

# MATEMATIKA

## Iracionální čísla a řetězové zlomky

JIŘÍ WIDŽ

Gymnázium Sokolov

V článku [1] jsme se seznámili s konečnými jednoduchými řetězovými zlomky a jejich převodem na racionální číslo, věnovali jsme se Eukleidovu algoritmu pro nalezení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel. V tomto příspěvku ukážeme, kromě jiného, jak převést racionální číslo na řetězový zlomek. Pak se již budeme věnovat převodu iracionálního čísla na řetězový zlomek a na závěr se zmíníme o kvadratických iracionalitách.

### Řetězové zlomky a Eukleidův algoritmus

Jak převedeme např. racionální číslo  $\frac{65}{17}$  na jednoduchý řetězový zlomek? K převodu využijme Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele čitatele a jmenovatele tohoto zlomku

$$65 = 17 \cdot 3 + 14,$$

$$17 = 14 \cdot 1 + 3,$$

$$14 = 3 \cdot 4 + 2,$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1,$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0.$$

Při výpočtu největšího společného dělitele čitatele a jmenovatele daného racionálního čísla jsme získali tzv. *neúplné podíly* (viz. [1], str. 197), tj. čísla 3, 1, 4, 1, 2, které nazýváme *prvky* jednoduchého řetězového zlomku,

který je vyjádřením čísla  $\frac{65}{17}$ :

$$\frac{65}{17} = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = [3; 1; 4; 2]$$

Umíme převést racionální číslo na jednoduchý řetězový zlomek a také opačně, řetězový zlomek vyjádřit racionálním číslem (viz. [1], str. 199). Nyní obrátíme naši pozornost na čísla iracionální.

### Převod iracionálního čísla na řetězový zlomek

Pro převod iracionálního čísla na jednoduchý řetězový zlomek budeme potřebovat funkci *dolní celá část reálného čísla*  $[a]$ , která je definována jako největší celé číslo, nepřevyšující  $\alpha$ , tj.  $[a] \leq \alpha < [a] + 1$  (např.  $[2,87] = 2$ ,  $[-3,2] = -4$ ,  $[5] = 5$ ).

Pokusme se nyní vyjádřit např. číslo  $\sqrt{3}$  řetězovým zlomkem.

Označme  $\alpha = \sqrt{3}$ . Celá část z čísla  $\alpha$  je  $a_0 = [\sqrt{3}] = 1$  a jeho desetinná část (tj. chyba odhadu pomocí celé části) je  $\sqrt{3} - 1$ , tj.  $\alpha - a_0$ . Převrácená hodnota této desetinné části je:

$$r_1 = \frac{1}{\alpha - a_0} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

Celou část z čísla  $r_1$  označíme  $a_1$ , tj.

$$a_1 = [r_1] = \left\lfloor \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right\rfloor = 1,$$

a převrácenou hodnotu desetinné části tohoto čísla vyjádříme ve tvaru:

$$r_2 = \frac{1}{r_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3} + 1$$

Celý postup zopakujeme:

$$a_2 = [r_2] = [\sqrt{3} + 1] = 2 \quad \text{a} \quad r_3 = \frac{1}{r_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - 2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2},$$

$$a_3 = [r_3] = \left\lfloor \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \right\rfloor = 1 \quad \text{a} \quad r_4 = \frac{1}{r_3 - a_3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3} + 1,$$

$$a_4 = [r_4] = [\sqrt{3} + 1] = 2 \quad \text{a} \quad r_5 = \frac{1}{r_4 - a_4} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - 2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

Naše výpočty se dále již opakují, a proto můžeme psát:

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}.$$

Čísla  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  jsou prvky jednoduchého nekonečného řetězového zlomku, který odpovídá iracionálnímu číslu  $\alpha^{1)}$ .

Připomeňme dvě významné věty z teorie jednoduchých řetězových zlomků ([1], str. 200). Jejich důkazy lze najít např. v [3].

### Věta 1

Každému kladnému reálnému číslu  $\alpha$  odpovídá jediný jednoduchý řetězový zlomek, který má za hodnotu toto číslo. Tento řetězový zlomek je konečný, je-li  $\alpha$  číslo racionální; nekonečný, je-li  $\alpha$  číslo iracionální.

### Definice 1

Řekneme, že řetězový zlomek  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$  je periodický, existují-li taková přirozená čísla  $k_0$  a  $h$ , že pro libovolné přirozené  $k \geq k_0$  platí:  $a_{k+h} = a_k$ . Takový periodický řetězový zlomek pak značíme

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k_0-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \dots, a_{k_0+h-1}}].$$

Řetězový zlomek, který jsme dostali pro  $\sqrt{3}$ , je *periodický* a zapíšeme jej takto:  $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$ .

Uvedený příklad pro  $\sqrt{3}$  je speciálním případem následující věty, jejíž důkaz můžeme najít např. v [4]:

### Věta 2

Nechť přirozené číslo  $n$  není druhou mocninou celého čísla, pak  $\sqrt{n}$  lze vyjádřit pomocí periodického řetězového zlomku ve tvaru:

$$\sqrt{n} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0}]^{2)}.$$

1) Postup, který jsme použili pro převod iracionálních čísel na řetězový zlomek, můžeme použít i pro čísla racionální.

2) Tento periodický řetězový zlomek je *ryze periodický*.

Perioda řetězového zlomku čísla  $\sqrt{n}$  se skládá ze dvou částí: ze symetrické části  $a_1, a_2, \dots, a_2, a_1$  a z posledního prvku  $2a_0$ . Příklady odmocnin, které jsou vyjádřené periodickými řetězovými zlomky:  $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ ,  $\sqrt{23} = [4; \overline{1, 3, 1, 8}]$ ,  $\sqrt{29} = [5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}]^{3)}$ .

Vraťme se k číslu  $\sqrt{3}$ . Přibližná hodnota této odmocniny je 1,732050807569. *Archimédes*<sup>4)</sup> ve svém díle *Měření kruhu* používal aproximaci  $\sqrt{3}$ . Platí  $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ . Tato nerovnost je zajímavá, pokud převedeme všechna tři čísla na jednoduché řetězové zlomky:

$$[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2] < [1; 1, 2, 1, 2, 12, 1, 2, \dots] < [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1]$$

Vzhledem k tomu, že porovnávání jednoduchých řetězových zlomků není obsahem tohoto článku, odkážeme případné zájemce o tuto problematiku na literaturu [4].

*Historická poznámka.* S druhou odmocninou z přirozeného čísla souvisí samotné objevení řetězových zlomků, které je připisováno dvěma matematikům z Boloni. Prvním z nich je *Rafael Bombelli*<sup>5)</sup>, který v roce 1579 vydal ve druhém vydání svoji knihu *L'Algebra Opera*, ve které se objevuje algoritmus pro rozvoj do následujícího řetězového zlomku, který se nazývá *obecný řetězový zlomek*:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \dots}}$$

Druhým ze zakladatelů teorie řetězových zlomků je pak *Pietro Antonio Cataldi*<sup>6)</sup>, který používal stejné metody pro rozvoj druhé odmocniny do

<sup>3)</sup> Odmocniny z přirozených čísel menších než 40, které nejsou druhou mocninou, vyjádřené pomocí periodických řetězových zlomků lze nalézt např. na <http://mathworld.wolfram.com/PeriodicContinuedFraction.html> [cit. 2009-22-04].

<sup>4)</sup> *Archimédes ze Syrakus* (cca 287–212 př. n. l.) – jeden z nejslavnějších matematiků, fyziků a inženýrů starověku. Mezi jeho díla patří: *Metoda, O spirálách, O měření kruhu, Kvadratura paraboly, O kouli a válci, Kniha pouček*, ... Byl první, kdo poskytl metodu výpočtu  $\pi$  s libovolnou žádanou přesností, která je založena na tom, že obvod pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kruhu je menší než obvod kruhu a obvod mnohoúhelníku kružnici opsaného je větší.

<sup>5)</sup> *Rafael Bombelli* (1526–1572) – italský matematik, jako první začal používat komplexní čísla.

<sup>6)</sup> *Pietro Cataldi* (1548–1626) – italský matematik, profesor matematiky ve Florencii a Bologni.

řetězového zlomku jako Bombelli, ale jako první rozvinul symboliku pro řetězové zlomky a popsal některé jejich vlastnosti – jeho práce z roku 1613 (*Trattato del modo brevissimo di trovar la radice quadra delli numeri*).<sup>7)</sup>

## Kvadratické iracionality

S pojmem periodického řetězového zlomku úzce souvisí tzv. *kvadratické iracionality*.

### Definice 2

Číslo  $\alpha$  se nazývá *kvadratická iracionalita*, je-li  $\alpha$  iracionálním kořenem některé kvadratické rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$  s celočíselnými koeficienty, kde  $a \neq 0$ .

Příkladem kvadratické iracionality je např.  $\sqrt{2}$ , protože je jedním z kořenů kvadratické rovnice  $x^2 - 2 = 0$ . Kladným kořenem kvadratické rovnice  $g^2 - g - 1 = 0$  je asi nejznámější kvadratická iracionalita, kterou je hodnota *zlatého řezu*, viz [5] ( $g = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ).

Zlatý řez můžeme vyjádřit i velice jednoduchým nekonečným řetězovým zlomkem:

$$g = [1; 1, 1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}.$$

Pro kvadratické iracionality platí tzv. *Lagrangeova*<sup>8)</sup> *věta* (důkaz lze najít např. v [3]):

### Věta 3 (Lagrangeova)

Každou kvadratickou iracionalitu, tj. výraz tvaru  $\frac{p \pm \sqrt{n}}{q}$ , kde  $p, q \in \mathbb{Z}$  ( $q \neq 0$ ),  $n \in \mathbb{N}$ , lze vyjádřit periodickým řetězovým zlomkem. A naopak, každý periodický řetězový zlomek je hodnotou nějaké kvadratické iracionality.

Pro převod libovolné kvadratické iracionality můžeme použít obdobný způsob, který jsme použili v předchozí části. Ve větě 2 jsme se seznámili s ryze periodickým řetězovým zlomkem. Na závěr ukážeme, jak vyjádřit nerzyze periodický řetězový zlomek jako kvadratickou iracionalitu. Abychom

<sup>7)</sup> *Traktát o nejkratším způsobu nalezení druhých odmocnin z čísel*

<sup>8)</sup> *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813) – narodil se v Itálii, zemřel ve Francii. Je zakladatelem variačního počtu, kromě matematiky se zabýval také astronomií.

tak ale mohli učinit, musíme si nejdříve definovat *zbytek nekonečného řetězového zlomku*.

### Definice 3

Řetězový zlomek  $r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$  nazýváme *zbytkem nekonečného řetězového zlomku*  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ .

V souvislosti se zbytkem řetězového zlomku si uvedeme dvě věty, které pak využijeme při vyjádření neryze *periodického řetězového zlomku* jako kvadratické iracionality. Důkazy obou vět můžeme najít např. v [4]:

### Věta 4

Nechť rozklad kladného reálného čísla  $\alpha$  v řetězový zlomek je ve tvaru  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$  a nechť  $r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , je zbytek daného řetězového zlomku. Pak pro  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, r_k]$  platí:  $a_k = \lfloor r_k \rfloor$ , pro  $k \geq 0$ .

### Věta 5

Nechť rozklad kladného reálného čísla  $\alpha$  v řetězový zlomek je ve tvaru  $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$  a nechť  $r_k$ , pro  $k \in \mathbb{N}$ , je zbytek daného řetězového zlomku. Pak platí<sup>9)</sup>

$$\alpha = \frac{r_k \cdot P_{k-1} + P_{k-2}}{r_k \cdot Q_{k-1} + Q_{k-2}}.$$

### Úloha

Vyjádřete hodnotu řetězového zlomku  $[2; 3, \overline{1, 5}]$ .

*Řešení.* Číslo  $x$  můžeme psát ve tvaru  $x = [2; 3, r_2]$  a podle věty 5, kde

$$x = \frac{r_2 \cdot P_1 + P_0}{r_2 \cdot Q_1 + Q_0},$$

platí

|       |           |                                         |
|-------|-----------|-----------------------------------------|
| $k$   | 0         | 1                                       |
| $a_k$ | 2         | 3                                       |
| $P_k$ | $a_0 = 2$ | $a_0 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ |
| $Q_k$ | 1         | $a_1 = 3$                               |

<sup>9)</sup> Čísla  $P_{k-1}$ ,  $P_{k-2}$ ,  $Q_{k-1}$  a  $Q_{k-2}$  jsme si definovali v článku [1]. Jedná se o čitatele a jmenovatele sblížených zlomků daného řetězového zlomku.

tj.

$$x = \frac{r_2 \cdot 7 + 3}{r_2 \cdot 3 + 1} \quad (1)$$

Stejným způsobem vyjádříme zbytek  $r_2$ ;  $r_2 = [1; 5, r_2]$ ,

|       |           |                                         |
|-------|-----------|-----------------------------------------|
| $k$   | 0         | 1                                       |
| $a_k$ | 1         | 5                                       |
| $P_k$ | $a_0 = 1$ | $a_0 \cdot a_1 + 1 = 1 \cdot 5 + 1 = 6$ |
| $Q_k$ | 1         | $a_1 = 5$                               |

tj.

$$r_2 = \frac{r_2 \cdot 1 + 6}{r_2 \cdot 1 + 5}.$$

Úpravou dostáváme kvadratickou rovnici  $r_2^2 + 4r_2 - 6 = 0$ , která má dva kořeny  $r_2$ ;  $r_2 = -2 \pm \sqrt{10}$ .

Dosadíme kladný kořen  $r_2$  do (1), máme

$$x = \frac{(-2 + \sqrt{10}) \cdot 7 + 2}{(-2 + \sqrt{10}) \cdot 3 + 1}$$

a po úpravě

$$x = \frac{-12 + 7 \cdot \sqrt{10}}{-5 + 3 \cdot \sqrt{10}}.$$

Poslední zlomek usměrníme a dostaneme hledanou kvadratickou iracionalitu, která je hodnotou daného řetězového zlomku  $x = [2; 3, \overline{1, 5}]$ , tedy  $x = \frac{1}{65}(150 - \sqrt{10})$ .

## L i t e r a t u r a

- [1] *Widž, J.*: Od krácení zlomků k řetězovým zlomkům. MFI, roč. 18 (2008/09), č. 4
- [2] *Brezinski, C.*: History of Continued Fractions and Padé Approximants. Springer-Verlag, Berlin 1991.
- [3] *Chinčín, A. J.*: Řetězové zlomky. Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1952.
- [4] *Vít, P.*: Řetězové zlomky. Mladá fronta, edice ŠMM, Praha 1982.
- [5] *Veselý, J.*: Zlatý řez a co vše s ním souvisí. Učitel matematiky, roč. 6 (1998), č. 3.

# O čtverci vepsaném do pravoúhlého trojúhelníku

FILIP ŠVRČEK – VLADIMÍR VANĚK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Úlohy pro soutěž Matematický klokan se každoročně vybírají na mezinárodních seminářích, kde jsou rozděleny podle obtížnosti do jednotlivých věkových kategorií a dále pak upraveny pro soutěž. Výběr úloh v roce 2007 se uskutečnil v rakouském Grazu a mezi navrženými úlohami pro kategorii Junior na soutěžní rok 2008 byla také následující planimetrická úloha, viz [1]:

## Úloha

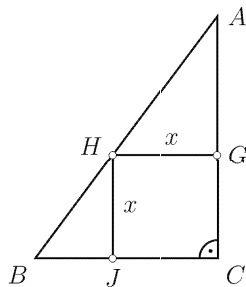
*Uvažujme dva způsoby, jak vepsat čtverec do daného pravoúhlého trojúhelníku tak, aby všechny jeho vrcholy ležely na stranách daného trojúhelníku. První z nich spočívá v umístění dvou sousedních stran čtverce na jeho odvěšny a ve druhém z nich leží jedna strana čtverce na přeponě daného trojúhelníku, viz obr. 1 a obr. 2. Který z obou čtverců je větší?*

- A) První.
- B) Druhý.
- C) Oba čtverce jsou shodné.
- D) Odpověď závisí na konkrétních rozměrech daného trojúhelníku.
- E) Nikdy nelze rozhodnout.

Daná úloha představuje poměrně zajímavý problém, především co do počtu a rozmanitosti možných přístupů k jeho řešení. Cílem tohoto článku je seznámit čtenáře s některými z nich.

## Řešení 1.

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s přeponou  $AB$ . Délky jeho stran označme postupně  $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$  a  $|CA| = b$ . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $a \leq b$ .



Obr. 1

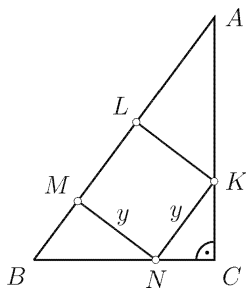
Nechť čtverec  $CGHJ$  vepsaný do trojúhelníku  $ABC$  prvním způsobem (obr. 1) má stranu délky  $x$ . Je zřejmé, že trojúhelníky  $AHG$  a  $HBJ$  jsou podobné, proto platí

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{b-x}.$$

Odtud plyne

$$x = \frac{ab}{a+b}. \quad (1)$$

Do trojúhelníku  $ABC$  vepíšme nyní čtverec  $KLMN$  druhým způsobem, délku jeho strany označíme  $y$  (obr. 2).



Obr. 2

Výšku z vrcholu  $C$  v trojúhelníku  $CKN$  označíme  $z$ . Z podobnosti trojúhelníků  $ABC$  a  $KNC$  plyne

$$\frac{z}{y+z} = \frac{y}{c}.$$

Odtud dále dostáváme

$$z = \frac{y^2}{c - y} . \quad (2)$$

Obsah  $S$  trojúhelníku  $ABC$  můžeme vyjádřit dvěma způsoby. Platí  $S = \frac{1}{2}ab$  a také  $S = \frac{1}{2}c(y + z)$ . Porovnáním těchto vztahů obdržíme rovnost

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c(y + z) ,$$

z níž po dosazení z (2) za  $z$  dostaneme

$$y = \frac{abc}{c^2 + ab} = \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + ab + b^2} . \quad (3)$$

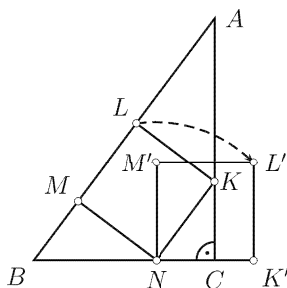
Snadno se dále dokáže, že pro libovolná kladná reálná čísla  $a, b$  platí nerovnost

$$\frac{1}{a + b} > \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + ab + b^2} , \quad (4)$$

což lze ověřit umocněním obou stran na druhou a následným převodem pomocí ekvivalentních úprav na evidentní nerovnost  $a^2b^2 > 0$ . V takovém případě ale snadným porovnáním (1) a (3) obdržíme  $x > y$ .

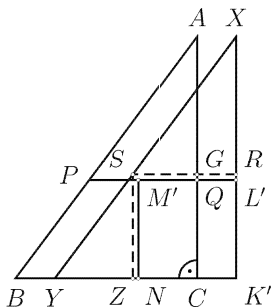
### Řešení 2.

Využijeme otočení se středem v bodu  $N$  o úhel  $\beta = |\angle ABC|$  v záporném smyslu. Obrazy bodů  $K, L$  a  $M$  v tomto otočení označíme po řadě  $K', L'$  a  $M'$  (obr. 3).



Obr. 3

Uvažujme posunutí určené vektorem  $\overrightarrow{CK'}$ , které trojúhelník  $ABC$  zobrazí na trojúhelník  $XYK'$  a čtverec  $GHJC$  na čtverec  $RSZK'$  (obr. 4). Pak ale evidentně porovnat délky  $y = |L'M'|$  a  $x = |RS|$  stran obou čtverců vepsaných do trojúhelníku  $ABC$  znamená porovnat délky  $l_1$  a  $l_2$  úseček  $PM'$  a  $BY$ . Bod  $P$  je přitom průsečíkem přímek  $AB$  a  $L'M'$ .



Obr. 4

Trojúhelníky  $ABC$  a  $APQ$ , kde bod  $Q$  je průsečík přímek  $AC$  a  $M'L'$ , jsou podobné, proto

$$\frac{|PQ|}{|QA|} = \frac{|BC|}{|CA|},$$

tedy

$$\frac{l_1 + y - l_2}{b - l_2} = \frac{a}{b}.$$

Odtud po úpravách máme

$$l_1 - l_2 = a - y \cdot \frac{a + b}{b}$$

a po dosazení za  $y$  z (3) dále

$$l_1 - l_2 = a - \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 + ab} \cdot \frac{a + b}{b}.$$

Z toho ale využitím nerovnosti (4) plyne, že  $l_1 - l_2 > 0$ , což je ekvivalentní s nerovností  $x > y$ .

### Řešení 3.

Délky  $l_1$  a  $l_2$  můžeme však porovnat i jiným způsobem. Z pravoúhlého trojúhelníku  $KNC$  (obr. 2) triviálně dostáváme

$$d = |CK| = y \sin \beta. \quad (5)$$

Dále pak z pravoúhlého trojúhelníku  $KAL$  (viz obr. 2) obdržíme

$$\cos \beta = \frac{y}{b-d},$$

odkud můžeme vyjádřit  $b$  využitím (5):

$$b = y \left( \frac{1}{\cos \beta} + \sin \beta \right)$$

Platí tedy

$$b - y = y \left( \frac{1}{\cos \beta} + \sin \beta - 1 \right).$$

Konečně v pravoúhlém trojúhelníku  $APQ$  (obr. 4) platí

$$\frac{l_1 + y - l_2}{b - y} = \cot \beta,$$

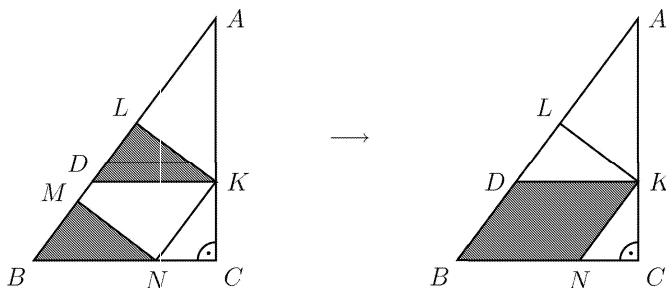
odkud po úpravě máme

$$l_1 - l_2 = y(1 - \cos \beta) \left( \frac{1}{\sin \beta} - 1 \right).$$

Protože ale  $\beta \in (0; \frac{1}{2}\pi)$ , je nutně  $l_1 - l_2 > 0$ , tedy  $x > y$ .

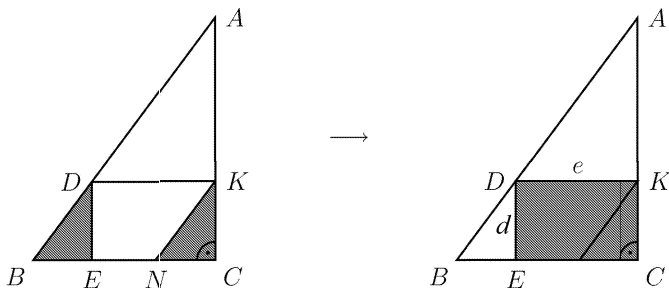
### Řešení 4.

Bodem  $K$  vedme rovnoběžku s přímkou  $BC$ , která protne stranu  $AB$  daného trojúhelníku  $ABC$  v bodu  $D$ . Trojúhelníky  $KLD$  a  $NMB$  jsou shodné, proto čtverec  $KLMN$  a rovnoběžník  $KDBN$  mají stejný obsah (obr. 5).



Obr. 5

Bodem  $D$  vedme rovnoběžku s přímkou  $AC$ , která protne stranu  $BC$  trojúhelníku  $ABC$  v bodu  $E$ . Potom trojúhelník  $DBE$  je shodný s trojúhelníkem  $KNC$  a obsah čtyřúhelníku  $KDBN$  je proto stejný jako obsah obdélníku  $CKDE$  (obr. 6). Délku strany  $EC$  tohoto obdélníku označíme  $e$  a délku jeho strany  $ED$  jako  $d$ .

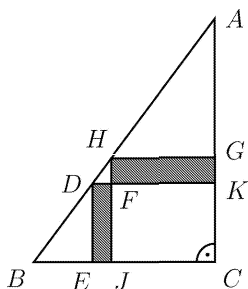


Obr. 6

Porovnat délky  $x$  a  $y$  znamená totéž, jako porovnat obsah čtverce  $CGHJ$  (označme ho  $S_1$ ) a obsah obdélníku  $CKDE$ , který označíme  $S_2$ .

Protože platí  $S_1 = S_3 + S_4$  a  $S_2 = S_3 + S_5$ , kde  $S_3$ ,  $S_4$  a  $S_5$  jsou po řadě obsahy obdélníků  $CKFJ$ ,  $GHFK$  a  $JFDE$ , je ale porovnání  $x$  a  $y$  ekvivalentní porovnání obsahů  $S_4$  a  $S_5$  (obr. 7). Platí přitom

$$S_4 = x(x - d) \quad \text{a} \quad S_5 = d(e - x).$$



Obr. 7

Nyní ukážeme, že platí  $|GA| < |KA|$ . Proto budeme porovnávat vzdálenosti  $d_1$  a  $d_2$  bodů  $G$  a  $K$  od přímky  $AB$ . Zřejmě  $d_2 = |KL| = y$  a dále

$$\frac{d_1}{|GH|} = \frac{b}{c}.$$

Odtud využitím (1) dostaneme

$$d_1 = x \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{b}{c}.$$

Pro libovolná kladná reálná čísla  $a, b$  platí nerovnost

$$\frac{b}{a+b} < \frac{a^2 + b^2}{a^2 + ab + b^2},$$

(lze ji po ekvivalentních úpravách převést na evidentní nerovnost  $0 < a^3$ ), proto využitím (3) dostáváme

$$d_1 = \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + ab + b^2} = y = d_2.$$

Odtud ale plyne, že

$$d = |CK| < |CG| = x.$$

Navíc z předpokladu  $a \leq b$  zřejmě

$$e - x = |DF| \leq |FH| = x - d.$$

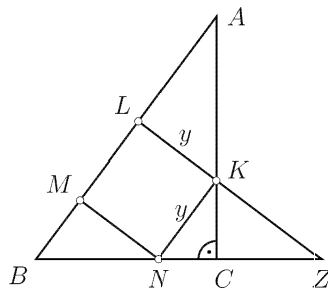
Dohromady tedy máme  $S_4 > S_5$ , což znamená

$$x^2 = S_1 = S_3 + S_4 > S_3 + S_5 = S_2 = de = y^2,$$

tj.  $x > y$ , což jsme chtěli dokázat.

### *Řešení 5.*

Označme  $Z$  průsečík přímek  $KL$  a  $BC$ . Z obr. 8 je zřejmé, že čtverec  $KLMN$  je do pravoúhlého trojúhelníku  $BZL$  vepsán prvním z obou uvedených způsobů, přičemž trojúhelníky  $ABC$  a  $ZBL$  jsou podobné.



Obr. 8

Pokud se nám tedy podaří ukázat, že obsah  $S$  trojúhelníku  $ABC$  je větší než obsah  $S_6$  trojúhelníku  $BZL$ , bude totéž platit i pro obsahy čtverců  $GHJC$  a  $KLMN$ .

Jestliže obsah čtyřúhelníku  $BCKL$  označíme  $S_7$  a obsahy trojúhelníků  $CZK$  a  $ALK$  po řadě  $S_8$  a  $S_9$ , pak máme  $S = S_7 + S_9$  a  $S_6 = S_7 + S_8$ . V trojúhelníku  $NCK$  (obr. 8) zřejmě platí  $|KN| > |KC|$ .

Trojúhelníky  $CZK$  a  $LAK$  jsou ovšem podobné a pro jejich odpovídající si strany  $KL$  a  $KC$  můžeme psát nerovnost

$$|KL| = |KN| > |KC|.$$

Proto  $S_9 > S_8$ , z toho bezprostředně  $S > S_6$ , a tedy i  $x > y$ .

### Závěr

Všechna uvedená řešení vedou k téže odpovědi. Čtverec vepsaný do daného pravoúhlého trojúhelníku (v souladu s obr. 1) má vždy delší stranu než čtverec, který je vepsán do stejného trojúhelníku jako na obr. 2.

### Literatura

- [1] Känguru der Mathematik, Graz 2007, sborník úloh.

# Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení zašlete nejpozději do 10. 1. 2011 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v  $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

## Úloha 173

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{x} + 2} &= y - 2, \\ \sqrt{\sqrt{y} + 2} &= x - 2.\end{aligned}$$

*Radek Horenský*

## Úloha 174

Uvažujme trojúhelník  $ABC$ , v němž  $K$  značí střed strany  $BC$ . Dále nechť  $S$  a  $O$  jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům  $ABC$  a  $AKC$ . Průsečík kolmice z bodu  $O$  k přímkě  $BC$  s přímkou  $CS$  označme  $P$ . Dokažte větu: Má-li úhel  $BAC$  velikost  $60^\circ$ , potom  $|SK| = |CP|$ . Platí i věta obrácená?

*Jaroslav Švrček*