

MATEMATIKA

Užitečná podoba Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti

JAROMÍR ŠIMŠA

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Čtenáři je patrně nerovnost z názvu článku dobře známa: Pro libovolné dvě n -tice reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ a $y_1, y_2, \dots, y_n$ platí

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2), \quad (1)$$

přičemž rovnost nastane, právě když buď jsou všechna čísla x_k nulová, nebo platí rovnosti $y_k = t x_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) pro vhodné reálné číslo t . Cauchyho-Schwarzova¹ nerovnost (1) a její zobecnění pro nekonečné řady a integrály hrají významnou roli v mnoha odvětvích matematiky. Přesvědčivě to dokládá nedávno vyšlá kniha [4] určená širokému okruhu čtenářů se zájmem o sjednocující a přehledný pohled na v současnosti rozrůzněné matematické disciplíny a jejich historický vývoj. Právě takovému posouzení Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti je kniha [4] věnována.

V elementární matematice nalézá nerovnost (1) uplatnění jak v geometrii, tak i algebře. V prvním případě jde o vyjádření základní nerovnosti pro skalární součin dvou vektorů eukleidovského prostoru (obecné dimenze n), v druhém případě o prostředek efektivního dokazování nejrůznějších algebraických nerovností, kterému se budeme věnovat právě v tomto článku. Četné příklady na toto téma lze nalézt i v dostupných českých publikacích [2], [3] a [5]. Přesto se v posledních letech v textech různých matematických

¹Někdy se nerovnosti říká Cauchyho-Bunjakovského nebo jen Cauchyho či Schwarzova. V textech různé národní provenience bychom asi našli pojmenování nerovnosti příslušné každé neprázdné podmnožině $X \subset \{\text{Cauchy, Schwarz, Bunjakovskij}\}$.

soutěží i jiné literatuře objevily další ukázky algebraického uplatnění nerovnosti (1), s nimiž se nyní zčásti seznámíme. Jejich prezentace bude o to zajímavější, že všechny důkazy bude spojovat společný metodický obrat, totiž užití nerovnosti (1) v jedné speciální podobě², níže vyjádřené vzorcem (3). Čtenáři, kteří se chtějí v dokazování algebraických nerovností zdokonalit, jistě tuto (pro mnohé novou) zkušenost ocení, neboť u obtížnějších úloh je často nesnadné objevit, že je vůbec možné Cauchyho-Schwarzovu nerovnost uplatnit. Příčina spočívá v tom, že vhodné složky x_k, y_k příslušné nerovnosti (1) mají (v proměnných té nerovnosti, kterou chceme dokázat) poměrně složitá vyjádření zapsaná obvykle lomenými výrazy s odmocninami.

Znáмым (pro své četné aplikace) je zvláštní případ Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti, který dostaneme, když v (1) položíme $x_k = 1$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$ (a pro účely dalšího výkladu zaměníme označení y_k za u_k): Libovolná n -tice reálných čísel $u_1, u_2, \dots, u_n$ splňuje nerovnost³

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2 \leq n(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2), \quad (2)$$

přičemž rovnost nastane jedině v případě $u_1 = u_2 = \dots = u_n$. I když je to dobře patrné, zdůrazněme, že k nerovnosti (2) se obracíme, kdykoliv chceme vyjádřit nerovnostní vztah mezi součtem několika reálných čísel a součtem jejich druhých mocnin. Jsou však situace (kterými se budeme zabývat právě v tomto článku), kdy v jednom nebo obou zmíněných součtech jsou sčítanci opatřeny určitými váhovými koeficienty p_k , resp. q_k . Pro takto upravené součty v úplné obecnosti platí nerovnost

$$\begin{aligned} & (p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n)^2 \leq \\ & \leq \left(\frac{p_1^2}{q_1} + \frac{p_2^2}{q_2} + \dots + \frac{p_n^2}{q_n} \right) (q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2 + \dots + q_n u_n^2). \end{aligned}$$

Dostaneme ji, když do (1) dosadíme $x_k = p_k / \sqrt{q_k}$ a $y_k = u_k \sqrt{q_k}$ (předpokládáme přitom, že $q_k > 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$). Takto obecně pojatou nerovnost, kterou ilustrujeme příkladem bez komentáře

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \right)^2 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6} \quad \text{platí pro všechna } x, y, z \in \mathbb{R},$$

²V literatuře se pro ni ojediněle užívá název *Engelova forma* Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti, a to podle jména autora knihy [1], v níž je tato forma zapsána při odvození tzv. Carlsonovy nerovnosti, kterou uvedeme v závěru řešení příkladu 1.

³Právě jí se často říká Cauchyho nerovnost. Příklady jejího uplatnění jsou popsány ve všech zdrojích uvedených v závěrečném seznamu literatury.

však v důkazech dále uvedených nerovností potřebovat nebudeme. Vystačíme totiž s případem, kdy se všechny koeficienty p_k rovnají 1. Kromě toho bude kvůli odkazům výhodné zaměnit kladné koeficienty q_k převrácenými čísly $1/q_k$. Naše podoba Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti tak bude tvaru

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2 \leq (q_1 + q_2 + \dots + q_n) \left(\frac{u_1^2}{q_1} + \frac{u_2^2}{q_2} + \dots + \frac{u_n^2}{q_n} \right). \quad (3)$$

Podejme nyní přímý důkaz nerovnosti (3) pro libovolné n -tice reálných čísel $u_1, u_2, \dots, u_n$ a kladných koeficientů $q_1, q_2, \dots, q_n$, jednak proto, že jsme důkaz obecnější nerovnosti (1) v tomto článku neuvedli, jednak proto, abychom tím popsali zajímavý induktivní postup, který lépe osvětluje vnitřní strukturu nerovnosti (3). Ta je pro $n = 1$ triviální rovnost, pro $n = 2$ ji dokážeme tak, že po roznásobení obou součinů od nich odečteme $u_1^2 + u_2^2$ a pak je ještě vynásobíme (kladným) součinem $q_1 q_2$. Dostaneme

$$2q_1 q_2 u_1 u_2 \leq q_2^2 u_1^2 + q_1^2 u_2^2 \quad \text{neboli} \quad 0 \leq (q_2 u_1 - q_1 u_2)^2,$$

takže (3) pro $n = 2$ platí. Pro druhý indukční krok je výhodné nerovnost (3) přepsat do dobře zapamatovatelného tvaru

$$\frac{u_1^2}{q_1} + \frac{u_2^2}{q_2} + \dots + \frac{u_n^2}{q_n} \geq \frac{(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2}{q_1 + q_2 + \dots + q_n}$$

a pak tuto „novou“ nerovnost pro $n = k + 1$ získat ze stejné nerovnosti pro $n = k$ s následným využitím již dokázané nerovnosti pro $n = 2$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_1^2}{q_1} + \frac{u_2^2}{q_2} + \dots + \frac{u_k^2}{q_k} \right) + \frac{u_{k+1}^2}{q_{k+1}} &\geq \frac{(u_1 + u_2 + \dots + u_k)^2}{q_1 + q_2 + \dots + q_k} + \frac{u_{k+1}^2}{q_{k+1}} \geq \\ &\geq \frac{((u_1 + u_2 + \dots + u_k) + u_{k+1})^2}{(q_1 + q_2 + \dots + q_k) + q_{k+1}}. \end{aligned}$$

Tím je celý důkaz hotov. Z uvedeného postupu snadno plyne (ověřte), že rovnost v dokázané rovnosti (3) nastane, právě když platí n rovností $u_k = t q_k$ pro vhodné $t \in \mathbb{R}$ a každé $k = 1, 2, \dots, n$.

Nyní již přistoupíme k jednotlivým ukázkám aplikací nerovnosti (3), často v obecnějším podání, než v jakém byly uvedeny ve zdrojové literatuře (proto na ni neuvádíme odkazy).

Příklad 1

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnosti

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &\leq 2x_1^2 + 4x_2^2 + \dots + 2^n x_n^2, \\ (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &\leq 2x_1^2 + 6x_2^2 + \dots + (n^2 + n)x_n^2,\end{aligned}$$

přičemž rovnosti nastanou, jedině když $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Řešení. Podle nerovnosti (3) s čísly $u_k = x_k$ a koeficienty $q_k = 1/2^k$ dostáváme

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) (2x_1^2 + 4x_2^2 + \dots + 2^n x_n^2) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (2x_1^2 + 4x_2^2 + \dots + 2^n x_n^2).\end{aligned}$$

Protože první činitel v posledním výrazu je menší než 1, je první zadaná nerovnost dokázána. Rovnost v ní nastane, jen když je druhý činitel v posledním výrazu nulový. V takové případě zřejmě musí platit $x_k = 0$ pro každé k . Podobně tvrzení o druhé zadané nerovnosti dokážeme, když místo koeficientů $q_k = 1/2^k$ vezmeme $q_k = 1/(k^2 + k)$, neboť pro ně platí

$$\begin{aligned}q_1 + q_2 + \dots + q_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} < 1.\end{aligned}$$

Dodejme ještě, že volbou jiných koeficientů $q_k = 1/k^2$ dostaneme po limitním přechodu $n \rightarrow \infty$ tzv. Carlsonovu nerovnost

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)^2 \leq \frac{\pi^2}{6} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2.$$

Příklad 2

Pro libovolnou permutaci $b_1, b_2, \dots, b_n$ dané n -tice kladných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ dokažte nerovnost

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{2a_1^2}{b_1 + b_2} + \frac{2a_2^2}{b_2 + b_3} + \dots + \frac{2a_n^2}{b_n + b_1}.$$

Řešení. Nerovnost

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq \\ & \leq 2(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \left(\frac{a_1^2}{b_1 + b_2} + \frac{a_2^2}{b_2 + b_3} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n + b_1} \right) \end{aligned}$$

obdržíme, když v (3) položíme $u_k = a_k$ a $q_k = b_k + b_{k+1}$ (kde $b_{n+1} = b_1$). Protože oba součty $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ a $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ jsou rovny témuž kladnému číslu, po vydělení vypsané nerovnosti tímto číslem dostaneme nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Příklad 2.1

Nechť pro kladná čísla a, b, c platí $abc = 1$. Dokažte nerovnost

$$ab + ac + bc \leq \frac{2}{a^3(b+c)} + \frac{2}{b^3(a+c)} + \frac{2}{c^3(a+b)}.$$

Řešení. Díky podmínce $abc = 1$ můžeme zadanou nerovnost zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \leq \frac{2 \left(\frac{1}{a} \right)^2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{2 \left(\frac{1}{b} \right)^2}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} + \frac{2 \left(\frac{1}{c} \right)^2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

To je však dříve dokázaná nerovnost z příkladu 2 pro $n = 3$ s pořadím $(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a})$ trojice čísel $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$.

Příklad 3

Nechť nezáporná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, kde $n \geq 2$, splňují podmínku

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} = n-1.$$

Dokažte nerovnost

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{n+a_1+a_2+\dots+a_n}.$$

Řešení. Zapišeme nerovnost (3) s čísly $u_k = \sqrt{a_k}$ a $q_k = 1 + a_k$ a rovnou upravíme její pravou stranu s ohledem na zadanou podmínku:

$$(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n})^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 + a_1 + 1 + a_2 + \dots + 1 + a_n) \left(\frac{(\sqrt{a_1})^2}{1 + a_1} + \frac{(\sqrt{a_2})^2}{1 + a_2} + \dots + \frac{(\sqrt{a_n})^2}{1 + a_n} \right) = \\
&= (n + a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(1 - \frac{1}{1 + a_1} + 1 - \frac{1}{1 + a_2} + \dots + 1 - \frac{1}{1 + a_n} \right) = \\
&= (n + a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(n - \frac{1}{1 + a_1} - \frac{1}{1 + a_2} - \dots - \frac{1}{1 + a_n} \right) = \\
&= (n + a_1 + a_2 + \dots + a_n) (n - (n - 1)) = n + a_1 + a_2 + \dots + a_n.
\end{aligned}$$

Odtud po odmocnění obou krajních výrazů dostaneme potřebné.

Příklad 4

Pro libovolnou permutaci $b_1, b_2, \dots, b_n$ dané n -tice kladných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ dokažte nerovnost

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \leq \frac{a_1^3}{b_1^2} + \frac{a_2^3}{b_2^2} + \dots + \frac{a_n^3}{b_n^2}.$$

Řešení. Zapišeme nerovnost (3) s čísly $u_k = a_k^2/b_k$ a koeficienty $q_k = a_k$. S ohledem na odtud plynoucí rovnosti $u_k^2/q_k = a_k^3/b_k^2$ obdržíme

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \right)^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{a_1^3}{b_1^2} + \frac{a_2^3}{b_2^2} + \dots + \frac{a_n^3}{b_n^2} \right).$$

Nerovnost ze zadání tak bude dokázána, když ukážeme, že platí

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n}. \quad (4)$$

To už je jednoduchá permutační nerovnost: hodnota součtu

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n}$$

s danou n -ticí (a_k) je nejmenší pro tu permutaci (b_k) , která je tvořena čísly $b_k = 1/a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Nerovnost (4) však můžeme rovněž zdůvodnit

pomocí další nerovnosti (3), tentokrát s čísly $u_k = a_k$ a koeficienty $q_k = b_k$, jež bude mít tvar

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq (b_1 + b_2 + \dots + b_n) \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \right).$$

Odtud po vydělení číslem $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ rovným číslu $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ skutečně vyplývá nerovnost (4).

Příklad 5

Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c, r, s platí nerovnost

$$\frac{a}{rb + sc} + \frac{b}{rc + sa} + \frac{c}{ra + sb} \geq \frac{3}{r + s},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $a = b = c$.

Řešení. Abychom i tentokrát mohli uplatnit nerovnost (3), rozšíříme zlomky v levé straně L dokazované nerovnosti po řadě čísla a, b, c . Získáme tak vyjádření

$$L = \frac{a^2}{rab + sac} + \frac{b^2}{rbc + sba} + \frac{c^2}{rca + scb}.$$

Dříve než vypíšeme nerovnost (3) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c$ a koeficienty $q_1 = rab + sac, q_2 = rbc + sba, q_3 = rca + scb$, všimněme si, že pro takto vybrané koeficienty q_k platí

$$q_1 + q_2 + q_3 = rab + sac + rbc + sba + rca + scb = (r + s)(ab + bc + ca).$$

Proto má dotyčná nerovnost (3) tvar

$$(a + b + c)^2 \leq (r + s)(ab + bc + ca) \cdot L,$$

tudíž dokazovaný vztah $L \geq 3/(r + s)$ platí, je-li splněna podmínka

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2.$$

Ověřit poslední (poměrně známou) obecně platnou nerovnost je snadné: pro dvojnásobek rozdílu pravé a levé strany totiž platí

$$2(a + b + c)^2 - 6(ab + bc + ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Tím je důkaz původní nerovnosti hotov. Aby v ní nastala rovnost, musí být podle poslední nerovnosti všechna tři čísla $a - b$, $b - c$ a $c - a$ rovna nule, tj. musí platit $a = b = c$ (pak skutečně rovnost v původní rovnosti nastane, jak se snadno přesvědčíme dosazením).

Dodejme, že speciálním případem právě dokázané nerovnosti, a sice pro koeficienty $r = s = 1$, je populární tzv. Nesbittova nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

kteřá se objevila například v 1. kole kategorie B prvního ročníku československé MO ve školním roce 1951/1952. Dostaneme ji také volbou $x = y = z = 1$ v následujícím zajímavém zobecnění.

Příklad 5.1

Pro libovolná kladná čísla a, b, c a reálná čísla x, y, z dokažte nerovnost

$$\frac{ax^2}{b+c} + \frac{by^2}{c+a} + \frac{cz^2}{a+b} \geq xy + yz + zx - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

Pro která x, y, z (závislá na a, b, c) nastane rovnost?

Řešení. Sečteme-li dokazovanou nerovnost s obecně platnou rovností

$$\frac{(b+c)x^2}{b+c} + \frac{(c+a)y^2}{c+a} + \frac{(a+b)z^2}{a+b} = x^2 + y^2 + z^2,$$

dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\begin{aligned} (a+b+c) \left(\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} \right) &\geq \\ &\geq xy + yz + zx + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = \frac{(x+y+z)^2}{2}. \end{aligned}$$

To je však (vydělená číslem 2) nerovnost (3) pro $n = 3$ s čísla $u_1 = x$, $u_2 = y$, $u_3 = z$ a koeficienty $q_1 = b+c$, $q_2 = c+a$, $q_3 = a+b$, neboť platí $q_1 + q_2 + q_3 = 2(a+b+c)$. Rovnost v uplatněné nerovnosti nastane, právě když pro vhodné reálné číslo t bude platit

$$x = t(b+c), \quad y = t(c+a) \quad \text{a} \quad z = t(a+b).$$

Příklad 5.2

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y, z větší než -1 platí nerovnost

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2,$$

přičemž rovnost nastane, právě když $x = y = z = 1$.

Řešení. Protože čísla $1+y, 1+z, 1+x$ jsou dle zadání kladná, mají zlomky v levé straně nerovnosti kladné jmenovatele. Pro první zlomek – díky nerovnosti $(1-y)^2 \geq 0$, z níž plyne $y \leq \frac{1}{2}(1+y^2)$ – proto platí

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} \geq \frac{1+x^2}{1+z^2 + \frac{1+y^2}{2}},$$

přičemž rovnost nastane jedině pro $y = 1$. Z této a obdobných nerovností pro ostatní dva zlomky proto sečtením obdržíme

$$\begin{aligned} & \frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \\ & \geq \frac{1+x^2}{1+z^2 + \frac{1+y^2}{2}} + \frac{1+y^2}{1+x^2 + \frac{1+z^2}{2}} + \frac{1+z^2}{1+y^2 + \frac{1+x^2}{2}}, \end{aligned}$$

přičemž rovnost nastane jedině v případě $x = y = z = 1$. K dokončení důkazu proto stačí ověřit nerovnost

$$\frac{1+x^2}{1+z^2 + \frac{1+y^2}{2}} + \frac{1+y^2}{1+x^2 + \frac{1+z^2}{2}} + \frac{1+z^2}{1+y^2 + \frac{1+x^2}{2}} \geq 2.$$

To je však dokázaná nerovnost z příkladu 5 pro čísla $a = 1+x^2, b = 1+y^2, c = 1+z^2$ a koeficienty $r = \frac{1}{2}$ a $s = 1$.

Příklad 6

Nechť pro kladná čísla a, b, c platí $ab + bc + ca = 3$. Pro každé $r > 0$ dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b(r+c)} + \frac{b}{c(r+a)} + \frac{c}{a(r+b)} \geq \frac{3}{r+1}.$$

Ukažte rovněž, že rovnost nastane jedině v případě $a = b = c = 1$.

Řešení. Zlomky na levé straně L rozšířme po řadě čísla a, b, c . Dostaneme vyjádření

$$L = \frac{a^2}{rab + abc} + \frac{b^2}{rbc + abc} + \frac{c^2}{rca + abc}$$

a uplatníme nerovnost (3) pro $n = 3$ s čísla $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_3 = c$ a koeficienty $q_1 = rab + abc$, $q_2 = rbc + abc$, $q_3 = rca + abc$. Podle ní platí

$$(a + b + c)^2 \leq (q_1 + q_2 + q_3) \cdot L. \quad (5)$$

Díky známé nerovnosti $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$, dokázané v závěru řešení příkladu 5, s přihlédnutím k podmínce $ab + bc + ca = 3$ dostáváme z nerovnosti (5) pro výraz L odhad

$$L \geq \frac{9}{q_1 + q_2 + q_3} = \frac{9}{r(ab + bc + ca) + 3abc} = \frac{3}{r + abc}.$$

K dokončení důkazu proto stačí ukázat, že platí $abc \leq 1$. To je však snadný důsledek AG-nerovnosti pro trojici čísel ab, bc, ca , podle které v naší situaci platí

$$1 = \frac{ab + bc + ca}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = \sqrt[3]{(abc)^2},$$

takže skutečně $abc \leq \sqrt[3]{1^3} = 1$. Aby zde nastala rovnost, musí kvůli použité AG-nerovnosti platit $ab = bc = ca = 1$, neboli $a = b = c = 1$.

Příklad 6.1

Nechť pro kladná čísla a, b, c platí $a + b + c = 3$. Pro každé $r > 0$ dokažte nerovnost

$$\frac{a\sqrt{b}}{c(r\sqrt{b} + \sqrt{ca})} + \frac{b\sqrt{c}}{a(r\sqrt{c} + \sqrt{ab})} + \frac{c\sqrt{a}}{b(r\sqrt{a} + \sqrt{bc})} \geq \frac{3}{r + 1}.$$

Ukažte rovněž, že rovnost nastane, právě když $a = b = c = 1$.

Řešení. První ze zlomků na levé straně nerovnosti lze upravit do tvaru

$$\frac{a\sqrt{b}}{c(r\sqrt{b} + \sqrt{ca})} = \frac{a\sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{ca}}}{c(r\sqrt{b} + \sqrt{ca}) \cdot \frac{1}{\sqrt{ca}}} = \frac{\sqrt{\frac{ab}{c}}}{r\sqrt{\frac{bc}{a}} + c}. \quad (6)$$

Podobně lze zapsat i zbylé dva zlomky. To nás motivuje k substitucím

$$a_1 = \sqrt{\frac{bc}{a}}, \quad b_1 = \sqrt{\frac{ca}{b}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{ab}{c}}.$$

Všimněme si, že pro takto zavedená kladná reálná čísla a_1, b_1, c_1 platí $b_1c_1 = a$, $c_1a_1 = b$ a $a_1b_1 = c$, takže zadanou podmínku $a + b + c = 3$ můžeme zapsat rovností $b_1c_1 + c_1a_1 + a_1b_1 = 3$ a dokazovanou nerovnost lze přepsat podle vzoru (6) do tvaru (zachováme přitom pořadí tří zlomků)

$$\frac{c_1}{ra_1 + a_1b_1} + \frac{a_1}{rb_1 + b_1c_1} + \frac{b_1}{rc_1 + c_1a_1} \geq \frac{3}{r+1}.$$

Nacházíme se tak přesně v situaci vyřešeného příkladu 6 s čísly a, b, c zaměněnými čísly a_1, b_1, c_1 . S využitím jeho výsledku je tak celý důkaz hotov, neboť navíc z rovností $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ zřejmě plyne $a = b = c = 1$.

Příklad 7

Pro libovolná kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} > \frac{4}{a + b + c}.$$

Řešení. Podobně jako v příkladu 5 zlomky na levé straně L dokazované nerovnosti rozšíříme po řadě čísla a, b, c

$$L = \frac{a^2}{a(b^2 + c^2)} + \frac{b^2}{b(c^2 + a^2)} + \frac{c^2}{c(a^2 + b^2)}$$

a uplatníme nerovnost (3) pro $n = 3$ s čísly $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_3 = c$ a koeficienty $q_1 = a(b^2 + c^2)$, $q_2 = b(c^2 + a^2)$, $q_3 = c(a^2 + b^2)$. Z takové nerovnosti

$$(a + b + c)^2 \leq (a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2)) \cdot L$$

vyplyne kýžená nerovnost $L > 4/(a + b + c)$, bude-li platit

$$(a + b + c)^3 > 4a(b^2 + c^2) + 4b(c^2 + a^2) + 4c(a^2 + b^2).$$

Po roznásobení levé strany dostaneme tři členy typu x^3 , šest členů typu $3x^2y$ a jeden člen $6abc$, takže ekvivalentní ostrá nerovnost bude mít tvar

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc > a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2)$$

a bude s ohledem na skutečnost, že $abc > 0$, dokázána, bude-li platit neostrá nerovnost

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2). \quad (7)$$

S ohledem na symetrii nerovnosti (7) předpokládejme, že $c = \min\{a, b, c\}$. Pak platí

$$0 \leq c(a - c)(b - c) = c^3 + abc - ac^2 - bc^2,$$

takže k důkazu (7) bude stačit, aby za předpokladu $c = \min\{a, b, c\}$ platilo

$$a^3 + b^3 + 2abc \geq ab^2 + ba^2 + c(a^2 + b^2).$$

Osamostaníme-li členy bez proměnné c na větší straně a členy s proměnnou c na menší straně, dostaneme nerovnost (menší stranu s vytknutou proměnnou c napíšeme vlevo)

$$c(a - b)^2 \leq a^3 + b^3 - ab^2 - ba^2 = (a + b)(a - b)^2,$$

kteřá je zvoleným předpokladem zřejmě zaručena. Tím je ostrá nerovnost ze zadání příkladu dokázána. Dodejme, že se samozřejmě nabízí otázka, zda pro některé $r > 4$ není obecně splněna silnější neostrá nerovnost

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{r}{a + b + c}. \quad (8)$$

Obvyklá volba $a = b = c$ dává v (8) rovnost pro $r = \frac{9}{2} > 4$. Pokud ovšem do (8) dosadíme $a = 1$ a $b = c = t > 1$, dostaneme nerovnost

$$\frac{1}{2t^2} + \frac{2t}{t^2 + 1} \geq \frac{r}{2t + 1},$$

z níž po donásobení číslem t a limitním přechodem $t \rightarrow \infty$ dostaneme $2 \geq \frac{1}{2}r$ neboli $r \leq 4$. Proto volba konstanty $r = 4$ v zadání příkladu byla optimální.

Příklad 8

Pro libovolná kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{a^2 - bc}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ca}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{c^2 - ab}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

Řešení. Dokazovanou nerovnost vynásobíme záporným číslem -2 a sečteme se zřejmou rovností

$$\frac{2a^2 + b^2 + c^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2b^2 + c^2 + a^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{2c^2 + a^2 + b^2}{2c^2 + a^2 + b^2} = 3.$$

Dostaneme tak ekvivalentní nerovnost

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \leq 3, \quad (9)$$

kteřou nyní dokážeme trojím užitím nerovnosti (3) pro $n = 2$. Nejprve volbou čísel $u_1 = b$, $u_2 = c$ a koeficientů $q_1 = b^2 + a^2$, $q_2 = c^2 + a^2$ obdržíme nerovnost

$$(b+c)^2 \leq (2a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{b^2}{b^2 + a^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right),$$

z níž po vydělení prvním činitelem z pravé strany plyne

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{b^2}{b^2 + a^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2}.$$

Analogicky se odvodí nerovnosti

$$\frac{(c+a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} \leq \frac{c^2}{c^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad \frac{(a+b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \leq \frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2}.$$

Zbývá konstatovat, že nerovnost (9) plyne sečtením posledních tří nerovností, neboť součet šesti zlomků z jejich pravých stran se zřejmě rovná číslu 3.

Čtenáři se mohou pokusit ověřit stejnou metodou podobnou nerovnost

$$\frac{5a^2 - 4bc}{5a^2 + b^2 + 4c^2} + \frac{5b^2 - 4ca}{5b^2 + c^2 + 4a^2} + \frac{5c^2 - 4ab}{5c^2 + a^2 + 4b^2} \geq 0.$$

Obecný tvar nerovnosti, kterou popsáný postup umožňuje odvodit, najdete (kvůli následující výzvě formou otázky) až v závěru celého článku. Objevíte ho předtím sami?

Příklad 8.1

Nechť kladná čísla a, b, c splňují vztah $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}.$$

Řešení. Po sečtení dokazované nerovnosti se zřejmou rovností

$$\frac{ab-1}{1-ab} + \frac{bc-1}{1-bc} + \frac{ca-1}{1-ca} = -3$$

dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$\frac{ab}{1-ab} + \frac{bc}{1-bc} + \frac{ca}{1-ca} \leq \frac{3}{2}. \quad (10)$$

Zlomky téhož typu z levé strany (10) odhadneme způsobem, který popíšeme jen u prvního zlomku.⁴ Pro jeho čitatel platí odhad $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$. Díky vztahu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ je pravá strana nerovnosti $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ rovna výrazu $\frac{1}{2}(1 - c^2)$, a tudíž pro jmenovatel zkoumaného zlomku platí

$$1 - ab \geq 1 - \frac{1 - c^2}{2} = \frac{1 + c^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + 2c^2}{2}.$$

Dohromady tak získáváme odhad

$$\frac{ab}{1-ab} \leq \frac{\frac{1}{4}(a+b)^2}{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2c^2)} = \frac{(a+b)^2}{2(a^2 + b^2 + 2c^2)}.$$

Když podobně odhadneme i zbylé dva zlomky v nerovnosti (10), zjistíme (po vynásobení číslem 2), že namísto (10) stačí dokázat stejnou nerovnost

$$\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + 2c^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2 + c^2 + 2a^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2 + a^2 + 2b^2} \leq 3,$$

pomocí níž jsme již dříve vyřešili příklad 8.

⁴V dalších dvou větách využijeme AG-nerovnosti pro dvojice čísel a, b , resp. a^2, b^2 .

Příklad 9

Nechť reálná čísla x, y, z splňují podmínku

$$xy + yz + zx \geq x + y + z \geq 3. \quad (11)$$

Dokažte, že pro každé $r > 0$ platí nerovnost

$$\frac{(2x+r)^2}{4x^2+r} + \frac{(2y+r)^2}{4y^2+r} + \frac{(2z+r)^2}{4z^2+r} \leq \frac{3(r+2)^2}{r+4},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $x = y = z = 1$.

Řešení. Před vlastním řešením učiníme několik poznámek. Je patrné, že pro $x = y = z = 1$ nastane rovnost jak v dokazované nerovnosti, tak v obou částech podmínky (11), jejíž význam rozkryjeme později. Kromě toho si všimneme, že zadaná nerovnost by byla triviální, pokud by pro každou ze tří hodnot $u = x, y, z$ platilo

$$\frac{(2u+r)^2}{4u^2+r} \leq \frac{(r+2)^2}{r+4}.$$

Snadný výpočet ukazuje, že poslední nerovnost platí, právě když číslo u leží vně otevřeného intervalu mezi čísly $1/(r+3)$ a 1 , do kterého však některá z hodnot x, y, z může i za podmínky (11) padnout.⁵

Je rovněž zřejmé, že přímá aplikace nerovnosti (3) k součtu tří daných zlomků pro nás nemá užítku, protože součet je v nerovnosti na straně *menší*. Místo toho nejprve z každého ze tří sčítaných zlomků „vyčleníme“ číslo 1 a získanou hodnotu 3 převedeme z levé strany na pravou. Dostaneme tak ekvivalentní nerovnost

$$\frac{4rx + r^2 - r}{4x^2 + r} + \frac{4ry + r^2 - r}{4y^2 + r} + \frac{4rz + r^2 - r}{4z^2 + r} \leq \frac{3(r+2)^2}{r+4} - 3 = \frac{3r(r+3)}{r+4},$$

kterou ještě můžeme vydělit kladným číslem r . Získanou nerovnost

$$\frac{4x + r - 1}{4x^2 + r} + \frac{4y + r - 1}{4y^2 + r} + \frac{4z + r - 1}{4z^2 + r} \leq \frac{3(r+3)}{r+4}$$

⁵Čísla $x = y = z = 1/(r+3)$ tvoří další trojici, pro kterou dokazovaná nerovnost přechází v rovnost. Takových trojic je dokonce nekonečně mnoho, ovšem jediná z nich splňuje podmínku (11). Bez ní má součet z levé strany nerovnosti největší hodnotu pro $x = y = z = 1/2$, a sice rovnou výrazu $3(r+1)$, který je – zřejmě pro každé reálné $r > 0$ – větší než lomený výraz na pravé straně nerovnosti.

nyní vynásobíme číslem -1 a poté sečteme se zřejmou rovností

$$\frac{4x^2 + r}{4x^2 + r} + \frac{4y^2 + r}{4y^2 + r} + \frac{4z^2 + r}{4z^2 + r} = 3.$$

Dostaneme tak ekvivalentní nerovnost

$$\frac{(2x-1)^2}{4x^2+r} + \frac{(2y-1)^2}{4y^2+r} + \frac{(2z-1)^2}{4z^2+r} \geq 3 - \frac{3(r+3)}{r+4} = \frac{3}{r+4}, \quad (12)$$

kteřou už budeme dokazovat pomocí nerovnosti (3) pro $n=3$ podle levé strany (12) s čísly $u_1 = 2x-1$, $u_2 = 2y-1$, $u_3 = 2z-1$ a koeficienty $q_1 = 4x^2+r$, $q_2 = 4y^2+r$, $q_3 = 4z^2+r$. Z takového odhadu

$$\begin{aligned} & (2x+2y+2z-3)^2 \leq \\ & \leq (4x^2+4y^2+4z^2+3r) \left(\frac{(2x-1)^2}{4x^2+r} + \frac{(2y-1)^2}{4y^2+r} + \frac{(2z-1)^2}{4z^2+r} \right) \end{aligned}$$

kýžená nerovnost (12) vyplyne, bude-li splněna podmínka

$$(2x+2y+2z-3)^2 \geq \frac{3}{r+4} \cdot (4x^2+4y^2+4z^2+3r).$$

Upravme ji ještě vynásobením kladným číslem $r+4$ do tvaru

$$(r+4)(2x+2y+2z-3)^2 \geq 3(4x^2+4y^2+4z^2+3r).$$

Obě strany této nerovnosti jsou lineární funkce proměnné r . Její platnost pro každé $r > 0$ je tudíž ekvivalentní s následující dvojicí nerovností mezi příslušnými koeficienty zmíněných dvou lineárních funkcí

$$(2x+2y+2z-3)^2 \geq 9 \quad \text{a} \quad (2x+2y+2z-3)^2 \geq 3(x^2+y^2+z^2). \quad (13)$$

Platnost první nerovnosti je zaručena pravou nerovností v podmínce (11) ze zadání příkladu, kterou lze totiž zapsat jako $2x+2y+2z-3 \geq 3$. Druhou nerovnost ověříme úpravou rozdílu mezi její levou a pravou stranou:

$$\begin{aligned} & (2x+2y+2z-3)^2 - 3(x^2+y^2+z^2) = \\ & = (x^2+y^2+z^2) - 12(x+y+z) + 8(xy+yz+zx) + 9 = \\ & = (x+y+z-3)^2 + 6[(xy+yz+zx) - (x+y+z)] \end{aligned}$$

Poslední výraz je nezáporný podle levé nerovnosti z podmínky (11). Tím je důkaz nerovnosti ze zadání příkladu hotov. Aby v ní nastala rovnost, musí kromě rovnosti v užitě nerovnosti (3) nastat i rovnost v (13), které znamenají, že platí $xy + yz + zx = x + y + z = 3$, a tudíž je splněna rovnost $(x + y + z)^2 = 3(xy + yz + zx)$. Z ní již plyne $x = y = z$, jak víme z řešení příkladu 5.

Příklad 9.1

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, r platí

$$\frac{(ra + b + c)^2}{ra^2 + (b + c)^2} + \frac{(rb + c + a)^2}{rb^2 + (c + a)^2} + \frac{(rc + a + b)^2}{rc^2 + (a + b)^2} \leq \frac{3(r + 2)^2}{r + 4}.$$

Ukažte rovněž, že rovnost nastane, právě když $a = b = c$.

Řešení. Zlomky na levé straně nerovnosti rozšíříme po řadě čísly $1/a^2, 1/b^2$ a $1/c^2$. Získáme tak ekvivalentní nerovnost

$$\frac{\left(r + \frac{b + c}{a}\right)^2}{r + \left(\frac{b + c}{a}\right)^2} + \frac{\left(r + \frac{c + a}{b}\right)^2}{r + \left(\frac{c + a}{b}\right)^2} + \frac{\left(r + \frac{a + b}{c}\right)^2}{r + \left(\frac{a + b}{c}\right)^2} \leq \frac{3(r + 2)^2}{r + 4},$$

což je nerovnost z příkladu 9 pro čísla

$$x = \frac{b + c}{2a}, \quad y = \frac{c + a}{2b}, \quad z = \frac{a + b}{2c}. \quad (14)$$

Proto stačí ověřit, že takto určené hodnoty x, y, z splňují podmínku (11) ze zadání dotyčného příkladu, tedy dvojici nerovností

$$x + y + z \geq 3 \quad \text{a} \quad xy + yz + zx \geq x + y + z.$$

Pro první z nich je to snadné:

$$x + y + z = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \geq 1 + 1 + 1 = 3$$

podle AG-nerovností pro dvojice navzájem převrácených kladných reálných čísel, jejichž geometrický průměr je totiž vždy 1. Důkaz druhé nerovnosti je náročnější; pokud však po dosazení našich hodnot x, y, z ze vzorců (14) součiny v daném vztahu roznásobíme a všechny zlomky převedeme na společného jmenovatele, najdeme vyjádření

$$\begin{aligned} & xy + yz + zx - x - y - z = \\ &= \frac{(b+c)(a+c)}{4ab} + \frac{(c+a)(c+b)}{4bc} + \frac{(a+b)(a+c)}{4ac} - \frac{b+c}{2a} - \frac{c+a}{2b} - \frac{a+b}{2c} = \\ &= \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - a^2c - b^2c - b^2a - c^2a - c^2b}{4abc}, \end{aligned}$$

z něhož vidíme, že úloha se redukuje na důkaz stejné nerovnosti jako v řešení příkladu 7. Zbývá ještě dodat, že vztah $x = y = z = 1$, který je kritériem rovnosti v uplatněné nerovnosti z příkladu 9, pro zlomky ze (14) zřejmě nastane, právě když bude platit $a = b = c$.

Poznámka k příkladu 8. Postupem z řešení příkladu lze dokázat, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c, r je nezáporný součet

$$\frac{(r^2 + 1)a^2 - 2rbc}{(r^2 + 1)a^2 + b^2 + r^2c^2} + \frac{(r^2 + 1)b^2 - 2rca}{(r^2 + 1)b^2 + c^2 + r^2a^2} + \frac{(r^2 + 1)c^2 - 2rab}{(r^2 + 1)c^2 + a^2 + r^2b^2}.$$

V zadání příkladu bylo vybráno $r = 1$ (a daný součet byl vydělen číslem 2), v závěru jeho řešení byl uveden tento součet s hodnotou $r = 2$.

Literatura

- [1] Engel, A.: Problem Solving Strategies. Springer Verlag, New York 1998.
- [2] Herman, J. – Kučera, R. – Šimša, J.: Metody řešení matematických úloh I. Masarykova univerzita, Brno 2001.
- [3] Kufner, A.: Nerovnosti. Škola mladých matematiků, sv. 39, Mladá fronta, Praha 1989.
- [4] Steele, J. M.: The Cauchy-Schwarz Master Class – An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities. Cambridge University Press, New York 2004.
- [5] Švrček, J. – Calábek, P.: Sbirka netradičních matematických úloh. Prometheus, Praha 2007.

60. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola (domácí část)

KATEGORIE A

A–I–1

Kořeny rovnice

$$ax^4 + bx^2 + a = 1$$

v oboru reálných čísel jsou čtyři po sobě jdoucí členy rostoucí aritmetické posloupnosti. Přitom jeden z těchto členů je zároveň řešením rovnice

$$bx^2 + ax + a = 1.$$

Určete všechny možné hodnoty reálných parametrů a , b .

Peter Novotný

A–I–2

Nechť k , n jsou přirozená čísla. Z platnosti tvrzení „číslo $(n-1)(n+1)$ je dělitelné číslem k “ Adam usoudil, že buď číslo $n-1$, nebo číslo $n+1$ je dělitelné k . Určete všechna přirozená čísla k , pro něž je Adamova úvaha správná pro každé přirozené n .

Ján Mazák

A–I–3

Jsou dány kružnice k , l , které se protínají v bodech A , B . Označme K , L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL . Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN . Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětiový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL .

Jaroslav Švrček

A–I–4

Mějme $6n$ žetonů až na barvu shodných, po třech od každé z $2n$ barev. Pro každé přirozené číslo $n > 1$ určete počet p_n všech rozdělení takových

$6n$ žetonů na dvě hromádky po $3n$ žetonech, kdy žádné tři žetony téže barvy nejsou ve stejné hromádce. Dokažte, že p_n je liché číslo, právě když $n = 2^k$ pro vhodné přirozené k .

Jaromír Šimša

A–I–5

Na každé stěně krychle je napsáno právě jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme libovolné dvě sousední stěny krychle a čísla na nich napsaná zvětšíme o 1. Určete nutnou a postačující podmínku pro očíslování stěn krychle na počátku, aby po konečném počtu vhodných kroků byla na všech stěnách krychle stejná čísla.

Peter Novotný

A–I–6

Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC s ostrým úhlem při vrcholu C (při obvyklém označení délek stran a velikostí vnitřních úhlů) platí nerovnost

$$(a^2 + b^2) \cos(\alpha - \beta) \leq 2ab.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

Jaromír Šimša

KATEGORIE B

B–I–1

V oboru reálných čísel vyřešte soustavu

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z + 1,$$

$$\sqrt{y^2 + z^2} = x + 1,$$

$$\sqrt{z^2 + x^2} = y + 1.$$

Tomáš Jurík

B–I–2

Uvažujme vnitřní bod P daného obdélníku $ABCD$ a označme po řadě Q, R obrazy bodu P v souměrnostech podle středů A, C . Předpokládejme, že přímka QR protne strany AB a BC ve vnitřních bodech M a N . Sestrojte množinu všech bodů P , pro něž platí $|MN| = |AB|$.

Jaroslav Švrček

B–I–3

Nechť a , b , c jsou reálná čísla, jejichž součet je 6. Dokažte, že aspoň jedno z čísel

$$ab + bc, \quad bc + ca, \quad ca + ab$$

není větší než 8.

Ján Mazák

B–I–4

Najděte všechna celá čísla n , pro něž je zlomek

$$\frac{n^3 + 2\,010}{n^2 + 2\,010}$$

roven celému číslu.

Pavel Novotný

B–I–5

Zabývejme se otázkou, které trojúhelníky ABC s ostrými úhly při vrcholech A a B mají následující vlastnost: Vedeme-li středem výšky z vrcholu C tři přímky rovnoběžné se stranami trojúhelníku ABC , protnou je tyto přímky v šesti bodech ležících na jedné kružnici.

a) Ukažte, že vyhovuje každý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C .

b) Vysvětlete, proč žádný jiný trojúhelník ABC nevyhovuje.

Jaromír Šimša

B–I–6

Určete počet desetimístných čísel, v nichž lze škrtnout dvě sousední číslice, a dostat tak číslo 99krát menší.

Ján Mazák

KATEGORIE C**C–I–1**

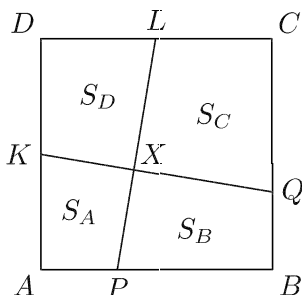
Lucie napsala na tabuli dvě nenulová čísla. Potom mezi ně postupně vkládala znaménka plus, mínus, krát a děleno a všechny čtyři příklady správně vypočítala. Mezi výsledky byly pouze dvě různé hodnoty. Jaká dvě čísla mohla Lucie na tabuli napsat?

Peter Novotný

C-I-2

Dokažte, že výrazy $23x + y$, $19x + 3y$ jsou dělitelné číslem 50 pro stejné dvojice přirozených čísel x , y .

Jaroslav Zhouf

C-I-3

Máme čtverec $ABCD$ se stranou délky 1 cm. Body K a L jsou středy stran DA a DC . Bod P leží na straně AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na straně BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL se protínají v bodě X . Obsahy čtyřúhelníků $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupně S_A , S_B , S_C , S_D .

- Dokažte, že $S_B = S_D$.
- Vypočítejte rozdíl $S_C - S_A$.
- Vysvětlete, proč neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$.

Peter Novotný

C-I-4

Ve skupině n žáků spolu někteří kamarádi. Víme, že každý má mezi ostatními aspoň čtyři kamarády. Učitelka chce žáky rozdělit do dvou nejvýše čtyřčlenných skupin tak, že každý bude mít ve své skupině alespoň jednoho kamaráda.

- Ukažte, že v případě $n = 7$ lze žáky požadovaným způsobem rozdělit.
- Zjistěte, zda lze žáky takto rozdělit i v případě $n = 8$.

Tomáš Jurík

C-I-5

Dokažte, že nejmenší společný násobek $[a, b]$ a největší společný dělitel (a, b) libovolných dvou kladných celých čísel a , b splňují nerovnost

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] \geq 2ab.$$

Zjistěte, kdy v této nerovnosti nastane rovnost.

Jaromír Šimša

C–I–6

Je dán lichoběžník $ABCD$. Střed základny AB označme P . Uvažujme rovnoběžku se základnou AB , která protíná úsečky AD , PD , PC , BC postupně v bodech K , L , M , N .

a) Dokažte, že $|KL| = |MN|$.

b) Určete polohu přímky KL tak, aby platilo i $|KL| = |LM|$.

Jaroslav Zhouf

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2010 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{T}_\text{E}_\text{X}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 169

Najděte všechna celá čísla n , pro která je hodnota výrazu $2^n - 91$ třetí mocninou některého celého čísla.

Pavel Calábek

Úloha 170

Na kružnici k jsou dány dva různé body X a Y tak, že přímka XY neprochází středem kružnice k . Úsečka XY je průměrem kružnice l . Na větším oblouku XY kružnice k leží bod P a na kružnici l bod Q tak, že čtyřúhelník $PXQY$ je konvexní a přitom $PX \parallel QY$. Dokažte, že velikost úhlu PYQ nezávisí na poloze bodu P (za podmínky existence bodu Q).

Robert Geretschläger (Graz)