

MATEMATIKA

Nebezpečí finanční ngramotnosti

OLDŘICH ODVÁRKO – JARMILA ROBOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V roce 2007 zadalo Ministerstvo financí ČR (MF ČR) společnosti STEM/MARK zpracování výzkumu, jehož cílem bylo zmapovat základní úroveň finanční gramotnosti obyvatel ČR prostřednictvím jejich subjektivního hodnocení a zjistit tak potřebu vzdělávání v oblasti financí. K hlavním závěrům tohoto výzkumu patřilo zjištění, že většina respondentů *nezískala informace z oblasti financí a bank ve škole* (81 %), a téměř všichni souhlasili s možností vyučovat základní pojmy z oblasti finančního světa na středních školách (93 %), necelá polovina by toto učivo zavedla již na základní školy [1].

Ve stejném roce vydalo MF ČR materiál *Rámcová politika Ministerstva financí v oblasti ochrany spotřebitele na finančním trhu*. Tento materiál stanovuje hlavní cíle, oblasti a principy, na které se MF ČR do budoucna zaměří. V materiálu je konstatováno, že současný stav ochrany spotřebitele na finančním trhu není uspokojivý a že je nutno zavést některá opatření pro zlepšení situace:

- zajistit optimální rozsah a kvalitu informací pro spotřebitele,
- zajistit odpovídající odbornou úroveň distributorů finančních služeb,
- zabezpečit adekvátní postavení spotřebitele ve vztahu s finančními institucemi,
- *zvýšit finanční gramotnost spotřebitelů a jejich úroveň práce s informacemi* [2].

Již v roce 2005 byl vytvořen společný dokument Ministerstva financí ČR, Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR a Ministerstva průmyslu a obchodu ČR nazvaný *Systém budování finanční gramotnosti na*

základních a středních školách, který byl inovován v prosinci 2007. V tomto dokumentu je uvedena definice finanční gramotnosti a její tři základní složky.

Finanční gramotnost je soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb. Finančně gramotný občan se orientuje v problematice peněz a cen a je schopen odpovědně spravovat osobní/rodinný rozpočet, včetně správy finančních aktiv a finančních závazků s ohledem na měnící se životní situace [3].

Finanční gramotnost obsahuje tři složky:

- *Peněžní gramotnost*, která zahrnuje kompetence pro správu hotovostních a bezhotovostních peněz a správu příslušných nástrojů (běžný účet atd.).
- *Cenovou gramotnost*, do níž jsou začleněny kompetence pro porozumění cenovým mechanismům a inflaci.
- *Rozpočtovou gramotnost*, která obsahuje kompetence pro správu osobního/rodinného rozpočtu a zvládání různých životních situací z finančního hlediska, kompetence pro *správu finančních aktiv* (např. vkladů, investic, pojištění) a *správu finančních závazků* (např. úvěrů, leasingu).

Uvedený materiál obsahuje rovněž *Standard finanční gramotnosti* pro základní i střední vzdělávání. V tomto článku se zaměříme na 2. stupeň ZŠ a na nižší ročníky víceletých gymnázií. Do doby úpravy RP ZV se doporučuje implementovat tyto standardy do vzdělávání na dobrovolné bázi. Předpokládá se, že problémy týkající se rozvoje finanční gramotnosti budou zařazeny do vzdělávacích oblastí *Matematika a její aplikace* a *Člověk a společnost*.

Občan s nízkou úrovní finanční gramotnosti není schopen se orientovat v různých nabídkách obchodů, cestovních kanceláří, bank, pojišťoven atd. Často se nechá zlákat neseriozními nabídkami, neumí kriticky posoudit lákavé reklamy a nedokáže si vybrat nejvhodnější variantu z nabízených možností. To mnohdy vede k jeho značným finančním ztrátám, zadluženosti i ztrátě majetku. Proto bychom měli žáky připravit co nejdůkladněji na rozmanité praktické situace, se kterými se budou na finančním trhu setkávat.

2. stupeň ZŠ	
Obsah	Výsledky
<i>Peníze</i>	
• nakládání s penězi • tvorba ceny • inflace	• na příkladech ukáže vhodné využití různých nástrojů hotovostního a bezhotovostního placení • na příkladu ukáže tvorbu ceny jako součet nákladů, zisku a DPH • objasní vliv nabídky a poptávky na tvorbu ceny a její změny • popíše vliv inflace na hodnotu peněz
<i>Hospodaření domácnosti</i>	
• rozpočet domácnosti, typy rozpočtu, jejich odlišnosti • základní práva spotřebitelů	• sestaví jednoduchý rozpočet domácnosti, uvede hlavní příjmy a výdaje domácnosti, rozliší pravidelné a jednorázové příjmy a výdaje, zváží nezbytnost jednotlivých výdajů • objasní princip vyrovnaného, schodkového a přebytkového rozpočtu • vysvětlí, jak se bránit v případě porušení práv spotřebitele
<i>Finanční produkty</i>	
• služby bank, aktivní a pasivní operace • produkty finančního trhu pro investování a pro získání prostředků • pojištění • úročení	• uvede příklady použití debetní a kreditní platební karty, vysvětlí jejich omezení • uvede a porovná nejobvyklejší způsoby nakládání s volnými prostředky (spotřeba, úspory, investice) • uvede a porovná nejčastější způsoby krytí deficitu (úvěry, splátkový prodej, leasing) • vysvětlí význam úroku placeného a přijatého • uvede nejčastější druhy pojištění a navrhne, kdy je využít

Standard finanční gramotnosti pro 2. stupeň ZŠ

V učivu ZŠ se úlohy z oblasti financí objevují zejména v tematických celcích *přirozená a desetinná čísla* (nákupy) a *procenta* (slevy, jednoduché

úročení). Možnosti matematiky pro rozvoj finanční gramotnosti žáků jsou však mnohem širší. Je možné a účelné rozvíjet jejich finanční gramotnost v podstatně větším rozsahu typů úloh, aniž by se rozšiřoval matematický aparát. Pokud zredukujeme uměle konstruované pseudoaplikační slovní úlohy, které nemají s praxí nic společného, nerozšíří se ani objem učiva.

Pro ilustraci uvádíme jedenáct drobných úloh z oblasti obchodu a služeb, které považujeme v uvedených souvislostech za vhodné pro 6. a 7. ročník základní školy. Některé z nich jsou převzaty z učebnic a sbírek pro ZŠ autorů Odvárko – Kadleček.

Úloha 1

Jana kupovala školní potřeby v supermarketu. Pastelky stály 44,90 Kč. Druhý den se cestou ze školy Jana zastavila ještě v papírnictví pro sešit na matematiku. Zjistila, že stejné pastelky tam stojí 25 Kč. Kolik na pastelkách prodělala?

Úloha 2

Tatínek chce koupit přes internet samonavíjecí sušák prádla. Zaujala ho nabídka dvou obchodů. V prvním z nich nabízejí sušák za 278 Kč, ve druhém stejný typ za 345 Kč. Tatínek vybral nejprve levnější variantu, při uzavírání objednávky ale zjistil, že mu bude připočítáno poštovné a balné ve výši 120 Kč. Nakonec objednal sušák ve druhém obchodě, neboť tento e-obchod nabízí i osobní odběr nedaleko jeho bydliště. Rozhodl se správně?

Komentář. Žáci by si měli uvědomit, že ceny zboží nejsou jednotné a že rozdíly mohou být podstatné. Je třeba také zvážit dodatečné náklady na zakoupení zboží (poštovné, balné, dopravné ...).

Úloha 3

Maminka kupuje na víkend pro rodinu 16 bílých jogurtů. V obchodě s potravinami stojí balení po 8 kusech 59,90 Kč, balení po 4 kusech 25,90 Kč. Které balení je finančně výhodnější?

Komentář. Na cenovce u zboží musí být vždy uvedena cena za jednotku. V našem případě u většího balení je tato cena 7,49 Kč, u menšího 6,48 Kč. Výhodnost nákupu menšího balení je zřejmá i pouhým odhadem. Obvykle bývá větší balení finančně výhodnější, tento příklad z praxe však ukazuje, že tomu tak vždy není.

Úloha 4



Kolik „ušetříš“, když si od Čendy koupíš staré roztrhané boty? Opravdu by se ti takový nákup vyplatil? [4]

Komentář. Není důležitá jenom cena zboží, ale také jeho kvalita. Nákup nekvalitního zboží se často nevyplatí. Kvalitní zboží ovšem neznamená totéž jako (někdy i předražené) značkové zboží.

Úloha 5

Univerzální krycí nepromokavá plachta proti dešti, větru, slunci, mrazu:
1,9 m × 3 m za pouhých **170 Kč**
Cena bez DPH 19 %, poštovné 45 Kč.

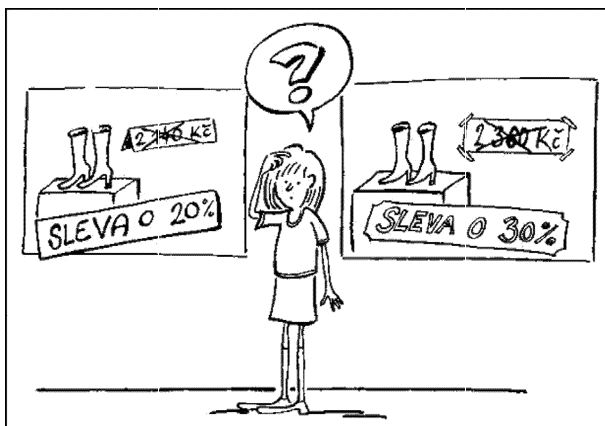
Reklama upozorňuje, že do uvedené ceny nebyla započítána daň z přidané hodnoty. Vypočítej, kolik zaplatíš celkem za plachtu i s DPH, když si ji objednáš poštou. [5]

Úloha 6

Firma Alfa prodává počítač KL bez DPH za 19 580 Kč, firma Beta stejný počítač nabízí za cenu 22 598 Kč s DPH. DPH tvoří 20 % z ceny bez daně. U které firmy je finančně výhodnější počítač koupit?

Komentář. Je třeba si všimnout, zda uvedená cena zahrnuje také DPH. Daň z přidané hodnoty tvoří podstatnou část ceny zboží.

Úloha 7



Blanka si vyhlédla kozačky. V prodejně u školy stály 2 140 Kč, v prodejně na náměstí 2 360 Kč. V březnu byly zlevněny: v prodejně u školy o 20 %, v prodejně na náměstí o 30 %.

- Odhadni, ve které prodejně zaplatíš za kozačky méně.
- Vypočítej obě ceny. [6]

Úloha 8

ŠLANK – zaručený prostředek na zhubnutí

Objednejte ihned!

Při rychlém odběru ŠLANKU dostanete **30 % slevu** z ceny výrobku, která je 1 950 Kč.

Zaplatíte tak jen pouhých 1 500 Kč.

- Zkontroluj zlevněnou cenu, vypočítej ji správně.
- Zjistí, z kterého základu byla 30%ní sleva 450 Kč vypočítána. [6]

Komentář. Při slevách je důležitá nejen výše slevy, ale také základ, ze kterého se sleva počítá. Úloha 8 názorně ukazuje, jak se také někdy určují tzv. slevy: Obchodník chtěl za zboží získat 1 500 Kč, k ceně přičetl 30 % z této částky, tj. 450 Kč. Slogan „30 % z 1 950 Kč“ by však měl odpovídat zlevnění o 585 Kč.

Úloha 9

Ve výkladní skříni prodejny je uveden reklamní slogan: *Téměř veškeré zboží je zlevněno o 20 % až 70 %*. Mám zájem o svetr, jehož původní cena je 850 Kč. Kolik za něj zaplatím po slevě?

Komentář. Podle slevy „o 20 % až 70 %“ může stát svetr od 255 Kč do 680 Kč. Vzhledem k formulaci sloganu „téměř veškeré zboží“ může však stát i 850 Kč. Slovo „až“ je velice důležité, neboť nejvyšší sleva se může týkat například jen jednoho druhu zboží.

Úloha 10

Cestovní kancelář nabízí desetidenní letecký zájezd k moři do hotelu Dulcia v ceně od 15 790 Kč. Klient si připravil hotovost 16 000 Kč a v cestovní kanceláři zjistil, že uvedená cena platí pouze mimo sezónu. V požadovaném termínu – v červenci – je základní cena 18 990 Kč, palivový příplatek a letištní taxa činí celkem 4 000 Kč, pojištění na cesty 250 Kč. Kolik korun si měl klient ve skutečnosti připravit?

Komentář. Jde o běžný případ nabídky (např. i cena automobilů je často uváděna „od“). Je třeba pozorně číst nabídky firem, všimnout si dalších podmínek nákupu zboží a poskytovaných služeb.

Úloha 11

Produkt A stojí 100 Kč, produkt B stojí 80 Kč. Balíček s produkty A a B stojí 150 Kč. Kolik korun při nákupu balíčku ušetříme?

Komentář. Ušetříme 30 Kč, ale pouze v případě, že oba produkty využijeme. Pokud jsme například produkt B k ničemu nepotřebovali a po měsíci jsme ho vyhodili do koše, je na místě otázka, kolik korun jsme při nákupu balíčku prodělali.

Uvedené úlohy jsou z hlediska matematického řešení jednoduché. Úspěšné vyřešení příslušné situace v praxi však vyžaduje nejen odborné matematické znalosti, ale také dostatečnou úroveň finanční gramotnosti. Školská matematika může přirozeným způsobem prostřednictvím vhodných úloh k jejímu rozvíjení přispět.

Literatura

- [1] MF ČR. Finanční gramotnost (Kvantitativní výzkum pro MF) [online]. 2007. [cit. 2010-01-26]. Dostupný z:
<http://www.mfcr.cz/cps/rde/xchg/mfcr/xsl/fint rh_fin_vzdelavani_34424.html>.

- [2] MF ČR. Rámcová politika Ministerstva financí v oblasti ochrany spotřebitele na finančním trhu [online]. 2007. [cit. 2010-01-26]. Dostupný z: http://www.mfcr.cz/cps/rde/xber/mfcr/Ramcova_politika_MF_OSFT2007_pdf.pdf.
- [3] MF ČR. Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách [online]. 2007. [cit. 2010-01-26]. Dostupný z: http://www.mfcr.cz/cps/rde/xber/mfcr/SBFG_25_326-07_.pdf.
- [4] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 6. ročník základní školy. 1. díl. Opačkování z aritmetiky a geometrie. 2. vydání, Prometheus, Praha 2005.
- [5] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 7. ročník základní školy. 2. díl. Poměr. Přímá a nepřímá úměrnost. Procenta. 2. Vydání, Prometheus, Praha 2004.
- [6] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Pracovní sešit z matematiky. Soubor úloh pro 7. ročník základní školy. 2. vydání, Prometheus, Praha 2007.

O číselných posloupnostech (a_n) se členy

$$a_1 = \sqrt{a}, \quad a_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad a_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots$$

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V tomto článku ukážeme, že vhodnou volbou kladného reálného čísla a lze dosáhnout toho, že limitou číselné posloupnosti uvedené v názvu bude libovolně zvolené přirozené číslo $n > 1$. Za tímto účelem nejprve dokážeme, že každá posloupnost tohoto typu má vlastní limitu. Použijeme k tomu známou větu, která praví, že *monotonní posloupnost je konvergentní, právě když je omezená*. Vzhledem k tomu, že uvedená posloupnost je rostoucí, stačí ukázat, že je shora omezená.

Snadno zjistíme, že pro členy a_n a a_{n-1} uvažované posloupnosti platí

$$a_n^2 = a + a_{n-1} \quad \text{neboli} \quad a_n^2 - a_{n-1} - a = 0. \quad (1)$$

Protože platí $a_{n-1} < a_n$, plyne odtud

$$a_{n-1}^2 - a_{n-1} - a < 0.$$

Levou stranu této nerovnice převedeme na součinný tvar

$$\left(a_{n-1} - \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}\right) \left(a_{n-1} - \frac{1 - \sqrt{4a+1}}{2}\right) < 0.$$

Uvážíme-li, že výraz ve druhé závorce je pro všechna reálná čísla $a > 0$ kladný, musí být výraz v první závorce záporný. Dostáváme tak podmínku

$$a_{n-1} < \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}.$$

Tento výsledek ale znamená, že uvažovaná posloupnost (a_n) je shora omezená. Protože je navíc rostoucí, má vlastní limitu, kterou poměrně snadno určíme.

Označíme-li $\lim a_n = A = \lim a_{n-1}$, pak podle pravidel pro počítání s vlastními limitami a podle (1) platí

$$\lim (a_n^2 - a_{n-1} - a) = A^2 - A - a = 0,$$

odkud (vzhledem k tomu, a i A jsou kladná reálná čísla) dostáváme:

$$A = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}. \quad (2)$$

Zjistili jsme tak, že pro každé $a > 0$ má uvažovaná posloupnost

$$\sqrt{a}, \sqrt{a + \sqrt{a}}, \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots$$

vlastní limitu, kterou je číslo A ze vztahu (2).

Uvedme nyní několik jednoduchých příkladů:

- Pro $a = 2$ vznikne posloupnost $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$ s limitou

$$A = \frac{1 + \sqrt{4 \cdot 2 + 1}}{2} = 2.$$

- Pro $a = 6$ vznikne posloupnost $\sqrt{6}, \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \dots$ s limitou

$$A = \frac{1 + \sqrt{4 \cdot 6 + 1}}{2} = 3.$$

- Pro $a = 12$ vznikne číselná posloupnost $\sqrt{12}, \sqrt{12 + \sqrt{12}}, \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}}, \dots$ s limitou

$$A = \frac{1 + \sqrt{4 \cdot 12 + 1}}{2} = 4.$$

Všimněme si, že pro $a = 2 = 1 \cdot 2$ je $A = 2$, pro $a = 6 = 2 \cdot 3$ je $A = 3$ a pro $a = 12 = 3 \cdot 4$ je $A = 4$. Můžeme tak vyslovit domněnku, že posloupnost

$$\sqrt{a}, \sqrt{a + \sqrt{a}}, \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots$$

bude mít za limitu přirozené číslo $A = n$ pro $a = (n-1)n$. Tuto domněnku ověříme dosazením $(n-1)n$ za a do vztahu (2). Dostaneme tak

$$A = \frac{1 + \sqrt{4(n-1)n + 1}}{2} = \frac{1 + \sqrt{(2n-1)^2}}{2} = \frac{1 + (2n-1)}{2} = n.$$

Chceme-li tedy, aby uvažovaná posloupnost měla za limitu libovolně zvolené přirozené číslo $n > 1$, stačí v této posloupnosti zvolit $a = (n-1)n$.

Tím je slib uvedený v úvodu splněn a celý článek by mohl skončit, kdyby si autor nevšiml, že pro $a = 1$ vznikne posloupnost

$$\sqrt{1}, \sqrt{1 + \sqrt{1}}, \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}, \dots,$$

jejíž limita $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ je číslo, které při rozdělení jednotkové úsečky zlatým řezem udává poměr délky této úsečky k délce její větší části.

K ověření tohoto výsledku připomeňme, že rozdělit jednotkovou úsečku AB zlatým řezem znamená určit její vnitřní bod X tak, aby při označení $|AX| = x$, $|BX| = 1 - x$, kde $x > 1 - x$, platilo

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1 - x},$$

neboli $x^2 + x - 1 = 0$. Snadno zjistíme, že tato kvadratická rovnice má jediný kladný (reálný) kořen, a to $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$. Pro poměr délek

jednotkové úsečky a délky její větší části, tj. pro poměr $1 : x$ dostaneme vskutku

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Na závěr bych rád vyjádřil přesvědčení, že nejsem sám, kdo souvislost mezi zlatým řezem a posloupností

$$\sqrt{1}, \sqrt{1 + \sqrt{1}}, \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}, \dots$$

považuje za pozoruhodnou.¹

Literatura

- [1] *Geryk, M. – Švrček, J.*: Řetězové odmocniny. MFI, roč. 11 (2001/2002), č. 5.

Čínská zbytková věta

PAVEL CALÁBEK

Přírodovědecká fakulta UP v Olomouci

V jediném známém díle *Sun-c' Suan T'ing* (Sun-c'ovy výpočty) čínského matematika *Sun-c'* (cca 4. stol. n. l.) se objevila následující úloha:

Úloha 1

Máme jistý počet věcí. Při jeho dělení 3 dostaneme zbytek 2, při dělení 5 získáme zbytek 3 a při dělení 7 bude zbytek 2. Kolik věcí máme?

Jinou, dramatictější variantu takového problému uvádí indický matematik a astronom *Brahmagupta* (7. stol. n. l.):

¹Zájemce o tuto tematiku lze odkázat dále např. na článek [1], který se zabývá příbuznou problematikou.

Úloha 2

Stařenka jde na trh; kůň jí šlápne do koše a zničí všechna vejce. Jezdec nabídne úhradu škody a ptá se, kolik vajec přinesla. Stařenka nezná přesný počet, ale ví, že když vejce ukládala po dvou, jedno jí zbylo. Stejná věc nastala, když když vejce ukládala po třech, čtyřech, pěti a šesti. Naopak, když vejce ukládala po sedmi, žádné jí nezbylo. Najděte nejmenší počet vajec, které mohla stařenka nést.

V obou úlohách hledáme přirozené číslo, u kterého známe zbytky při dělení několika danými přirozenými čísly. S problémy tohoto typu se setkáváme poměrně často v úlohách školské matematiky. Vyskytují se jak v úlohách rekreační matematiky, mezi něž řadíme i uvedené úlohy, tak v nejnáročnějších úlohách na mezinárodních matematických soutěžích, které jsou uvedeny na konci tohoto článku.

Pokud problematiku výše uvedených úloh formulujeme obecně, hledáme odpovědi na otázky, zda řešení existuje, zda je určeno jednoznačně, případně jaký je vztah mezi různými řešeními a jak tato řešení nalézt. Nyní zkoumejme problém, kdy hledáme přirozené číslo, pro něž známe zbytky při dělení danými dvěma přirozenými čísly. O existenci řešení takto formulovaného problému vypovídá následující věta.

Věta 1

Nechť m a n jsou nesoudělná přirozená čísla a a , b celá nezáporná čísla, pro která platí $a < m$ a $b < n$. Potom existuje právě jedno celé nezáporné číslo $N < mn$ takové, že jeho zbytky při dělení čísly m a n jsou po řadě a a b . Přitom všechna celá čísla, která po dělení čísly m a n mají zbytky po řadě a a b jsou tvaru $N + kmn$, kde k je libovolné celé číslo.

Důkaz. Každému číslu z množiny $\{0, 1, 2, \dots, mn - 1\}$ přiřadíme (uspořádanou) dvojici jeho zbytků po dělení čísly m a n . Ukážeme, že pro žádné číslo z této množiny není taková dvojice stejná. Opravdu, pokud by dvě různá čísla, řekněme A a B , měla stejnou dvojici zbytků (z_1, z_2) po dělení po řadě čísly m a n , potom by číslo $A - B$ bylo dělitelné nesoudělnými čísly m a n , tedy by bylo dělitelné i jejich součinem mn . Jelikož ale $A, B \in \{0, 1, 2, \dots, mn - 1\}$, platí $|A - B| \leq mn - 1$, plyne odtud $A = B$, což je spor s předpokladem, že čísla A a B jsou různá.

Přirozené číslo po dělení číslem m může mít m různých zbytků $0, 1, \dots, m - 1$ a po dělení číslem n může mít těchto zbytků n . Proto existuje právě mn různých dvojic zbytků po dělení čísly m a n . V množině $\{0, 1, 2, \dots,$

$mn - 1$ } je mn čísel, které mají různé dvojice zbytků po dělení přirozenými čísly m a n , musí tam tedy existovat právě jedno takové číslo N , které po dělení čísly m a n dává po řadě zbytky a a b .

Jelikož číslo kmn , kde k je celé číslo, je dělitelné čísly m a n , má číslo $N + kmn$ zbytky a a b při dělení čísly m a n . Naopak, má-li číslo M tyto zbytky po dělení čísly m a n , potom tuto vlastnost má také číslo $M + jmn$, kde j je celé číslo. Existuje právě jedno číslo j takové, že $0 \leq M + jmn < mn$, podle předchozích odstavců ale toto číslo je číslo N , proto $M + jmn = N$ a tedy číslo M je tvaru $N + kmn$.

Jiný důkaz první části. Předcházejí důkaz byl existenční a nevyplývala z něj žádná jiná metoda, jak najít číslo N jinak, než vypočítat zbytky po dělení každého z mn čísel z množiny $\{0, 1, 2, \dots, mn - 1\}$. Nyní uvedme konstruktivnější důkaz.

Uvažujme množinu čísel $\{0, m, 2m, 3m, \dots, (n-1)m\}$. Ukážeme, že tato čísla mají navzájem různé zbytky při dělení číslem n . Vskutku, pokud by existovala dvě různá čísla z této množiny, řekněme km a jm , která mají stejný zbytek při dělení n , potom číslo n dělí jejich rozdíl $(k - j)m$. Vzhledem k nesoudělnosti čísel m a n tedy n dělí $(k - j)$, ale $|k - j| < n$, proto $k = j$, což je spor. V množině $\{0, m, 2m, 3m, \dots, (n-1)m\}$ je n čísel, která při dělení číslem n mají navzájem různé zbytky při dělení číslem n , proto v ní existuje (jediné) číslo B , které při dělení číslem n má zbytek b . Podobně ukážeme, že v množině $\{0, n, 2n, 3n, \dots, (m-1)n\}$ existuje číslo A , které má zbytek a při dělení číslem m .

Ukázali jsme, že existuje číslo A dělitelné číslem n , které při dělení číslem m má zbytek a a číslo B dělitelné číslem m , které při dělení číslem n má zbytek b . Proto číslo $A + B$ má zbytek a při dělení číslem m a zbytek b při dělení číslem n . Tedy zbytek po dělení čísla $A + B$ číslem mn je hledané číslo N .

Druhý důkaz dává efektivnější metodu, jak najít číslo N , stačí určit nejvýše $m + n + 1$ zbytků.

Pokud pracujeme se zbytky při dělení přirozenými čísly, můžeme s výhodou využít pojmu kongruence, a zápis našich úvah se stane čitelnější. Pokud dvě celá čísla c a d dávají při dělení přirozeným číslem n stejné zbytky, řekneme, že jsou kongruentní podle modulu n , což zapíšeme $c \equiv d \pmod{n}$ a čteme: „ c je kongruentní s d modulo n .“ Čtenář se s dalšími vlastnostmi kongruencí může seznámit například v [3]. Předcházející větu pak můžeme pomoci kongruencí vyslovit v následujícím tvaru.

Věta 1'

Nechť m a n jsou nesoudělná přirozená čísla a a, b celá čísla. Potom existuje číslo přirozené číslo N takové, že $N \equiv a \pmod{m}$ a $N \equiv b \pmod{n}$. Toto číslo je jediné v kongruenci podle modulu mn .

Ve větách 1 a 1' se předpokládá, že čísla m a n jsou nesoudělná. Zkoumejme nyní případ, kdy tato dvě čísla jsou soudělná.

Označme d po řadě největší společný dělitel čísel m a n a předpokládejme $d > 1$. Pokud existuje takové celé číslo N , pro které platí $N \equiv a \pmod{m}$ a $N \equiv b \pmod{n}$, potom také $N \equiv a \pmod{d}$ a $N \equiv b \pmod{d}$, odkud vyplývá, že $a \equiv b \pmod{d}$. Pokud tato podmínka splněna nebude, nemůže existovat číslo N daných vlastností. Snadno se dá postupem obdobným důkazu věty 1 ukázat, že tato podmínka je i postačující a můžeme tedy vyslovit následující tvrzení, které zobecňuje předchozí věty.

Věta 2

Nechť m a n jsou přirozená čísla a a, b čísla celá. Potom soustava kongruencí

$$\begin{aligned}x &\equiv a \pmod{m}, \\x &\equiv b \pmod{n}\end{aligned}$$

má za předpokladu $a \equiv b \pmod{D(m, n)}$ právě jedno řešení v kongruenci podle modulu $n(m, n)$. Pokud neplatí $a \equiv b \pmod{D(m, n)}$, potom daná soustava kongruencí nemá řešení. Symboly $D(m, n)$ a $n(m, n)$ značí po řadě největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel m a n .

V motivační úloze 1 byla dána soustava tří kongruencí. Obecně jsme měli najít řešení soustavy kongruencí

$$\begin{aligned}x &\equiv a \pmod{m}, \\x &\equiv b \pmod{n}, \\x &\equiv c \pmod{r},\end{aligned}$$

kde m, n, r byla po dvou nesoudělná přirozená čísla a a, b, c celá čísla. Podle věty 1' existuje v kongruenci podle modulu mn právě jedno celé nezáporné číslo N_1 , které řeší první dvě kongruence, tj. platí $N_1 \equiv a \pmod{m}$ a $N_1 \equiv b \pmod{n}$. Opět podle věty 1' ale existuje právě jedno řešení N v kongruenci vzhledem k modulu mnr soustavy kongruencí

$$\begin{aligned}x &\equiv N_1 \pmod{mn}, \\x &\equiv c \pmod{r}.\end{aligned}$$

Protože $N \equiv N_1 \pmod{mn}$, platí $N \equiv a \pmod{m}$ a $N \equiv b \pmod{n}$, tedy číslo N řeší danou soustavu tří kongruencí.

Takový postup můžeme použít i pro soustavu více než tří kongruencí. Tedy platí následující věta, pojmenovaná podle první známé formulace takového problému.

Věta 3 (Čínská zbytková věta)

Nechť $m_1, m_2, \dots, m_k$ jsou po dvou nesoudělná přirozená čísla, kde $m_i \geq 2$ pro $i = 1, 2, \dots, k$ a $a_1, a_2, \dots, a_k$ celá čísla. Potom soustava kongruencí

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ &\dots \\ x &\equiv a_k \pmod{m_k} \end{aligned}$$

má právě jedno řešení v kongruenci podle modulu $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$.

Čtenář jistě najde formulaci této věty v případě, když čísla $m_1, m_2, \dots, m_k$ nebudou po dvou nesoudělná, tj. zobecnění věty 2.

Řešení úlohy 1.

Na řešení úlohy 1 si ukážeme konstruktivnější postup, jak nalézt řešení soustavy více než dvou kongruencí (obdobu jiného důkazu věty 1). Najdeme číslo M , které je dělitelné 5 a 7 a při dělení 3 má zbytek 2, je to například číslo $M = 35$. Číslo $N = 63$ je dělitelné 3 a 7 a při dělení 5 má zbytek 3. Číslo $P = 30$ je dělitelné 3 a 5 a při dělení 7 má zbytek 2. Proto číslo $M + N + P = 128$ má zbytek 2 při dělení 3, zbytek 3 při dělení 5 a zbytek 2 při dělení 7. Protože toto číslo je podle Čínské zbytkové věty určeno jednoznačně v kongruenci podle modulu $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, má hledanou vlastnost z příkladu 1 každé číslo tvaru $128 + 105k$, kde k je libovolné celé číslo. Nejmenší přirozené číslo, které vyhovuje zadání úlohy 1, je číslo 23.

Řešení úlohy 2.

Hledejme řešení úlohy 2. Pro zjednodušení si stačí uvědomit, že hledaný počet vajíček x má při dělení 6 zbytek 1, právě když tento zbytek má i při dělení 2 a 3, tedy podmínku $x \equiv 1 \pmod{6}$ můžeme vypustit. Dále, jestliže má číslo x zbytek 1 při dělení 4, potom má tento zbytek i při dělení 2, tedy i tato podmínka je nadbytečná. Stačí tedy vyřešit následující

soustavu kongruencí (Všimněme si, že po těchto úvahách jsou dělitelé čísla nesoudělná.)

$$x \equiv 1 \pmod{3},$$

$$x \equiv 1 \pmod{4},$$

$$x \equiv 1 \pmod{5},$$

$$x \equiv 0 \pmod{7}.$$

Podle Čínské zbytkové věty tato soustava kongruencí má jediné řešení vzhledem k modulu $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. Jedno z řešení najdeme podobně jako při řešení úlohy 1, je to např. číslo $280 + 105 + 336 + 0 = 721$. Tedy všechna celá čísla x , která vyhovují zadání příkladu 2 jsou čísla $721 + 420k$, kde k je libovolné celé číslo. Nejmenší přirozené číslo x dané vlastnosti je číslo 301.

Další příklady

V předchozích odstavcích jsme zjistili, že najít řešení soustavy kongruencí při zadaných modulech není problém. Při praktických aplikacích se ukazuje, že podstatnější na Čínské zbytkové větě je tvrzení o existenci a jednoznačnosti takového řešení. Uveďme několik příkladů z posledních let, kde se v různých mezinárodních matematických soutěžích žáků středních škol dala Čínská zbytková věta s výhodou využít.

Úloha 3 (50. Mezinárodní matematická olympiáda)

Nechť n je přirozené číslo a $a_1, \dots, a_k$ ($k \geq 2$) jsou navzájem různá celá čísla z množiny $\{1, \dots, n\}$ taková, že pro každé $i = 1, \dots, k-1$ je číslo $a_i(a_{i+1} - 1)$ dělitelné n . Dokažte, že číslo $a_k(a_1 - 1)$ není dělitelné n .

Řešení. Označme p^m ($m \geq 1$) nejvyšší mocninu prvočísla p , která ještě dělí n , tj. $p^m \mid n$ a $p^{m+1} \nmid n$. Předpokládejme, že $n \mid a_k(a_1 - 1)$. Uvažujme dva případy:

- Pokud $p \mid a_k$, potom ze skutečnosti $n \mid a_{k-1}(a_k - 1)$ plyne $p^m \mid a_{k-1}$, odtud a z faktu $n \mid a_{k-2}(a_{k-1} - 1)$ plyne $p^m \mid a_{k-2}$ atd. až $p^m \mid a_1$. Z podmínky $n \mid a_k(a_1 - 1)$ plyne $p^m \mid a_k$.
- Pokud $p \nmid a_k$, potom $a_1 \equiv 1 \pmod{p^m}$ a z faktu $n \mid a_1(a_2 - 1)$ plyne $a_2 \equiv 1 \pmod{p^m}$ atd. až $a_k \equiv 1 \pmod{p^m}$.

V obou případech jsme zjistili, že buď $a_i \equiv 0 \pmod{p^m}$ pro všechna $i = 1, \dots, k$ nebo $a_i \equiv 1 \pmod{p^m}$ pro všechna i . Jelikož toto platí pro

všechna prvočísla z prvočíselného rozkladu čísla n , plyne ze skutečnosti $a_i \in \{1, \dots, n\}$ a z Čínské zbytkové věty (využijeme jednoznačnost), že $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, což podle zadání není možné. Tím jsme dospěli ke sporu s předpokladem $n \mid a_k(a_1 - 1)$.

Čínskou zbytkovou větu dále můžeme využít při řešení následujících příkladů, kdy její tvrzení použijeme k důkazu existence několika pomocných kongruencí.

Úloha 4 (17. Balkánská matematická olympiáda)

Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje taková n -prvková množina X navzájem různých přirozených čísel, že aritmetický průměr prvků libovolné její neprázdné podmnožiny je druhá, třetí, nebo větší mocnina přirozeného čísla.

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro každé přirozené číslo n existuje taková množina n přirozených čísel, že aritmetický průměr její libovolné neprázdné podmnožiny je přirozené číslo. Nechtě $a_1, \dots, a_n$ je n -tice navzájem různých přirozených čísel. Označme k nejmenší společný násobek čísel $1, 2, \dots, n$. Pokud položíme $b_i = k \cdot a_i$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$, bude aritmetický průměr libovolné podmnožiny množiny $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ přirozené číslo. Nechtě $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ je množina aritmetických průměrů všech podmnožin této množiny. Nechtě $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ je množina navzájem různých prvočísel (budou to exponenty mocnin jednotlivých aritmetických průměrů).

Nechtě p je libovolné prvočísla, které dělí některé číslo z množiny C . Označme α_i pro všechna i nejvyšší mocninu prvočísla p , která ještě dělí číslo c_i . Potom podle Čínské zbytkové věty existuje přirozené číslo K tak, že pro všechna $i = 1, \dots, m$ platí $K \equiv -\alpha_i \pmod{d_i}$. Nyní pro množinu čísel $\{p^K b_1, p^K b_2, \dots, p^K b_n\}$ bude $\{p^K c_1, p^K c_2, \dots, p^K c_m\}$ množina aritmetických průměrů jejích podmnožin. Všimněme si, že nejvyšší mocnina prvočísla p , která dělí prvek $p^K c_i$ této množiny, je násobkem čísla d_i . Zopakujeme-li tuto úvahu pro každé prvočísla, které dělí některé z čísel množiny C , získáme nakonec n -prvkovou množinu, která má tu vlastnost, že aritmetický průměr libovolné její podmnožiny je některou mocninou přirozeného čísla.

Poznámka. Poznamenejme, že tento způsob konstrukce množiny X je nepraktický v tom smyslu, že vede k velmi velkým číslům množiny X . Hle-

dejme tříprvkovou množinu X s danou vlastností. Například množina $\{2, 4, 6\}$ má tu vlastnost, že aritmetický průměr libovolné její podmnožiny je přirozené číslo, můžeme ji tedy považovat za výchozí množinu $\{b_1, b_2, b_3\}$. Množina všech aritmetických průměrů jejích podmnožin je $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, její prvky jsou dělitelné prvočíslly 2, 3 a 5. Nechtě $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ je výchozí množina exponentů d_i . Pro prvočíslo 2 je číslo K_2 například 483, pro prvočíslo 3 je $K_3 = 560$ a pro prvočíslo 5 je $K_5 = 1980$. Tedy příklad tříprvkové množiny hledaných vlastností je množina $X = \{2^{484}3^{560}5^{1980}, 2^{485}3^{560}5^{1980}, 2^{484}3^{561}5^{1980}\}$. Opravdu, množina aritmetických průměrů jejích podmnožin je

$$\{2^{484}3^{560}5^{1980}, 2^{483}3^{561}5^{1980}, 2^{485}3^{560}5^{1980}, 2^{483}3^{560}5^{1981}, 2^{484}3^{561}5^{1980}\} = \\ \left\{ (2^{242}3^{280}5^{990})^2, (2^{97}3^{187}5^{660})^3, (2^{161}3^{112}5^{396})^5, \right. \\ \left. (2^{69}3^{80}5^{283})^7, (2^{44}3^{51}5^{180})^{11} \right\}.$$

Další dvě úlohy mohou posloužit k procvičení uvedené tematiky.

Úloha 5 (1. Středoevropská matematická olympiáda, [4])

Určete všechna kladná celá čísla k s vlastností: existuje celé číslo a takové, že $(a + k)^3 - a^3$ je násobkem čísla 2 007.

Úloha 6 (11. Matematická olympiáda USA)

Dokažte, že existuje takové přirozené číslo k , že pro všechna přirozená čísla n je číslo $2^n \cdot k + 1$ složené.

Literatura

- [1] *Andrescu, T. – Andrica, D.*: Number Theory: Structures, Examples, and Problems, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin 2009.
- [2] *Bradley C. J.*: Introductions to Number Theory and Inequalities, UK Mathematics Trust, 2006.
- [3] *Herman J. – Kučera R. – Šimša J.*: Metody řešení matematických úloh I, MU, Brno 1996.
- [4] *Horák K. a kol.*: 56. ročník matematické olympiády na středních školách, JČMF, Praha 2008.

Zajímavé matematické úlohy

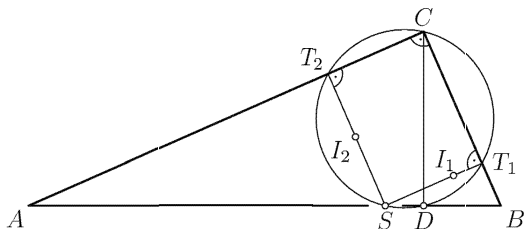
Uvádíme řešení úloh 163 a 164, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle tohoto (19.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 163

Nechť D je pata výšky k přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC . Označme I_1 střed kružnice vepsané trojúhelníku BCD a T_1 její bod dotyku se stranou BC . Dále označme I_2 střed kružnice vepsané trojúhelníku CAD a T_2 její bod dotyku se stranou AC . Dokažte, že se přímky T_1I_1 a T_2I_2 protínají na přeponě AB .

Gottfried Perz (Graz)

Řešení: Přímky T_1I_1 a T_2I_2 jsou kolmé po řadě ke stranám BC a AC . Označme S průsečík přímek T_1I_1 a T_2I_2 . Čtyřúhelník ST_1CT_2 je pravoúhelník; jeho vrcholy leží na kružnici s průměry CS a T_1T_2 .



Trojúhelník ADC je obrazem trojúhelníku CDB v zobrazení složeném z otočení se středem v bodě D a úhlem $+90^\circ$ (viz obr.) a stejnolehlosti se středem D a koeficientem $\frac{|AC|}{|BC|}$. (Toto zobrazení se v literatuře často nazývá *spirální podobnost*.)

Protože bod T_2 je obrazem bodu T_1 v uvedené spirální podobnosti, jsou přímky T_2D a T_1D navzájem kolmé. Podle Thaletovy věty leží bod D na kružnici s průměrem T_1T_2 . Jiným průměrem této kružnice je ale také úsečka CS , proto v případě $D \neq S$ je úhel CDS pravý a bod S leží na přeponě AB . V případě $D \equiv S$ na ní ovšem leží také. Tím jsme ukázali, že bod S nutně leží na přeponě AB .

Jiné řešení: Stejně jako v předcházejícím řešení označíme S průsečík přímk $T_1 I_1$ a $T_2 I_2$ a ukážeme, že $ST_1 CT_2$ je pravoúhelník. Označíme-li a, b, c obvyklým způsobem délky stran trojúhelníku ABC , plyne z podobnosti trojúhelníků ADC a CDB , že $|BT_1| = \frac{a}{b} \cdot |CT_2|$ a $|CT_1| = |ST_2| = \frac{a}{b} \cdot |AT_2|$. Podle Pythagorovy platí v pravoúhlém trojúhelníku $AT_2 S$

$$|AS| = \sqrt{|AT_2|^2 + |ST_2|^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \cdot |AT_2| = \frac{c}{b} \cdot |AT_2|.$$

Podobně ukážeme, že

$$|BS| = \sqrt{|BT_1|^2 + |CT_2|^2} = \frac{c}{b} \cdot |CT_2|.$$

Potom ale $|AS| + |BS| = \frac{c}{b} \cdot (|AT_2| + |CT_2|) = c$. Pokud by bod S neležel na přeponě AB , podle trojúhelníkové nerovnosti by platilo $|AS| + |BS| > |AB| = c$, což je spor. Proto bod S leží na přeponě AB .

Poznámka. Ze vztahu $|AS| = \frac{c}{b} \cdot |AT_1|$ a z podobnosti trojúhelníků ABC a ACD dále plyne, že bod S je dotykovým bodem kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranou AB .

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Petr Boroš*, *Simona Domesová*, *Jakub Solovský* a *Lenka Šumbalová*, všichni z GMK v Bílovci, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Michal Horák*, *David Klačka* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Adam Juraszek* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova, *Miroslav Olšák* z GB v Praze 5, *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Petr Pařízek* z GBN v Hradci Králové, *Jáchym Sýkora* z z G ChD v Praze 5, *Dan Šafka* z GJK v Praze, *Trung Ha Duc* z MG v Plzni, *Petáková* a *Martina Vaváčková* z GPdC v Táboře.

Neúplné řešení zaslali *Vladimír Pavel* z Blovic a *Anna Chejnovská* z GBN v Hradci Králové.

Úloha 164

Najděte všechna reálná čísla x , pro která platí

$$(\sin^3 x + \cos^3 x)(\sin^5 x + \cos^5 x) = 2(\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x).$$

Ján Mazák (Košice)

Řešení: Užitím vztahu

$$\begin{aligned}\sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x) (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x\end{aligned}$$

zjistíme, že daná rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$\begin{aligned}(\sin^3 x + \cos^3 x) (\sin^5 x + \cos^5 x) &= \\ = 2 (\sin^4 x + \cos^4 x) (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x).\end{aligned}\quad (1)$$

Ukážeme, že jejím řešením není reálné číslo x , pro které platí $\cos x = 0$. Pokud by jím bylo, platilo by $|\sin x| = 1$, což po dosazení do rovnice (1) vede ke sporu $1 = 2$. Obě strany rovnice (1) tedy můžeme vydělit nenulovým číslem $\cos^8 x$. Substitucí $y = \operatorname{tg} x$ získáme z rovnice (1) rovnici

$$(y^3 + 1)(y^5 + 1) = 2(y^4 + 1)(y^4 - y^2 + 1),$$

kterou upravíme do tvaru

$$0 = (y - 1)^2(y^6 + 2y^5 + y^4 - y^3 + y^2 + 2y + 1).\quad (2)$$

Není těžké ukázat, že výraz $y^6 + 2y^5 + y^4 - y^3 + y^2 + 2y + 1$ nabývá pro reálná čísla y pouze kladných hodnot. Plyne to například z rovnosti

$$y^6 + 2y^5 + y^4 - y^3 + y^2 + 2y + 1 = (y^2 - 1)^2(y + 1)^2 + \frac{1}{2}y^2(y^2 + 3(y + 1)^2 + 1).$$

Rovnice (2) má proto jediné řešení $y = 1$, kterému vzhledem k použité substituci odpovídá řešení původní rovnice tvaru $x = \frac{1}{4}\pi + k\pi$, kde k je libovolné celé číslo.

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Filip Hlásek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Jaromír Karmazín* z G ve Velkém Meziříčí, *David Kláška* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Miroslav Olšák* z GB v Praze 5, *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Petr Ryšavý* z GJH v Praze a *Dan Šafka* z GJK v Praze.

Dodatečně redakce obdržela správná řešení úloh číslo 160 a 162 od *Petra Boroše* z GMK v Bílovci a správné řešení úlohy číslo 162 od *Františka Jáchima* z Volyně.

Pavel Calábek