou sazbou 5,2 %, dobou splatnosti 20 let a měsíční splátkou 12 079 Kč. Tato úroková sazba byla fixovaná na 5 let, nyní se blíží konec doby fixace a pan Novák má možnost získat u banky XY hypoteční úvěr s nižší úrokovou sazbou. Banka XY nabízí roční úrokovou sazbu 4,75 %, měsíční splátku 11 726 Kč při zbytkové době splatnosti 15 let. Poplatky jsou u obou bank stejné. Při změně banky se zaplatí pouze navíc za nový odhad nemovitosti, což v případě pana Nováka je 2 500 Kč. Kolik Kč pan Novák vydělá při přefinancování hypotéky?

Řešení. Vzhledem k tomu, že poplatky spojené s úvěrem jsou u banky AB i banky XY stejné, nemusíme je při řešení zohledňovat. Pouze vezmeme v úvahu cenu odhadu nemovitosti 2 500 Kč, kterou by pan Novák zaplatil bance XY v případě, že by k ní převedl úvěr. Vliv na jeho rozhodnutí tedy bude mít hlavně zaplacená výše úroků.

Zaplacené úroky u banky AB

Pokud by pan Novák hypoteční úvěr nepřeváděl, banka AB by od něj ve splátkách získala částku $20 \cdot 12 \cdot 12\,079 \text{ Kč} = 2\,898\,960 \text{ Kč}$, tzn. úroky $2\,898\,960 - 1\,800\,000 = 1\,098\,960 \text{ Kč}$.

Zaplacené úroky v případě převedení hypotéky z banky AB do banky XY

Při převádění hypotečního úvěru z jedné banky do druhé se musí mezi sebou banky vyrovnat. To znamená, že banka XY po 5 letech doplatí za pana Nováka u banky AB hypoteční úvěr. Banka AB na základě umocňovacího plánu stanovila zůstatek dluhu ve výši 1 507 512 Kč. Tento dluh byl bankou XY zaplacen. Pan Novák má nyní u této banky dluh 1 507 512 Kč, který bude splácet 15 let měsíčními splátkami 11 726 Kč.

Pan Novák ve splátkách zaplatí

Splátky u banky AB za 5 let $5 \cdot 12 \cdot 12\,079 = 724\,740 \text{ Kč}$

Splátky u banky XY za 15 let $15 \cdot 12 \cdot 11\,726 = 2\,110\,680 \text{ Kč}$

Celkem $2\,835\,420 \text{ Kč}$.

Ve splátkách je zaplacen $2\,835\,420 \text{ Kč}$, tzn. úroky $2\,835\,420 - 1\,800\,000 = 1\,035\,420 \text{ Kč}$. Další náklad, který musíme brát na zřetel, je poplatek 2 500 Kč za nový odhad nemovitosti.

Pan Novák přefinancováním hypotečního úvěru vydělá $1\,098\,960 - 1\,035\,420 - 2\,500 = 61\,040 \text{ Kč}$.

Závěr

Článek čtenáře seznámil s některými úskalími spojenými s hypotečním úvěrem. Mnoho z nás řešilo nebo v budoucnu bude řešit otázku bydlení, proto je nezbytné se v této problematice orientovat. To je také jedním z důvodů zařazení finančních produktů, do nichž hypoteční úvěry spadají, do standardů FG.

Literatura

- [1] *Odvárko, O.*: Úlohy z finanční matematiky pro střední školy. Prometheus, Praha 2005.
- [2] *Petrášková, V.*: Pěstování finanční gramotnosti ve vzdělávání středoškoláků. Matematika, fyzika a informatika, ročník 19, Prometheus, Praha 2009, s. 129–141.
- [3] MF ČR. Strategie finančního vzdělávání [online]. Praha: Ministerstvo financí ČR, c2007 [cit. 2010–03–12]. Dostupné z URL <http://www.mfcr.cz>.
- [4] MF ČR. Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách [online]. Praha: Ministerstvo financí ČR, c2007 [cit. 2010–03–12]. Dostupné z URL <http://www.mfcr.cz>.
- [5] *Petrášková, V. – Hašek, R.*: Úvod do financí [online]. c2009, poslední revize [cit. 2010–03–12].

Použitie substitúcií pri riešení goniometrických rovníc

VLADIMÍR STREČKO

Prešovská univerzita v Prešove, SLOVENSKO

Slovo *substitúcia* je latinského pôvodu. Nahliadnuc do slovníka cudzích slov zistíme, že má sedem významov v závislosti od toho, v ktorom odvetví ľudskej činnosti sa aplikuje. V matematike substitúcia znamená zavedenie iných premenných do matematických vzťahov. Chceme zdôrazniť, že použitie substitúcie má viesť k zjednodušeniu výpočtov. Prvé použitie tohto nástroja, resp. pravidla logickej dedukcie patrí mezopotámskej matema-

tike, ktorá sa venovala riešeniu lineárnych, kvadratických a špeciálnych kubických rovníc a ich systémov. Definičným oborom týchto rovníc bol obor prirodzených čísel. Jedná sa o obdobie 2. tisícročia pred n. l. až po 6. storočie pred n. l. Výpočty boli realizované opisne bez matematickej symboliky, no aplikované boli niektoré vzorce a metódy použité ako pravidlá (napr. metóda doplnenia výrazu na úplný štvorec). Prvé použitie vzorcov patrí egyptskej matematike (objem zrezanej pyramídy, obsah kruhu, početové výkony so zlomkami) [4].

Na stredných školách sa žiaci stretávajú na hodinách matematiky s množstvom goniometrických vzorcov a vzťahov medzi goniometrickými funkciami. Tieto využívajú ako súčasť matematického aparátu na zjednodušovanie zložitejších goniometrických výrazov alebo na riešenie goniometrických rovníc, či nerovníc [2]. Prezentované sú najmä rovnice vedúce po adekvátnej substitúcii k riešeniu algebraickej rovnice určitého stupňa. Úvodom chceme akcentovať veľký význam substitúcií v matematickej činnosti žiakov, pričom prvýkrát sa s nimi stretávajú už na ZŠ, keď v 9. ročníku riešia systémy dvoch rovníc s dvoma neznámymi. Na SŠ už žiaci majú možnosť uvidieť obrovské možnosti zjednodušenia výpočtov v matematike práve použitím vhodných substitúcií. Na VŠ sa študenti matematiky alebo frekventanti kurzov matematiky najmä na VŠT oboznamujú s rôznymi substitúciami (napr. v diferenciálnom a integrálnom počte). Vyústenie tematického celku Goniometria na SŠ vidíme v umení riešiť goniometrické rovnice resp. nerovnice. V súvislosti so spomenutými skutočnosťami môžeme vo všeobecnosti konštatovať, že pri riešení goniometrických rovníc väčšinou sa nejedná o univerzálnu substitúciu, či nejaké rutinné počítanie. Žiaci musia často objaviť, akú substitúciu majú použiť.

V tomto článku ilustrujeme riešenie siedmich príkladov goniometrických rovníc. Pri ich výbere sme mali na zreteli ich didaktický aspekt a súčasne sme sa snažili pokryť široké spektrum učiva matematiky na zvolenú tému. Cieľom príspevku je ukázať na konkrétnych príkladoch možnosti použitia substitúcie pri riešení goniometrických rovníc. Substitúcie sa u goniometrických rovníc objavujú v dvoch formách. Tá jednoduchšia je substitúcia v argumente.

Príklad 1

V obore všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$2 \sin \frac{3x + 2}{4} = \sqrt{3}.$$

Riešenie. Pri riešení tejto rovnice je potrebné najprv zistiť argument a potom hodnoty premennej, resp. neznámej x . Pre žiakov je výhodné rozdeliť si riešenie rovnice na dve etapy. Zavedieme teda substitúciu $\frac{3x+2}{4} = t$. Tým dostaneme základnú goniometrickú rovnicu $2 \sin t = \sqrt{3}$, t.j. $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Táto rovnica má dve riešenia $t_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $t_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pričom $\mathbb{Z}$ znamená množinu všetkých celých čísel. A teraz stačí riešiť dve lineárne rovnice s neznámou x , $\frac{3x+2}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $\frac{3x+2}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a dostávame $x_1 = \frac{2}{9}(2\pi - 3) + \frac{8k\pi}{3}$, $x_2 = \frac{2}{9}(4\pi - 3) + \frac{8k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Substitúcia v argumente sa často používa aj pri riešení goniometrických rovníc po aplikácii goniometrických vzorcov.

Príklad 2

V obore všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2.$$

Riešenie. Rovnicu upravíme predelením dvoma, čím dostávame $\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = 1$. Uvažujeme uhol α taký, že $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, t.j. $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Našu rovnicu je možné vyjadriť v tvare $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$. V tomto prípade ide o aplikáciu súčtového vzorca $\sin(\alpha - \beta)$. Ďalej postupujeme ako v príklade 1. Zavedieme substitúciu $2x - \frac{\pi}{3} = t$, čím dostaneme základnú goniometrickú rovnicu $\sin t = 1$, ktorá má jediné riešenie $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vrátime sa k neznámej x a dostaneme riešenie danej rovnice $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Druhým a zaujímavejším prípadom riešenia goniometrickej rovnice je substitúcia funkciou. Je to často účinná metóda riešenia niektorých goniometrických rovníc. Na tomto mieste pripomínáme, že pri riešení rovníc, ktoré nie sú „pripravené vopred“, aby „dobré vyšli“ môžeme sa ľahko zamotať do problémov riešenia algebraických rovníc vyššieho stupňa.

Príklad 3

V obore všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$\frac{1}{\cos x} = 4(\cos x + \operatorname{tg} x).$$

Riešenie. V prvom rade určíme podmienku riešenia rovnice, čiže $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vznikol problém aplikácie vhodnej substitúcie. Ten odhalíme až po vhodných úpravách našej rovnice. Túto prevedieme na tvar,

kde sú obsiahnuté funkcie sínus a kosínus, teda $1 = 4 \cos^2 x + 4 \sin x$. A teraz by mohli žiaci dostať nápad použitia vzorca $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Vzorec je zaujímavý tým, že druhé mocniny sínusu a kosínusu je možné vzájomne vyjadrovať. Pretože je v rovnici jedine $\sin x$ v 1. mocnine, vyjadríme $\cos^2 x$ pomocou $\sin^2 x$, t.j. $1 = 4(1 - \sin^2 x) + 4 \sin x$, $4 \sin^2 x - 4 \sin x - 3 = 0$. Po substitúcii $\sin x = z$ máme kvadratickú rovnicu $4z^2 - 4z - 3 = 0$, ktorej koreňmi sú $z_1 = \frac{3}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2}$. Teraz sa vrátime k pôvodnej premennej (neznámej) x a dostávame dve základné goniometrické rovnice $\sin x = \frac{3}{2}$, $\sin x = -\frac{1}{2}$, z ktorých prvá nemá riešenie a druhá má riešenia $x_1 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, $x_2 = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Obidve riešenia sú z definičného oboru danej rovnice.

Príklad 4

V obore všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$3 \sin^2 x + (1 + \cos x) \cos x - 2 = 0$$

Riešenie. Upravíme $3 \sin^2 x + \cos x + \cos^2 x - 2 = 0$. Opäť využijeme vlastnosť súčtu druhých mocnín funkcií sínus a kosínus, pričom teraz vyjadríme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, čím dostaneme $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Po substitúcii $\cos x = z$ máme rovnicu $z^2 - z - 1 = 0$ s koreňmi $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$. Ostáva riešiť rovnice $\cos x = 1$ a $\cos x = -\frac{1}{2}$. Dostaneme definitívne riešenie rovnice $x_1 = 2k\pi$, $x_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $x_3 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Príklad 5

V obore všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2.$$

Riešenie. Podmienka riešenia danej rovnice je $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Úpravou dostaneme v rovnici sínusy a kosínusy, čiže $2 \sin x \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} = 2$. Z predošlých dvoch príkladov vyplýva, že substitúcie $\sin x = z$, $\cos x = z$ nie sú vhodné. Skúsime použiť substitúciu $\operatorname{tg} x = z$. V našej rovnici dostaneme $2 \frac{\sin x}{\cos x} \cos^2 x + \operatorname{tg} x = 2$, čiže $2z \cos^2 x + z = 2$. Vznikol problém nahraďiť $\cos^2 x$ využitím funkcie tangens. V súvislosti s tým stačí uvážiť, že $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$. Z tohto vzťahu vyplýva $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ alebo inak $\cos^2 x = \frac{1}{1 + z^2}$. Tým je problém vyriešený, čiže $2z \frac{1}{1 + z^2} + z = 2$. Po úprave

tejto rovnice dostaneme kubickú rovnicu $z^3 - 2z^2 + 3z - 2 = 0$. Koreň rovnice nájdeme skusmo. Podľa Viètovej vety, ak má táto rovnica racionálny koreň, potom tento koreň je deliteľom absolútneho člena rovnice. Môžeme teda vyskúšať čísla $\pm 1, \pm 2$. Ľahko zistíme, že číslo 1 je koreňom rovnice. Rozkladom na súčin koreňových činiteľov máme $(z - 1)(z^2 - z + 2) = 0$, čiže $z = 1, z^2 - z + 2 = 0$, pričom kvadratická rovnica nemá v $\mathbb{R}$ riešenie. Vrátime sa k neznámej x , čím máme $\operatorname{tg} x = 1$. Riešením našej rovnice je $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. [Uvedená substitúcia je efektívna aj pri nerovnici.]

Poznámka. Francúzsky matematik *Francois Viète* (1540–1603) vyriešil slávny problém *casus irreducibilis* kubickej rovnice, pri ktorom ostal bezradný taliansky matematik *Girolamo Cardano* (1501–1576). Viète použil na vyriešenie problému práve goniometrické substitúcie.

Úloha 1

V obore všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$\cos x \sin 2x = 3 \cos^3 x - \sin^3 x.$$

[Návod: Rovnicu deľte $\cos^3 x$ a upravte použijúc substitúciu $\operatorname{tg} x = z$, t.j. $2z = 3 - z^3, z^3 + 2z - 0, z = 1, z^2 + z + 3 = 0$.]

Úloha 2

V obore všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$(\sin^3 x - \cos^3 x) \cdot \cos x = 1 - 2 \cos^2 x,$$

[Oborom pravdivosti je $P = \{k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$]

Záverom sa zmienime o „univerzálnej“ substitúcii $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$. Táto často vedie k zložitým algebraickým rovniciam. Nie je to učivo matematiky SŠ. Študenti sa s ním stretávajú na VŠ pri téme Integrovanie goniometrických funkcií.

Príklad 6

V obore všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$\frac{2 \sin x}{2 - \cos x} = \frac{5 - 3 \sin x - 5 \cos x}{1 + \sin x + \cos x}.$$

Riešenie. Pretože menovateľ musí byť rôzny od 0, platí $1 + \sin x + \cos x \neq 0$, odkiaľ $x \neq (2k + 1)\pi, x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Túto rovnicu (a mnoho

jej podobných) je efektívne riešiť pomocou substitúcie $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$. Z nej je potrebné vyjadriť $\sin x$ a $\cos x$. To vykonáme jednoducho pomocou polovičných argumentov takto:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}$$

V obidvoch vzorcoch vydelíme čitateľ aj menovateľ na pravej strane rovnosti výrazom $\cos^2 \frac{x}{2}$, $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, čím dostávame $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$. Odvodené vzťahy dosadíme do našej rovnice a po úprave dostaneme rovnosť výrazov

$$\frac{4z}{2+2z^2-1+z^2} = \frac{5+5z^2-6z-5+5z^2}{1+z^2+2z+1-z^2}.$$

Po vykonaní ekvivalentných úprav dostaneme

$$8z(z+1) = 2z(5z-3)(3z^2+1),$$

z čoho máme hneď jedno riešenie $z = 0$. Po roznásobení všetkých výrazov a anulovaním dostávame kubickú rovnicu

$$15z^3 - 9z^3 + z - 7 = 0. \quad (*)$$

Skusmo zistíme jej riešenie $z = 1$. Po vydelení polynómu na ľavej strane rovnice $(*)$ polynómom $(z-1)$ dostaneme rovnicu $15z^2 + 6z + 7 = 0$, ktorá nemá ďalšie reálne korene.

Návratom k substitúcii tak dostaneme $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ alebo $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$. Obohom pravdivosti našej rovnice je $\{2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Prezentovanú substitúciu je výhodné použiť pri goniometrických rovniciach typu $a \cos x + b \sin x = c$ (a, b, c sú dané reálne čísla).

Úloha 3

V obore všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$\frac{1 + \sin x - 3 \cos x}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x} = 2.$$

[Obor pravdivosti $P = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$].

Úloha 4

V obore všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$\frac{2 - \cos x}{1 + \sin x} = 1.$$

[Obor pravdivosti $P = \{2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$].

Poznámka. Napriek univerzálnemu použitiu uvedenej substitúcie tieto dve úlohy možno riešiť po úprave aj 1. použitím súčtových vzorcov, 2. použitím vzorcov pre súčet hodnôt goniometrických funkcií, 3. umocnením druhou mocninou, 4. využitím ďalších goniometrických vzorcov, 5. aplikáciou polovičných argumentov pre funkcie $\sin x$ a $\cos x$.

Pre zaujímavosť uvedme ešte jeden druh substitúcie.

Príklad 7

V obore všetkých reálnych čísel riešte rovnicu

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x.$$

Riešenie. Položme $\sin x + \cos x = z$. Potom uvedomiac si, že $1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$, $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$, dostaneme $z = z^2$, t.j. $z^2 - z = 0$, $z(z-1) = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Riešenie našej rovnice dostaneme ako riešenie rovníc $\sin x + \cos x = 0$, $\sin x + \cos x = 1$, teda $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = 2k\pi$, $x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Prezentované príklady môžu zaujať čitateľov svojím kreatívnym a invenčným nábojom. Ide o snahu formovať uvedomelý prístup žiakov SŠ k riešeniu matematických úloh. Tým sa redukuje formalizmus v matematických vedomostiach žiakov SŠ. Snažili sme sa ukázať nesporný význam substitúcie v matematických výpočtoch. Zakončíme celý článok opäť

pohľadom do histórie citujúc významného francúzskeho matematika *P. S. Laplacea* (1749-1827): „Čítajte Eulerove diela. Euler je učiteľom nás všetkých“. *Leonard Euler* (1707–1783) je naozaj hviezdou matematického neba. Goniometriu ostrého uhla poznali starí Gréci, indická, arabská a čínska matematika. No až Euler sa „vymanil“ zo zajatia pravouhlého trojuholníka a dal goniometrii podobu akú poznáme dnes. Slávna Eulerova rovnosť ukazuje vzťah medzi goniometrickými funkciami a komplexnými číslami.

Literatúra

- [1] *Odvárko, O. a kol.*: Zbierka úloh z matematiky pre 2. ročník gymnázia. SPN, Bratislava 1985.
- [2] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky. SPN, Praha 1972.
- [3] *Vyšín, J. a kol.*: Úlohy z matematiky pre 4. ročník gymnázia. SPN, Bratislava 1976.
- [4] *Znám, Š. a kol.*: Pohľad do dejín matematiky. Alfa, Bratislava, SNTL, Praha 1986.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádime riešenie úloh 169 a 170, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (19.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 169

Najděte všechna celá čísla n , pro která je hodnota výrazu $2^n - 91$ třetí mocninou některého celého čísla.

Pavel Calábek

Řešení:

Označme x celé číslo, pro které je $2^n - 91$ jeho třetí mocninou. Platí tedy

$$x^3 = 2^n - 91. \quad (1)$$

Nutnou podmínkou existence x je, aby číslo n bylo celé nezáporné, to předpokládáme ve zbytku řešení. Prvočíselný rozklad čísla 91 je $91 = 7 \cdot 13$. Nejprve vyšetříme zbytky při dělení číslem 7 obou stran rovnice (1).

Pro libovolné celé číslo x platí $(x+7)^3 - x^3 = 7(3x^2 + 21x + 49)$. Odtud vidíme, že zbytky třetích mocnin celých čísel při dělení sedmi se opakují s periodou sedm. Třetí mocniny celých čísel při dělení 7 mají zbytky 0 (pro čísla x dělitelná 7), 1 (pro čísla x se zbytky 1, 2 a 4 při dělení 7) a 6 (pro čísla x se zbytky 3, 5 a 6 při dělení sedmi).

Dále platí $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$, proto se zbytky čísel tvaru 2^n při dělení 7 opakují s periodou 3. Celé nezáporné mocniny čísla 2 mají při dělení 7 zbytky 1 (když n je dělitelné třemi), 2 (pro n se zbytkem 1 při dělení 3) a 4 (pro n se zbytkem 2 při dělení třemi). Tyto zbytky tak mají i čísla $2^n - 91$.

Vidět to můžeme ostatně i z následující tabulky:

x	...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$x^3 \bmod 7$	...	0	1	1	6	1	6	6	0	1	1	6	1	...
n		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$(2^n - 91) \bmod 7$		1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4	...

Vraťme se k rovnici (1). Číslo $2^n - 91$ může mít při dělení sedmi jeden ze zbytků 1, 2, 4, a číslo x^3 může mít při dělení sedmi jeden ze zbytků 0, 1, 6. Jediný možný společný zbytek je proto 1. Odtud již plyne, že číslo n musí být dělitelné 3 a x má při dělení sedmi jeden ze zbytků 1, 2 a 4. Je tedy $n = 3m$ pro vhodné celé nezáporné číslo m .

Rovnici (1) upravíme do tvaru

$$(2^m - x)(2^{2m} + 2^m x + x^2) = 91. \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že číslo m je celé nezáporné a číslo x celé, jsou oba činitele levé strany výrazu (2) celá čísla. Navíc $2^{2m} + 2^m x + x^2 = (2^m + \frac{1}{2}x)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geq 0$, proto jsou oba činitele čísla kladná. Pro úplné řešení úlohy rozebereme všechny možnosti rozkladu čísla 91 na součin dvou kladných celých čísel, tyto možnosti jsou dané následující tabulkou:

$A = 2^m - x$	1	7	13	91
$B = 2^{2m} + 2^m x + x^2$	91	13	7	1

Z rovnosti $A = 2^m - x$ plyne $2^m = A + x$, proto

$$B = 2^{2m} + 2^m x + x^2 = (A + x)^2 + (A + x)x + x^2 = 3x^2 + 3Ax + A^2,$$

neboli

$$0 = 3x^2 + 3Ax + A^2 - B.$$

Tuto rovnici budeme řešit jako kvadratickou rovnici vzhledem k neznámé x pro čtyři dané dvojice čísel A a B . Pro $(A, B) = (1, 91)$ je $x \in \{-6, 5\}$, pro $(A, B) = (7, 13)$ je $x \in \{-3, -2\}$, pro $(A, B) = (13, 7)$ a $(A, B) = (91, 1)$ tato rovnice nemá reálné kořeny. Číslo $A + x (= 2^m)$ je ovšem mocninou čísla 2 pouze pro $A = 7$ a $x = -3$. Proto $m = 2$, tedy $n = 6$.

Závěr. Hodnota výrazu $2^n - 91$ je třetí mocninou celého čísla pouze pro $n = 6$ a platí $2^6 - 91 = (-3)^3$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Ondřej Bartoš* z G v Žďáru n. S., Neumannova, *Michael Bílý* z GJV v Klatovech, Nár. mučedníků, *Jiří Bišek* z GPB ve Frýdku-Místku, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Martin Bucháček* z G v Plzni, Opavská, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, Komenského, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, tř. Jiřího z Poděbrad, *Josef Hazi* z G v Chebu, Nerudova, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Anna Chejnovská* z GChD v Praze 5, Zborovská, *Miroslav Koblížek* z G v Žamberku, Nádražní, *Barbora Mílová* a *Jakub Solovský*, oba z GMK v Bílovci, *Pavel Ševeček* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích, Svojsíkova, *Martin Töpfer* z G v Praze 7, Nad Štolou a *Lukáš Zavřel* z G v Praze 9, Chodovická,

Neúplná řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Hynek Jemelík*, z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše a *Tomáš Kubelka* z G v Žamberku, Nádražní.

Úloha 170

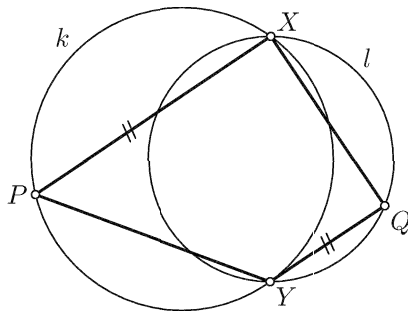
Na kružnici k jsou dány dva různé body X a Y tak, že přímka XY neprochází středem kružnice k . Úsečka XY je průměrem kružnice l . Na větším oblouku XY kružnice k leží bod P a na kružnici l bod Q tak, že čtyřúhelník $PXQY$ je konvexní a přitom $PX \parallel QY$. Dokažte, že velikost úhlu PYQ nezávisí na poloze bodu P (za podmínky existence bodu Q).

Robert Geretschläger (Graz)

Řešení:

Přímky PX a QY jsou rovnoběžné, úhly XPY a PYQ jsou přilehlé, tedy platí $|\sphericalangle XPY| + |\sphericalangle PYQ| = 180^\circ$. Podle věty o obvodovém úhlu

velikost úhlu XPY nezávisí na poloze bodu P na delším oblouku XY kružnice k . Proto velikost úhlu PYQ nezávisí na poloze bodu P (za podmínky existence bodu Q).



Obr. 1

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Ondřej Bartoš* z G v Žďáru n. S., Neumannova, *Michael Bílý* z GJV v Klatovech, Nár. mučedníků, *Jiří Bišek* z GPB ve Frýdku-Místku, *Ondřej Bouchala* z G v Havířově, Komenského, *Martin Bucháček* z G v Plzni, Opavská, *Eva Gocníková* z GJŠ v Přerově, Komenského, *Alena Harlenderová* z SGO v Olomouci, tř. Jiřího z Poděbrad, *Josef Hazi* z G v Chebu, Nerudova, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Anna Chejnovská* z GChD v Praze 5, Zborovská, *Hynek Jemelík* a *Pavel Ševeček*, oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše *Miroslav Koblížek* a *Tomáš Kubelka*, oba z G v Žamberku, Nádražní, *Kateřina Medková* z BGBB v Hradci Králové, Orl. nábř., *Barbora Móllová* a *Jakub Solovský*, oba z GMK v Bílovci, *Štěpán Šimsa* z GJJ v Litoměřicích, Svojsíkova, *Martin Töpfer* z G v Praze 7, Nad Štolou a *Lukáš Zavřel* z G v Praze 9, Chodovická.

Pavel Calábek