

MATEMATIKA

Logaritmické nerovnice

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta, UP Olomouc

Logaritmické rovnice bývají zastoupeny ve školních programech matematiky na středních školách a byly tradičně ve školních osnovách odečítána, logaritmické nerovnice se tu však pěstují méně.

Nahlédneme do některých publikací. Učebnice [1] obsahuje jen logaritmické *rovnice*. V článku [2], zabývajícím se úlohami ze středoškolské matematiky, však najdeme pět pěkných příkladů na logaritmické nerovnice (tyto příklady spolu s dalšími najdeme také již ve [3]), čímž tento článek nepřímo vyzývá, aby se logaritmickým nerovnicím věnovala při výuce na střední škole pozornost. Publikace [4] zabývající se standardy u matematiky pro čtyřletá gymnázia ve své teoretické části, v níž je uveden přehled požadovaných znalostí a dovedností, požaduje pouze „využít grafů funkcí ke znázornění kořenů základních rovnic a nerovnic“. Tento požadavek je ilustrován příkladem: Pomocí grafu funkce řešte nerovnici $\log_3 x > 2$. Avšak ve své druhé příkladové části obsahuje tato publikace pět početních příkladů na řešení logaritmických nerovnic. Zdá se tedy, že řešení logaritmických nerovnic je na samém okraji matematického učiva pro střední školy, tj. někdy je do něj zahrnuto, jindy ne.

Řešení logaritmických nerovnic má velkou didaktickou hodnotu a může významně prohlubovat poznávací dovednosti studentů. Je proto vhodné, když učitel ve vybraných třídách, pro něž ŠVP počítá s větší časovou dotací, toto téma zařadí a zpestří tak výuku. V praktické části tohoto článku analyzujeme několik úloh a ukážeme si různé metody jejich řešení.

Řešení logaritmických nerovnic je o něco náročnější, ale také zajímavější než učivo o logaritmických rovnicích. Tato zvýšená náročnost není důsledkem toho, že bychom používali nějaké složité operace, vystačíme vlastně

jen s jednoduchými nerovnostmi, ale spočívá v tom, že musíme při řešení logicky zvládnout a zpracovat více na sobě různě závislých podmínek. Opíráme se přitom o několik základních vlastností logaritmických funkcí a logaritmů; uveďme si některé (pracujeme v oboru reálných čísel, což už dále nezdůrazňujeme):

1⁰ Pro základ a logaritmické funkce $\log_a x$ platí: $(a > 0) \wedge (a \neq 1)$.

2⁰ Funkce $y = \log_a x$ je definována právě pro všechna $x > 0$ (splnění této nerovnosti pro x předpokládáme v celém článku, pokud nebude řečeno jinak).

3⁰ Pro $a > 1$ je každá logaritmická funkce rostoucí, přičemž pro $0 < x < 1$ má hodnoty záporné, pro $x = 1$ má hodnotu 0, pro $x > 1$ má hodnoty kladné.

Pro $0 < a < 1$ je každá logaritmická funkce klesající, přičemž pro $0 < x < 1$ má hodnoty kladné, pro $x = 1$ má hodnotu 0, pro $x > 1$ má hodnoty záporné.

Tuto vlastnost si potvrdíme užitím grafu funkce.

4⁰ Pro rovnosti platí $\log_a X = \log_a Y \Leftrightarrow X = Y$ (logaritmická funkce je prostá).

Pak pro nerovnosti platí:

Pro $a > 1$ a libovolné výrazy $X, Y > 0$ platí $\log_a X < \log_a Y \Leftrightarrow X < Y$ a stejně $\log_a X > \log_a Y \Leftrightarrow X > Y$.

Pro $0 < a < 1$ a libovolné výrazy $X, Y > 0$ platí $\log_a X < \log_a Y \Leftrightarrow X > Y$ a stejně $\log_a X > \log_a Y \Leftrightarrow X < Y$.

5⁰ Vzorce pro logaritmus součinu, podílu a mocniny (známe z výuky logaritmů).

6⁰ $\log_a a = 1$.

7⁰ $\log_a x = -\log_{1/a} x$.

8⁰ Pro všechna přirozená n , kde $a^n \neq 1$, platí $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$.

(Tento vzorec dostaneme, když v rovnosti $a^{n \log_{a^n} x} = x$ přejdeme k logaritmům se základem a .)

9⁰ Pro všechna reálná k platí

$$\log_{ka} x = \frac{\log_a x}{1 + \log_a k} \left(= \frac{\log_a x}{\log_a ka} \right).$$

(Tento vzorec dostaneme, když v rovnosti $(ka)^{\log_{ka} x} = x$ přejdeme k logaritmům se základem a .)

Uveďme si nyní pestrou sadu ukázkových příkladů, na nichž si ukážeme použití uvedených vlastností logaritmické funkce.

Úloha 1. Řešte nerovnici

$$\log_2(x^2 - 3x) < 1 + \log_2(x - 2). \quad (1)$$

Řešení. Jako první zpracujeme definiční obor nerovnice (1). Platí tedy

$$(x^2 - 3x > 0) \wedge (x - 2 > 0).$$

První nerovnici upravíme na tvar $x(x-3) > 0$ a množinou všech řešení této nerovnice je $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$, druhá nerovnice dává $(2; +\infty)$. Definiční obor nerovnice (1) je tedy

$$((-\infty; 0) \cup (3; +\infty)) \cap (2; +\infty) = (3; +\infty).$$

Nyní přejdeme k vlastnímu řešení. Užitím 5^0 , 6^0 upravíme pravou stranu nerovnice (1)

$$1 + \log_2(x - 2) = \log_2 2 + \log_2(x - 2) = \log_2(2x - 4).$$

Tak dostáváme

$$\log_2(x^2 - 3x) < \log_2(2x - 4).$$

Při základu 2 (> 1) je logaritmická funkce rostoucí, tedy podle 3^0 , 4^0 platí

$$x^2 - 3x < 2x - 4,$$

neboli

$$x^2 - 5x + 4 < 0.$$

Kořeny trojčlenu jsou 1 a 4, tedy množinou všech řešení této kvadratické nerovnice je interval $(1, 4)$. Tento výsledek porovnáme s definičním oborem zadané nerovnice:

$$(1; 4) \cap (3; +\infty) = (3; 4).$$

Množinou všech řešení nerovnice (1) je interval $X = (3; 4)$.

Jestliže do příkladu vstoupí i základ $a < 1$, je třeba věnovat zvýšenou pozornost uplatnění pravidla 4^0 .

Úloha 2. Řešte nerovnici

$$\frac{1}{\log_a x} > 1, \quad (2)$$

kde $a > 0$, $a \neq 1$.

Řešení. Definiční obor nerovnice dostaneme ze dvou podmínek: $(x > 0) \wedge (\log_a x \neq 0)$. Tato druhá podmínka podle 4^0 , 6^0 znamená $\log_a x \neq \log_a 1$, tedy $x \neq 1$; definičním obor zadané nerovnice je tedy

$$(0; 1) \cup (1; +\infty).$$

Vlastní řešení začneme touto úvahou: v případě, že by $\log_a x < 0$, nedostaneme žádné řešení nerovnice (2), neboť levá strana by byla záporná. Lze tedy předpokládat, že $\log_a x > 0$, což pro $a > 1$ platí na intervalu $(1; +\infty)$ a pro $0 < a < 1$ na intervalu $(0; 1)$. Za těchto podmínek násobíme nerovnici (2) výrazem $\log_a x$ a dostaneme po úpravě užitím 4^0 , 6^0

$$\log_a x < 1 = \log_a a.$$

Pro $a > 1$ odsud máme, že na intervalu $(1; +\infty)$ platí $x < a$, což dává $X = (1; a)$.

Pro $0 < a < 1$ dostáváme na intervalu $(0; 1)$ řešení $x > a$, což dává $X = (a; 1)$.

V dalších úlohách už odkazy na $1^0 - 6^0$ neuvádíme.

Úloha 3. Řešte nerovnici

$$0,01 < (\log_{0,1} x)^2 < 1. \quad (3)$$

Řešení. Definičním oborem této dvojité nerovnice je $(0; +\infty)$. Nerovnici odmocníme a máme

$$0,1 < |\log_{0,1} x| < 1. \quad (3')$$

a) Pro $\log_{0,1} x > 0$, tj. pro $x \in (0; 1)$, dostáváme ze (3') nerovnici

$$0,1 < \log_{0,1} x < 1, \text{ tj.}$$

$$(\log_{0,1} \sqrt[10]{0,1} =) \log_{0,1} 0,1^{0,1} < \log_{0,1} x < \log_{0,1} 0,1$$

z čehož $\sqrt[10]{0,1} > x > 0,1$, takže $x \in (0,1; \sqrt[10]{0,1})$.

b) Pro $\log_{0,1} x < 0$, tj. pro $x \in (1; +\infty)$, dostáváme ze (3') nerovnici

$$0,1 < -\log_{0,1} x < 1, \text{ tj.}$$

$$(\log_{0,1} \sqrt[10]{10} = \log_{0,1} 0,1^{-0,1} =) -0,1 >$$

$$> \log_{0,1} x > -1 (= \log_{0,1} 0,1^{-1} = \log_{0,1} 10).$$

Odsud $\sqrt[10]{10} < x < 10$, $x \in (\sqrt[10]{10}; 10)$.

Množina všech řešení tedy je $X = (0,1; \sqrt[10]{0,1}) \cup (\sqrt[10]{10}; 10)$.

Zvláště zajímavé jsou úlohy, v nichž je neznámá x základem logaritmické funkce.

Úloha 4. Řešte nerovnici

$$\log_x |x^2 - 2| > 1. \quad (4)$$

Řešení. Pro definiční obor nerovnice máme předně $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ vzhledem k tomu, že x je základem logaritmické funkce, a dále $x \neq \sqrt{2}$, takže definičním oborem nerovnice (4) je $(0; 1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Jelikož $1 = \log_x x$, přemění se nerovnice (4) na

$$\log_x |x^2 - 2| > \log_x x. \quad (4')$$

a) Pro $x \in (0; 1)$ odsud plyne

$$|x^2 - 2| < x.$$

Na intervalu $(0; 1)$ nabývá výraz $x^2 - 2$ záporných hodnot, takže máme

$$\begin{aligned} -x^2 + 2 &< x, \text{ tedy} \\ x^2 + x - 2 &> 0. \end{aligned}$$

Kořeny tohoto kvadratického trojčlenu jsou -2 a 1 , takže řešením této nerovnice je interval $(-2; 1)$. Spolu s definičním oborem rovnice (4) a podmínkou $x \in (0; 1)$ tohoto odstavce dostáváme výsledné $x \in (0; 1)$.

b) Příklad, kdy $x \in (1; \sqrt{2})$; nerovnice (4'), vede postupně na nerovnice $|x^2 - 2| > x$, $-x^2 + 2 > x$, a tedy na nerovnici

$$x^2 + x - 2 < 0,$$

jejímž řešením je $(-2, 1)$. Průnik s intervalem $(1; \sqrt{2})$ je však prázdný, takže v $(1; \sqrt{2})$ žádné řešení neexistuje.

c) Pro $x \in (\sqrt{2}; +\infty)$ plyne ze (4') rovněž $|x^2 - 2| > x$, ježto však $x^2 > 2$, máme

$$x^2 - 2 > x, \text{ tedy}$$

$$x^2 - x - 2 > 0.$$

Kořeny tohoto kvadratického trojčlenu jsou -1 a 2 , takže řešením této nerovnice je interval $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. Spolu s definičním oborem rovnice (4) a vstupní podmínkou $x \in (\sqrt{2}; +\infty)$ tohoto odstavce dostáváme výsledek $x \in (2; +\infty)$.

Množinou všech řešení rovnice (4) je tedy $X = (0; 1) \cup (2; +\infty)$.

Obsahuje-li řešení úlohy více podmínek ve tvaru $x \in \dots$, je třeba dávat pozor, kdy při porovnávání podmínek použijeme sjednocení a kdy průnik.

Úloha 5. Řešte nerovnici

$$\frac{1 + (\log_a x)^2}{1 + \log_a x} > 1, \quad (5)$$

kde $a > 0$, $a \neq 1$.

Řešení. Předně $x > 0$ a dále $1 + \log_a x \neq 0$, tj. $\log_a x \neq -1 = \log_a a^{-1}$, takže $x \neq \frac{1}{a}$. Definiční obor nerovnice je tedy $(0; \frac{1}{a}) \cup (\frac{1}{a}; +\infty)$.

Všimněme si, že čitatel je kladný pro všechna $x \neq \frac{1}{a}$, takže nutnou podmínkou pro řešení nerovnice (5) je, aby i jmenovatel byl kladný, tj. $1 + \log_a x > 0$, $\log_a x > -1 = \log_a \frac{1}{a}$. To pro $a > 1$ znamená $x > \frac{1}{a}$, a pro $0 < a < 1$ dostáváme $x < \frac{1}{a}$.

Za těchto podmínek můžeme nerovnici (5) násobit výrazem ve jmenovateli, z čehož

$$1 + (\log_a x)^2 > 1 + \log_a x$$

a po úpravě

$$\log_a x (\log_a x - 1) > 0.$$

Máme dvě možnosti: $(\log_a x > 0) \wedge (\log_a x > 1)$ a $(\log_a x < 0) \wedge (\log_a x < 1)$.

a) Pro $a > 1$ je první možnost $(x > 1) \wedge (x > a)$, tedy $x > a$, a druhá možnost $(0 < x < 1) \wedge (x < a)$, tedy $0 < x < 1$. Průnikem řešení a podmínek je

$$((0; 1) \cup (a; +\infty)) \cap \left(\frac{1}{a}; +\infty\right) = \left(\frac{1}{a}; 1\right) \cup (a; +\infty).$$

b) Pro $0 < a < 1$ je první možnost $(x < 1) \wedge (0 < x < a)$, tedy $x < a$, a druhá možnost $(x > 1) \wedge (x > a)$, tedy $x > 1$. Průnikem řešení a podmínek je

$$((0; a) \cup (1; +\infty)) \cap \left(0; \frac{1}{a}\right) = (0; a) \cup \left(1; \frac{1}{a}\right).$$

Množina všech řešení pro $a > 1$ je $X = \left(\frac{1}{a}; 1\right) \cup (a; +\infty)$, pro $0 < a < 1$ je $X = (0; a) \cup \left(1; \frac{1}{a}\right)$.

V dalším příkladu vzniká zajímavá situace při vyšetřování základů logaritmické funkce (viz 7^o).

Úloha 6. Řešte nerovnici

$$(\log_{0,5} x)^2 - |\log_2 x| < 2. \quad (6)$$

Řešení. Definiční obor nerovnice je $x > 0$.

Jelikož $\log_2 x = -\log_{0,5} x$, lze rovnici (6) upravit na tvar

$$(\log_2 x)^2 - |\log_2 x| < 2 \quad (6')$$

nebo též

$$(\log_{0,5} x)^2 - |\log_{0,5} x| < 2. \quad (6'')$$

Vyberme si první možnost. Použitím substituce $\log_2 x = y$ dostaneme nerovnici

$$y^2 - |y| - 2 < 0$$

a) Necht' $y \geq 0$, tedy $\log_2 x \leq 0$, $x \leq 1$. Nerovnice $y^2 - y - 2 < 0$ s kořeny -1 a 2 , má řešení $-1 < y < 2$, takže

$$\left(\log_2 \frac{1}{2} =\right) -1 < \log_2 x < 2 (= \log_2 4)$$

a z toho $\frac{1}{2} < x < 4$. Jelikož však předpokládáme $x \geq 1$, je výsledek $1 \leq x < 4$.

b) Necht' $y < 0$, tedy $\log_2 x < 0$, $x < 1$. Nerovnice $y^2 + y - 2 < 0$ s kořeny -2 a 1 , má řešení $-2 < y < 1$, takže

$$\left(\log_2 \frac{1}{4} =\right) -2 < \log_2 x < 1 (= \log_2 2)$$

a z toho $\frac{1}{4} < x < 2$. Jelikož však předpokládáme $x < 1$, je výsledek $\frac{1}{4} < x < 1$.

Množina všech řešení nerovnice (6) i (6') je tedy $X = \left(\frac{1}{4}; 4\right)$.

Kdybychom výše zvolili 2. možnost, tj. nerovnici (6), dostali bychom též výsledek.

V následující úloze se uplatní vzorec 8^0 .

Úloha 7. Řešte nerovnici

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x < 11. \quad (7)$$

Řešení. V definičním oboru $x > 0$ dané nerovnice můžeme nerovnici (7) užitím 8^0 postupně upravit takto:

$$\log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x < 11, \quad (7')$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \log_2 x < 11,$$

$$\frac{11}{6} \log_2 x < 11,$$

$$\log_2 x < 6 = \log_2 64,$$

takže $x < 64$.

Pro $0 < x < 1$ je $\log_2 x < 0$, takže nerovnice (7') i (7) jsou splněny. Množina všech řešení je tak $X = (0; 64)$.

V poslední úloze se použije vzorec 9^0 .

Úloha 8. Řešte nerovnici

$$\log_{kx} x + \log_x kx^2 > 0, \quad (8)$$

kde k je libovolná konstanta, pro niž platí $0 < k < 1$.

Řešení. Definiční obor rovnice dostaneme z podmínek $(x > 0) \wedge (x \neq 1)$ (x je základem logaritmu) a $kx \neq 1$, tj. $x \neq \frac{1}{k}$. Celkem tedy $(0; 1) \cup \left(1; \frac{1}{k}\right) \cup \left(\frac{1}{k}; +\infty\right)$.

Pro x z definičního oboru rovnice lze podle 9^0 upravit nerovnici (8) na tvar

$$\frac{\log_x x}{1 + \log_x k} + \log_x kx^2 > 0.$$

Levou stranu nerovnice převedeme na společného jmenovatele a postupně upravíme.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \log_x kx^2 + \log_x k \cdot \log_x kx^2}{1 + \log_x k} &> 0, \\ \frac{1 + \log_x k + 2 + (\log_x k)^2 + 2 \log_x k}{1 + \log_x k} &> 0, \\ \frac{(\log_x k)^2 + 3 \log_x k + 3}{1 + \log_x k} &> 0. \end{aligned} \quad (8')$$

Uvážíme-li substituci $\log_x k = y$, je v čitateli kvadratický trojčlen $y^2 + 3y + 3$, jehož diskriminant je záporný, takže tento trojčlen zachovává při libovolném y své znaménko (po dosazení $y = 0$ vidíme, že hodnota trojčlenu je stále kladná), tedy v nerovnici (8') je čítel trvale kladný. Pro získání řešení této nerovnice tak je nutné a stačí, aby i $1 + \log_x k > 0$, tedy

$$\log_x k > -1 \left(= \log_x \frac{1}{k} \right),$$

z čehož pro $x > 1$ plyne $k > \frac{1}{x}$, takže $x > \frac{1}{k}$; pro $0 < x < 1$ dostaneme $k < \frac{1}{x}$, takže $x < \frac{1}{k}$. Protože však $0 < k < 1$, je $\frac{1}{k} > 1$, zůstává $0 < x < 1$. Množina všech řešení nerovnice (9) je proto $X = (0; 1) \cup (\frac{1}{k}; +\infty)$

Literatura

- [1] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia (Funkce). Prometheus, Praha 1994.
- [2] *Calda, E.*: Úlohy ze středoškolské matematiky (Exponenciální a logaritmické funkce). MFI r. 5 (1995/96), č. 5.
- [3] *Sivašinšij, I. Ch.*: Neravenstva v zadačach. Nauka, Moskva 1967.
- [4] *Fuchs, E. – Kubát, J. a kol.*: Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia. Prometheus, Praha 1997.

Jak maturovali gymnazisté na přelomu 19. a 20. století

JAN ZAHRADNÍK

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

V současné době probíhá v české společnosti diskuse o podobě a významu maturitní zkoušky na středních školách. V mém článku chci ukázat, jak vypadala maturitní zkouška z matematiky na gymnáziu před více než sto lety.

Ve Státním okresním archivu v Českých Budějovicích se nachází soubor dokumentů z historie současného Gymnázia Jana Valeriána Jirsíka, které bylo tímto vlasteneckým českobudějovickým biskupem založeno roku 1868 jako první české gymnázium v Českých Budějovicích. Ve srovnání s dokumentací ostatních českobudějovických středních škol, existujících ve druhé polovině 19. století, se jedná o nejúplnější soubor, obsahující kromě katalogů studentů v jednotlivých ročnících také archiv korespondence a zejména sadu podrobných protokolů o maturitních zkouškách [1], počínající školním rokem 1898–1899 a končící školním rokem 1906–1907,

kteře obsahují mimo jiné také záznamy příkladů zadávaných maturantům při ústní zkoušce z matematiky. V následujících letech se pak charakter záznamů mění. Nenacházíme již podrobná znění příkladů, zadaných při ústní zkoušce a na základě Marchetových zákonů z roku 1908 byla zrušena i povinná písemná zkouška z matematiky.

Z uchovaných protokolů je možné vytvořit poměrně věrný obraz toho, jak vypadala maturitní zkouška abiturienta gymnázia na přelomu 19. a 20. století.

V první řadě se musel vyrovnat s pěti povinnými písemnými maturitními pracemi, a to z matematiky, českého jazyka, překladu z řečtiny do češtiny, překladu z latiny do češtiny, překladu z češtiny do latiny a pokud si vybral jako maturitní předmět němčinu, psal písemnou práci i z ní. Písemné zkoušky se konaly obvykle v první polovině května a jejich témata vytvářeli profesori příslušného gymnázia v několika variantách. Konečný výběr témat provedl zemský školní inspektor, který z navržených variant „rudkou zatřhl“ vybrané téma. To pak bylo po předchozím upozornění na veškeré úřední náležitosti (zejména na zákaz opisování) studentům nadiktováno. V případě matematiky se jednalo o čtyři sady po čtyřech příkladech. Doba na vypracování byla čtyři hodiny.

Například při maturitní zkoušce ve školním roce 1901 – 1902 byly abiturientům při písemné zkoušce z matematiky zadány tyto úlohy:

1. Koncem každého roku po 10 let po sobě jdoucích jest zaplatiti 500 K; dluh tento má se vyrovnati dvěma stejnými splátkami, z nichž prvou jest zaplatiti hned, druhou počátkem šestého roku; jak velké budou tyto splátky při 4% celoročním složeném úrokování?
2. Řešte celistvými a kladnými čísly rovnici:

$$5x - \frac{52 - 11y}{3} = 150.$$

3. Trojúhelník otočí se kol jedné ze svých stran AB . Vypočítí krychlový obsah těla otočením vzniklého, jsou-li dány straně té přilehlé úhly $\alpha = 18^\circ 26' 6''$, $\beta = 120^\circ 57' 50''$ a délka kolmice z protějšího vrcholu na prodlouženou stranu AB spuštěná $p = 5$ cm.
4. Rovnice paraboly jest $y^2 = 16x$; vyhledati rovnici tečné, rovnoběžné s přímkou $y = x - 3$.

Ve školním roce 1903 – 1904 byly v letním období zadány následující úlohy:

1. Mladík jsa tázán, jak je stár, odpověděl: „Letos (1904) je mi právě tolik let, kolik činí ciferný součet roku mého narození.“ Kolik let je mu?
2. Kterou hodnotu má x , je-li

$$x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + 3x^6 + \dots = \frac{5}{3}.$$

3. Koule jest protnuta rovinou. Vzniklý řez jest základnou dvou kůželů do úsečí vepsaných. V kterém poměru dělí se řezem tím poloměr koule, jestliže poměr obsahu koule ku součtu obsahů obou kůželů rovná se $9 : 4$?
4. Přímka otáčí se kolem bodu $A(1, 1)$ a z bodu $B(-5, -7)$ spustíme na ni kolmici. Určete geometrické místo pat těchto kolmic.

Známky z písemných maturitních zkoušek jsou uvedeny v Přehledu výsledků zkoušek maturitních [2] a byl na ně brán ohled při stanovení výsledné známky.

Ústní maturitní zkoušky pak probíhaly podle modelu, který známe i v současné době. V řádném období se zkouška konala na závěr školního roku, tedy v měsíci červnu, případně i v první polovině července. Počty abiturientů, kteří skládali maturitní zkoušku v letních termínech, nezdřídka převyšovaly číslo 40. V dopoledním i odpoledním termínu skládala maturitní zkoušku zpravidla čtveřice studentů a to ze všech předmětů ústní zkoušky. Povinnými předměty byly český jazyk, latina, řečtina a matematika. Jako nepovinný předmět si studenti mohli vybrat druhý zemský jazyk, tedy němčinu, dále se mohli přihlásit ke zkoušce ze soukromé četby z latiny nebo řečtiny. Platilo také, že ti studenti, kteří nesplnili v závěrečném ročníku požadavky z fyziky nebo dějepisu, museli se podrobit ústní zkoušce i z těchto předmětů. Obvykle se jednalo o počty do deseti studentů.

Klasifikace v jednotlivých předmětech maturitní zkoušky se řídila šestimístnou stupnicí (včetně stupně „zcela nedostatečný“), výsledné hodnocení pak znělo tak, že žákovi bylo vydáno „vysvědčení dospělosti ke studování na universitě“ [1], případně „vysvědčení s vyznamenáním“. Neúspěšnému abiturientovi mohlo být povoleno opakování zkoušky.

V archivních záznamech je v protokolech o maturitních zkouškách [1] z matematiky uvedeno celkem 732 příkladů, které byly v uvedených letech

buď zadány u ústní zkoušky (604) nebo připraveny k výběru pro písemnou zkoušku (128). Je to soubor, který umožňuje vytvořit si celkem pravdivý obraz o tom, jakým tématům se matematika na tehdejším gymnáziu věnovala, jak náročné úlohy museli studenti řešit a v neposlední řadě také o tom, jakou známkou byli u maturity klasifikováni. V záznamech se nevyskytuje název maturitní otázky, jako je tomu v současné době, jsou uvedeny pouze příklady, které byly abiturientovi zadány (v počtu od jednoho do čtyř), známka kterou zkoušející navrhl u jednotlivých příkladů a návrh výsledné známky u ústní zkoušky.

V tomto článku předkládám přehled témat, zadávaných u ústní zkoušky a u každého z nich vždy dva zajímavé příklady, ať už jejich zajímavost spočívá v neobvyklé formulaci zadání, pro naši dobu nezvyklé problematice nebo i v náročnosti, vymykající se požadavkům na dnešní maturanty. Úlohy jsem rozdělil do 25 témat, z nichž 24 je nazvaných podle současných zvyklostí, do 25. tématu jsem shrnul netypické úlohy.

U jednotlivých témat uvádím, kolik úloh z celkového souhrnu úloh zadáných při ústní maturitní zkoušce nebo navržených pro písemnou část do něj podle mého názoru náleží a také procentový podíl jednotlivých témat na celkovém počtu úloh. U každého příkladu pak uvádím rok konání ústní maturitní zkoušky, kdy byl zadán, příjmení a jméno abiturienta, který jej řešil, jeho známku z písemné zkoušky z matematiky, obě známky navržené zkoušejícím a výslednou známku z matematiky u maturitní zkoušky. Ta byla stanovena maturitní komisí s přihlédnutím k těmto údajům a také ke známkám v posledním ročníku studia.

1. Rovnice o jedné neznámé (33; 4,51 %)

- Řešte rovnici:
$$\sqrt{\sqrt{x} + 1} - \sqrt{\sqrt{x} - 1} = \frac{2 + 3\sqrt{x}}{2\sqrt{\sqrt{x} + 1}}.$$

(1900, Lissek Josef, 3, 3, 3, výsledek 3)

- Řešte rovnici:
$$\sqrt[3]{x^3 + 3x} + \sqrt{9x^4 + 13} = x + 1.$$

(1903, Princ František, 3, 2, 2 výsledek 3)

2. Diofantovské rovnice (5; 0,68 %)

- Řešte rovnici pro celistvá čísla: $15x + 6y = 21.$

(1900, Kohout František, 4, 4, 3, výsledek 3)

- Řešte celistvými a kladnými čísly rovnici $9x + 11y = 100$.
(1903, Růžička Josef, 3, 1, 1, výsledek 2)

3. Soustavy rovnic (38; 5,19 %)

- Stanovte neznámé: $x^2 + y^2 + x + y = 22$,
 $xy = 4$.
(1899, Vitoušek Jan, 3, 3, 3, výsledek 3)
- Řešte soustavu rovnic: $\frac{3}{4}\sqrt{x-y} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$,
 $\sqrt{x+y} + x + y = 12$.
(1900, Štědrý Karel, 3, 1, 2, výsledek 2)

4. Slovní úlohy (29; 3,96 %)

- Někdo koupil za 30 penězů 30 ptáků jedněch, druhých dva kusy za 1 peníz a třetích jeden za 2 peníze. Kolik kterých dostal?
(1899, Kadlec Jan, 4, 3, 3, výsledek 3)
- Které dvojčíferné číslo, děleno součinem svých číslic dá za podíl 3 a totéž číslo zvětšeno o 36 rovná se číslu s obráceným pořádkem číslic?
(1903, Svoboda Karel, 4, 3, 3, výsledek 4)

5. Úlohy o maximech a minimech (5; 0,68 %)

- Číslo 27 jest rozdělití na dva sčítance té vlastnosti, aby čtyřnásobný čtverec prvního a pětínásobný čtverec druhého byl co možná nejmenší.
(1903, Soukup Josef, 4, 3, 4, výsledek 4)
- Přímka rovna 4 cm má býti rozdělena tak, aby součet čtverců částí jejích byl minimální.
(1900, Kostka Augustin 3, 2, 3, výsledek 4)

6. Reciproké rovnice (15; 2,05 %)

- Řešte rovnici: $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$.
(1899, Svoboda Antonín, 4, 3, 4, výsl. 4)
- Řešte rovnici: $4x^5 - 17x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 17x - 4 = 0$.
(1902, Černý František, 4, 3, 3, výsl. 4)

7. Numerické výpočty (8; 1,09 %)

- Určiti hodnotu výrazu: $x = \frac{3 \cdot \sqrt[9]{5,4968}}{\sqrt[3]{2^5}}$.

(1904, Parkos Jan, 3, 4, 4, výsledek 4)

- Logarithmovati výraz $x = \sqrt[3]{\frac{572 \cdot 324^2}{2 \cdot \sqrt{59}}}$.

(1905, Majer Jan, 4, 4, 4-, výsledek 5)

8. Úpravy výrazů (9; 1,23 %)

- Zjednodušiti: $\left(1 - \frac{1 - \frac{b}{a-b}}{1 - \frac{a}{a+b}}\right) \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{b - a}$.

(1906, Danko František, 3, 5, 4, výsledek 5)

- Zlomek $\frac{7n + 7}{6n^2 + n + 6}$ rozdělit ve dva zlomky s lineárními jmenovateli.

(1904, Špatný Josef, 2, 1, 1, výsledek 2)

9. Exponenciální a logaritmické rovnice (40; 5,47 %)

- Řešte rovnici: $x^y = y^x$, $x = a \cdot y$.

(1899, Tuháček Antonín, 1, 1, 1, výsledek 1)

- Řešte soustavu: $5^x \cdot 8^x = 215000$,
 $x + y = 7$.

(1903, Petr Jan, 4, 4, 4, výsledek 5)

10. Goniometrie (60; 8,20 %)

- Řešte trojúhelník: $a + b + c = 48$ cm, $\alpha = 34^\circ 19'$, $\beta = 75^\circ 57'$.

(1903, Kukrál František, 2, 2, 2, výsledek 2)

- Je dán úhel $\gamma = 84^\circ 28'$, součet dvou stran $a + b = 12$, rozdíl úhlů $\alpha - \beta = 10^\circ 26'$. Řešiti trojúhelník.

(1900, Bečvář František, 2, 2, 2, výsledek 2)

11. Trigonometrie (56; 7,65 %)

- Který den vychází v Petrohradě slunce ve 3 hodiny ráno?

(1899, Pátek Jan, 2, 1, 1, výsledek 1)

- Z lodi plující k severu je viděti na západě dva majáky v jedné přímce; po jedné hodině je viděti jeden maják na jihozápadě, druhý na jihojihozápadě. Mnoho-li ujede loď za tu hodinu?

(1904, Melmer Václav, 3, 1, 1, výsledek 3)

12. Goniometrické rovnice (25; 3,42 %)

- Řešte rovnici: $\sin x + 2 \cos x - \sin 2x = 1$.

(1901, Říha Jiří, 1, 3, 3, výsledek 2)

- Řešte rovnici: $\sin 5x = \cos 3x$.

(1905, Košta Karel, 3, 4, 4, výsledek 3)

13. Konstrukce algebraických výrazů (8; 1,09 %)

- Je dáno: $\sin x = \frac{ab \cdot \operatorname{tg} \varphi}{a^2 - b^2}$; sestrojte úhel x .

(1901, Vondrášek Stanislav, 4, 3, 3, výsledek 3)

- Konstruuje: $x = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - \frac{b^2}{\operatorname{tg}^2 \beta}}$.

(1905, Dvořák František, 4, 2, 2, výsledek 3)

14. Povrchy a objemy těles (88; 12,02 %)

- Koule z dubového dřeva, $s = 0,86$, o průměru $d = 9,8$ cm jest osoustružena tak, že její povrch se zmenší o $\frac{1}{4}$. Jak bude těžká?

(1900, Štědrý Karel, 3, 1, 2, výsledek 2)

- Jak vysoko se musíme vznést v balonu, abychom přehlédli celé Čechy ($r = 169$ m, $R = 6309$ km – poloměr Země).

(1901, Zadražil Jiří, 3, 5, 4, výsledek 3)

15. Analytická geometrie lineárních útvarů (41; 5,60 %)

- Určete rovnici přímky jdoucí bodem $(-4, -1)$ a průsekem přímek

$$3x - 7y = 5 \quad \text{a} \quad 2x + 8y + 9 = 0.$$

(1899, Sekyra Karel, 2, 3, 3, výsledek 3)

- Trojúhelník dán přímkami $3x + 2y = 5$, $x - 5y = 2$, $y - 3x = 1$. Stanoviti jeho plochu.

(1901, Vozábal František, 4, 3, 3, výsledek 3)

16. Analytická geometrie kvadratických útvarů (129; 17,62 %)

- Pól poláry kruhu je na přímce a vzdálenost jeho od poláry jest $d = 24$. Stanovte pól a poláru (její rovnici).

(1899, Slabý Emanuel, 3, 1, 1, výsledek 2)

- Z bodu $(-2, 0)$ vedeme k parabole $y^2 = 8x$ tečny; určiti rovnici tečen a plochu trojúhelníka omezeného tětvou a tečnami.

(1904, Mišák Jan, 3, 3, 4, výsledek 4)

17. Aritmetické posloupnosti (23; 3,14 %)

- Je dána řada aritmetická 18ti členná, součet 9tého a 10tého činí $5\frac{1}{2}$, součin 1 ho a posledního $5\frac{1}{2}$. Určete tuto řadu.

(1900, Stejskal František, 4, 4, 4, výsledek 4)

- Pocestný ušel 64 km a to posledního dne 9 km; každý následující o $\frac{2}{3}$ km více než předcházející. Kolik ušel denně a kolik dní byl na cestě?

(1902, Prokop Tomáš, 3, 4, 4, výsledek 4)

18. Geometrické posloupnosti (14; 1,91 %)

- Pátý člen řady geometrické rovná se podílu druhého a třetího a činí $1\frac{1}{9}$; která je to řada.

(1902, Holický Karel, 2, 1, 1, výsledek 2)

- Kolik členů geometrické řady 2, 6, 18, ... dává součet 728?

(1904, Táborský Svatopluk, 4, 4, 4, výsledek 4)

19. Finanční matematika (51; 6,97 %)

- V kolika letech umoří se dluh 2 000 000 K při 3 %, splácí-li se ročně předem 100 000 K?

(1900, Kott František, 2, 3, 2, výsledek 2)

- Kolik musíme ukládati měsíčně do spořitelny, abychom za 10 let uspořili 2500 K při 3,6 % složeném celoročním úrokování.

(1905, Bláha Josef, 3, 3, 4, výsledek 4)

20. Nekonečné řady (11; 1,50 %)

- Rovnice dána $1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{6}{5+x}$.

(1903, Nováček František, 4, 3, 3, výsledek 4)

- Do čtverce je vepsán jiný menší, do tohoto opět jiný atd. Určiti součet jejich ploch.

(1906, Gregora Václav, 2, 1, 2, výsledek 2)

21. Kombinatorika (7; 0,96 %)

- 24 žáků jest posadit do 6 lavic po 4; kolikerym způsobem se to dá provésti?

(1899, Slabý Emanuel, 3, 2, 1, výsledek 2)

- Kolik přestav lze učiniti z prvků a, a, b, b, b, c?

(1905, Podhorský František, 4, 1, 1, výsledek 2)

22. Kombinační čísla (7; 0,96 %)

- Řešte rovnici: $\binom{x}{1} - 2\binom{x}{2} = \binom{x}{3}$.

(1901, Vaněk Jan, 3, 4, 4, výsledek 4)

- Řešte rovnici: $\binom{x}{x-2} - \binom{x}{x-1} = 2$.

(1905, Stibral Vlastimil, 3, 3, 3, výsledek 3)

23. Binomická věta (11; 1,50 %)

- Které x činí ve výrazu čtvrtý člen rovný -1 .

(1902, Novotný František, 2, 2, 2, výsledek 2)

- Rozvésti $(1+i)^{10}$

(1904, Macháček Jan, 3, 3, 4, výsledek 4)

24. Komplexní čísla (12; 1,64 %)

- Věta Moivreova. Ustanoviti dle ní $\sqrt[6]{i}$.

(1900, Rašek Leopold, 4, 2, 3, výsledek 3)

- Dány zlomky $\frac{1}{1-i}$, $\frac{1}{1+i}$; provésti úkony početní a ustanoviti, kdy výsledek je imaginární a kdy reálný.

(1904, Mišák Jan, 3, 4, 4, výsledek 4)

25. Netypické úlohy (7; 0,96 %)

- Pravděpodobnost nějakého pokusu je $7/8$, která jest pravděpodobnost toho, že se pokus aspoň 4krát zdaří, když jej 7krát opakujeme.

(1899, Pátek Jan, 2, 1, 1, výsledek 1)

- Stanovte neznámé x, y :

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ y+2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & 3 & 1 \\ y+3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

(1900, Hájek Emanuel, 1, 1, 1, výsledek 1)

Z uvedeného souboru příkladů je vidět, že některá témata, typická pro současnou středoškolskou matematiku (například základy teorie množin, nerovnice, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou, nauka o funkcích, řešení konstrukčních úloh, shodnost a podobnost v geometrii, analytická geometrie v prostoru) v té době u maturity explicitně zkoušena nebyla.

Ukazuje se ale, že některým studentům, u kterých zkoušející pan profesor očekával vynikající výkon, byly zadány netypické a i na dnešní dobu poměrně náročné úlohy, například z pravděpodobnosti, lineární algebry (uvedené netypické úlohy), integrálního počtu, limit posloupností, ale také třeba nauky o řetězových zlomcích, což naznačuje, že se s těmito tématy během výuky studenti museli setkat.

Převažují však úlohy, které umožnily abiturientům ukázat nejen znalost příslušných postupů, ale také schopnost logicky myslet a kombinovat (analytická geometrie, úlohy o površích a objemech těles, goniometrie, trigonometrie nebo úlohy z finanční matematiky).

Závěrem konstatuji, že prapradědové současných maturantů se museli při studiu na gymnáziu na začátku dvacátého století vyrovnat nejen s latinou a řečtinou, češtinou, němčinou, dějepisem, zeměpisem nebo fyzikou, ale také s velmi náročnou matematikou. Náročnost maturitní zkoušky a také velmi přísná klasifikace maturantů byla na přelomu 19. a 20. století předmětem diskusí nejen odborných, ale také rodičovských. Jejich výsledek – Marchetovy reformy z roku 1908 – přinesly mimo jiné zrušení povinné písemné maturitní zkoušky z matematiky.

O více než sto let později se opět diskutuje o stupni náročnosti maturitní zkoušky a o místě matematiky v ní. Státní maturita by opět měla být vysvědčením „dospělosti k návštěvě univerzitní“, řečeno slovy začátku dvacátého století. To ale podle mého názoru není možné bez matematiky. Proto si dovoluji připojit se k těm, kteří volají po zařazení matematiky jako povinného předmětu státní maturitní zkoušky i na začátku století jednadvacátého.

L i t e r a t u r a

- [1] Státní okresní archiv České Budějovice: Jirsíkovo státní gymnasium, Maturitní protokoly, inv. č. 1200, signatura II/b/IV – 42, 1894 – 1906, karton č. 60, 61.
- [2] Státní okresní archiv České Budějovice: Jirsíkovo státní gymnasium, Výkaz o zkouškách maturitních 1899, Přehled výsledků zkoušek maturitních 1900 – 1906, inv. č. 1021 – 1028, signatura I/c – 1013 – 1020, kniha č. 1021 – 1028.
- [3] *Morkes, F.*: Historický přehled postavení maturitní zkoušky a analýza jejích funkcí, ÚIV – CERMAT, Praha 2003.
- [4] *Řezníčková, K.*: Študáci a kantoři za starého Rakouska, české střední školy v letech 1867 – 1918, Libri, Praha 2007.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 167 a 168, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (19.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 167

V rovině jsou dány úsečky AB a CD . Najděte všechny body V této roviny, pro které mají trojúhelníky ABV a CDV stejný obsah.

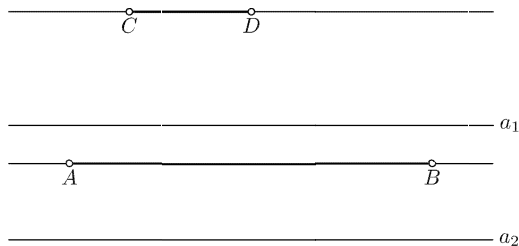
Šárka Gergelitsová

Řešení. Označme a a c délky úseček AB a CD a dále b a d po řadě vzdálenosti bodu V od přímk AB a CD . Obsah trojúhelníku ABV pak je $\frac{1}{2}ab$ a obsah trojúhelníku CDV je $\frac{1}{2}cd$.

Nejprve uvažujme případ, kdy jsou přímky AB a CD totožné. Pokud jsou délky úseček AB a CD shodné, má požadovanou vlastnost každý bod V roviny, který neleží na přímce AB , jinak žádný bod požadované vlastnosti neexistuje.

Dále uvažujme případ, kdy jsou přímky AB a CD rovnoběžné a předpokládejme, že úsečky AB a CD mají stejné délky, tj. $a = c$. Z rovnosti obsahů trojúhelníků ABV a CDV plyne $b = d$, tedy bod V má stejnou vzdálenost od přímek AB a CD a proto leží na ose rovnoběžek AB a CD . Naopak je vidět, pro každý bod osy rovnoběžek AB a CD platí, že obsahy trojúhelníků ABV a CDV jsou shodné.

Nyní uvažujme případ, kdy jsou přímky AB a CD rovnoběžné a mají různou délku. Z rovnosti obsahů trojúhelníků ABV a CDV plyne $\frac{b}{d} = \frac{c}{a} \neq 1$, tedy bod V má daný poměr vzdáleností od dvou rovnoběžek AB a CD . Množinou všech takových bodů je dvojice rovnoběžných přímek a_1 , a_2 s rovnoběžkami AB a CD . Opět vidíme, že každý bod V ležící na každé z těchto přímek má požadovanou vlastnost.

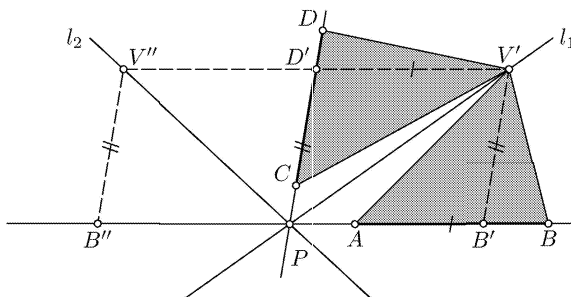


Nakonec uvažujme případ, kdy jsou přímky AB a CD různoběžné. Označme S jejich průsečík. Z rovnosti obsahů trojúhelníků ABV a CDV plyne $\frac{b}{d} = \frac{c}{a}$. Přímky AB a CD rozdělí rovinu na čtyři konvexní úhly s vrcholy v bodě S . Necht' bod V leží v jednom z těchto úhlů, jeho velikost označme ω . Polopřímka s počátkem ve vrcholu tohoto úhlu procházející bodem V rozdělí tento úhel na dva úhly, označme φ velikost toho, na jehož rameni leží přímka CD . Potom $b = |AV| \sin(\omega - \varphi)$, $d = |AV| \sin \varphi$ a platí

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{d} = \frac{|AV| \sin(\omega - \varphi)}{|AV| \sin \varphi} = \sin \omega \cot \varphi - \cos \omega.$$

Protože poměr délek úseček AB a CD je konstantní, musí být konstantní i $\cot \varphi$. Odtud již plyne, že všechny body V , pro které mají trojúhelníky ABV a CDV stejný obsah leží na dvou přímkách, které svírají

s přímkami AB a CD úhly dané velikosti (s výjimkou průsečíku těchto přímek) a procházejí jejich průsečíkem P . K sestrojení těchto přímek využijeme skutečnost, že úhlopříčka rovnoběžníku dělí tento rovnoběžník na dva trojúhelníky shodného obsahu. Sestrojíme rovnoběžník, jehož sousední strany leží na přímkách AB a CD a mají délky shodné s délkami úseček AB a CD .



Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Vladimír Pavel* z Blovic a *Jiří Steckbauer* z Květné.

Úloha 168

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $\sqrt{3n-1} + \sqrt{4n-1}$ iracionální.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Nejprve ukážeme, že druhá odmocnina nezáporného celého čísla je racionální (a dokonce celá), právě když toto číslo je druhou mocninou celého čísla. Předpokládejme, že nezáporné celé číslo m není druhou mocninou celého čísla. Potom v prvočíselném rozkladu čísla m existuje prvočíslo p , které je v liché mocnině. Předpokládejme, že $\sqrt{m}$ je racionální číslo a dá se zapsat ve tvaru r/s , kde r a s jsou nesoudělná přirozená čísla. Z rovnosti $\sqrt{m} = r/s$ plyne po úpravě $s^2m = r^2$. Protože p dělí m , musí prvočíslo p dělit r^2 , tedy r . V prvočíselném rozkladu r^2 je prvočíslo p v sudé mocnině, v prvočíselném rozkladu m v liché, proto p dělí také s , což je spor s tím, že r a s jsou nesoudělná čísla.

Předpokládejme, že existuje přirozené číslo n takové, že $\sqrt{3n-1} + \sqrt{4n-1}$ je rovno (kladnému) racionálnímu číslu a . Platí $\sqrt{4n-1} =$

$= a - \sqrt{3n - 1}$. Po umocnění na druhou a úpravě dostaneme

$$\sqrt{(3n - 1)} = \frac{a^2 - n}{2a}.$$

Odtud vidíme, že číslo $\sqrt{(3n - 1)}$ je také racionální, podle tvrzení dokázaného výše tedy číslo $(3n - 1)$ je druhou mocninou celého čísla. Ovšem druhé mocniny celých čísel mají při dělení třemi zbytky 0 a 1, číslo $3n - 1$ má při dělení třemi zbytek 2, což je spor s předpokladem, že a je racionální

Poznámka. Řešitelé, kteří nepodali úplné řešení, si většinou neuvědomili, že součet dvou iracionálních čísel může být racionální. Např. čísla $\sqrt{2}$ a $2 - \sqrt{2}$ jsou iracionální, jejich součet je ale číslo přirozené, tedy racionální.

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Jakub Solovský* z GMK v Bílovci,

Neúplné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *František Jáchim* z Volyně a *Josef Malík* z GMK v Bílovci.

Pavel Calábek

(*Dokončení ze str. 128*)

Na obdobném principu funguje například také hromadné zobrazování prezentací ve všech běžně podporovaných formátech (PPT, PPTX, ODP, JPG, PDF, PNG, GIF). Fakt, že studenti budou prezentaci věnovat pozornost, pak „zajišťuje“ současné uzamknutí jejich klávesnic i myši. Učitel může také stejným způsobem pustit videokázku či předem připravenou instruktáž či hromadně spustit libovolný program nebo konkrétní webovou stránku.

Další funkci, kterou pedagogové v učebnách vybavených PC Controlem hojně využívají, je možnost vytvořit a žákům odeslat test. S pomocí externího programu na tvorbu testů jej totiž může připravit nejen v „učitelském“ počítači v učebně, ale kde-

koliv jinde. Do testu může libovolně vkládat například obrázky, schémata a nastavit libovolný počet možných odpovědí. Jedním kliknutím myši pak test zobrazí na monitorech všech počítačů, studenti jej vyplní a odešlou zpět. Program pak na základě zadaných správných odpovědí test automaticky vyhodnotí a během chvíle tak učitel získá výsledky a studentům rozešle známky.

Program si můžete vyzkoušet. Na stránkách www.pc-control.cz naleznete ke stažení časově omezenou verzi programu. Tato trial verze obsahuje všechny funkce ZLATÉ edice programu PC Control a máte možnost ji využívat po 30 dní zdarma.

Libor Kubes
kubes@16up.cz