

MATEMATIKA

Několik logických úloh

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V počátcích tzv. modernizace vyučování matematiky se na učitele a žáky od základní školy až po maturity nahrnuly nové poznatky, které málokterý učitel v potřebném rozsahu znal nebo si pamatoval z dob svých studií (binární relace, výroková logika, ad.). Došlo k mohutnému doškolení učitelů všech stupňů a výsledkem bylo, že řada učitelů (za pomoci lektorů Šedivého knihy O modernizaci školské matematiky [1] a učebních skript) pochopila užitečnost těchto ve výuce nových témat, která měla šanci více naplnit tradiční heslo, že (školní) matematika vede žáky k přesnému logickému uvažování. Pak však bylo oprávněně zjišťováno, že rozsah tzv. modernizace byl přespříliš velký a jako reakce byla větší část modernizačních témat vypuštěna. Moudří učitelé (včetně řady mladých) však některé elementy teorie množin, binárních relací a výrokové logiky podrželi ve svých učebních plánech, nejprve ilegálně, později i legálně.

Jedním z témat, které budí pozornost, je logická analýza textu, tj. převádění vhodných úloh do jazyka logických symbolů a jejich řešení užitím tabulek pravdivosti. Ty umožňují řešit vcelku jednoduše i úlohy, které jinak potřebují třeba i složité úvahy. Tedy pro výcvik logického myšlení je nejvydatnější takový postup, že nejprve řešíme problém úvahami a výsledné tvrzení *ověříme* užitím tabulek pravdivosti. Ale i *řešení úloh* užitím tabulek pravdivosti vydatně přispívá k rozvoji logického myšlení.

Jako reprezentanta běžných logických úloh si uveďme jednu úlohu z [1].

Úloha 1

O třech bratřích A , B , C je známo, že A nejde do lesa bez C , zatímco B nechodí nikdy s C , ale jde vždy, když jde A . Víme-li, že B jde do lesa, kdo ho doprovází?

Řešení. Zavedme tři výroky: výrok A nechť znamená „ A jde do lesa“. (Nijak nám nemusí vadit, že A znamená člověka i výrok o něm.) Podobně mějme výroky B a C .

První podmínku „ A nejde do lesa bez C “ lze vyjádřit též: *vždy, když jde do lesa A , jde i C* , neboli $A \Rightarrow C$. Druhá podmínka „ B nechodí nikdy s C “ není formulována zcela jednoznačně, není zcela zřejmé, jestli B nechodí do lesa *sám* s C , nebo B *nejde nikdy, když jde C* . První interpretace je $\neg(B \wedge C \wedge \neg A)$, druhá pak $\neg(B \wedge C)$ nebo též $C \Rightarrow \neg B$. Třetí podmínka „ B jde vždy, když jde A “ pak znamená $A \Rightarrow B$ a tyto tři podmínky mají platit současně. K posouzení máme tedy složený výrok

$$(A \Rightarrow C) \wedge \neg(B \wedge C \wedge \neg A) \wedge (A \Rightarrow B)$$

nebo výrok

$$(A \Rightarrow C) \wedge \neg(B \wedge C) \wedge (A \Rightarrow B).$$

Pravdivostní hodnotu závěru (konjunkce tří složených výroků) zjistíme užitím tabulky pravdivosti (tab. 1). Připomeňme si: do levého záhlaví zapíšeme všechny možné kombinace pravdivosti a nepravdivosti (tj. nul a jedniček), do horního záhlaví vyšetřovaný složený výrok a pak postupně po řádcích ohodnocujeme každou ze tří částí konjunkce; jejich pravdivostní hodnota je vyznačena tučně. Protože jde o konjunkci tří výroků, přidáme do záhlaví heslo *Závěr* a do sloupce pod ním zapisujeme postupně zjišťované pravdivostní ohodnocení výsledné konjunkce tří dílčích částí zadaného složeného výroku.

A	B	C	$(A \Rightarrow C) \wedge \neg(B \wedge C \wedge \neg A) \wedge (A \Rightarrow B)$				Závěr
1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1

Tab. 1

Vyplňování tabulky lze zjednodušit tak, že např. pro vyhodnocení implikace $A \Rightarrow C$ není nutno pod A a C psát jejich pravdivostní hodnoty,

protože můžeme bez problémů použít hodnoty A a C v levém záhlaví. (Podobně ve všech dalších tabulkách používáme tuto úsporu.) Dílčí výsledky základních tří výroků jsou uvedeny tučně, i závěr (v rámečku).

V *Závěru* máme 4 řádky se splněnými podmínkami (s jedničkami v posledním sloupci), ale jen ve dvou případech jde podle zadání úlohy B do lesa (1. a 6. řádek). Nastávají tedy dvě možnosti: buď jde B do lesa s oběma bratry, nebo sám.

Při druhé alternativě druhého výroku, tj. $\neg (B \wedge C)$, se v tabulce 1 změní jen první řádek:

A	B	C	$(A \Rightarrow C) \wedge \neg (B \wedge C \wedge \neg A) \wedge (A \Rightarrow B)$	Závěr
1	1	1	1	0

Nyní jsou podmínky úlohy splněny jen v posledních třech případech, a protože víme, že B jde do lesa, přichází v úvahu jen možnost 0 1 0 v 6. řádku, tj. B jde do lesa sám (autor úlohy v [1] měl na mysli patrně tento případ).

Když v roce 1986 u nás vyšla kniha Raymonda M. Smullyana [2], získali naši zájemci o logické úlohy bohatý a zábavný zdroj takových úloh (řešení jsou zde podávána užitím někdy i složitějších logických úvah). V těchto úlohách se vyskytuje nová situace vzhledem k běžným úlohám zastoupených zde úlohou 1 nebo uvedenými např. v [3]. Rozdíl je v tom, že zatímco tři podmínky v úloze 1 byly nezpochybnitelně dány, setkáme se v [2] s případy, kdy podmínky vyslovují mluvčí, o nichž nevíme, jestli mluví pravdu nebo lžou; tyto úlohy jsou tak v jistém ohledu složitější. Ukážeme si, že i v těchto případech lze použít vhodnou verzi logických tabulek. V ukázkách použijeme mírně upravené úlohy z knihy [2].

Nejprve se přesuneme na ostrov X , kde žijí poctivci, kteří říkají vždy jen pravdu, a padouši, kteří stále lžou. Na procházce po ostrově potkáváme lidi, kteří nám něco řeknou a my máme poznat, kdo z nich je poctivec, jehož radami se můžeme řídit, a kdo padouch.

Úloha 2

Jdou dva ostrované, A a B . A prohlásí: „*Aspoň jeden z nás je padouch.*“ Co jsou A a B ?

Řešení. Nejprve si uvědomíme, jak převést do jazyka logiky sdělení „ A (jenž je poctivec nebo padouch) pronese výrok V “ (který je pravdivý nebo nepravdivý); zaznamenejme je zatím symbolem $A ? V$ a provedme jeho

rozbor. Symbolu $A ? V$ přisudíme pravdivostní hodnotu 1, pokud tato situace může nastat, a hodnotu 0, pokud nastat nemůže.

Jeli A poctivec a výrok V je pravdivý, pak $ph(A ? V) = 1$, situace nastat může; jeli A poctivec a výrok V je nepravdivý, pak $ph(A ? V) = 0$, situace nastat nemůže, protože podle našich pravidel poctivec nemůže říkat lež; jeli A padouch a výrok V je pravdivý, pak $ph(A ? V) = 0$, situace nastat nemůže; neboť padouch nemůže říkat pravdu;

jeli A padouch a výrok V je nepravdivý, pak $ph(A ? V) = 1$, situace nastat může, protože padouch říká jen nepravdu.

Vidíme že symbol $A ? V$ funguje stejně jako ekvivalence dvou výroků, výroku A (jsem poctivec) a výroku V : $A \Leftrightarrow V$.

Úlohu 2 lze tak modelovat vztahem $A \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$, k němuž vytvoříme tabulku (tab. 2), sloupec s výslednými hodnotami pravdivosti je zapsán tučně. V levém záhlaví vypíšeme v řádcích všechny možné kombinace pravdivosti dvou výroků, do horního záhlaví zapíšeme zkoumaný složený výrok, tedy $A \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$. Pozor na pořadí logických operací! Nejprve vyhodnotíme $(\neg A \vee \neg B)$ a až potom ekvivalenci $\Leftrightarrow$.

A	B	$A \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	1	0

Tab. 2

Závěr (pod znakem ekvivalence) vykazuje ve 2. řádku výslednou jedničku, která znamená, že pravdivost (nebo nepravdivost) zkoumaného výroku je ve shodě s příslušnou kombinací pravdivosti v levém záhlaví. Tento řádek tak říká: A je poctivec a B je padouch. Je to docela zajímavá situace, že po jednom složeném výroku od A dovedeme stanovit, co jsou A i B . Vidíme, že jsme výsledek zjistili bez nutnosti hlubokých logických úvah.

Před časem řešil na stránkách MFI [5] jiný autor podobné úlohy způsobem ne nepodobným logickým tabulkám, který umožňuje určité úspory, ale za cenu více logických úvah a přemýšlení. Pro porovnání vyřešme jeho úlohu 1.

Úloha 1'

Sešly se tři dívky: Aneta, Žaneta a Eva. Aneta prohlásila, že Žaneta vždycky mluví pravdu, Eva řekla, že Žaneta je lhářka, Žaneta prohlásila,

že obě zbývající dívky jsou lhářky. Která dívka hovoří pravdu?

Řešení. Opět označíme symbolem A Anetin myšlený výrok „jsem poctivec“ a podobně i pro obě další dívky. Dostáváme tu konjunkci tří výroků $A \Leftrightarrow \check{Z}$, $E \Leftrightarrow \neg \check{Z}$, $\check{Z} \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg E$. Sestavíme tabulku (tab. 3):

A	E	$\check{Z}$	$(A \Leftrightarrow \check{Z}) \wedge (E \Leftrightarrow \neg \check{Z}) \wedge (\check{Z} \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg E))$				Závěr
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0

Tab. 3

Výsledek je ovšem tentýž, pravdu řekla jen Eva.

V [4] najdeme zajímavou úlohu s překvapivým závěrem.

Úloha 3

Vyprávěl jeden Američan: „Na ostrově X jsem potkal dva obyvatele, A a B . Zeptal jsem se A : „*Mluvíš vždycky pravdu?*“ On odpověděl „*Ta-rabara.*“ „*On řekl ano,*“ objasnil B anglicky a dodal: „*Ale on je hrozný lhář.*““

Řešení. To, že A (možná) řekl, že A je pravdomluvný se zaznamená jako $A \Leftrightarrow A$; tato ekvivalence je pravdivá vždy, ať A mluví pravdu nebo lže. To je ve shodě s tím, že A řekne *mluvím pravdu*, když mluví pravdu, ale i když lže, řekne též *mluvím pravdu*. Na základě sdělených podmínek si Američan vytvořil tabulku (tab. 4).

A	B	$(B \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow A)) \wedge (B \Leftrightarrow \neg A)$					
1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0

Tab. 4

Ze sloupce pod znakem konjunkce pak plyne výsledek: A je padouch a B je poctivec.

Američan s trochou mužské ješitnosti se pochlubil ženě, jak funguje mužská logika, a vyzval ji, ať se také snaží tuto úlohu vyřešit. Ta na to šla s ženskou logikou a do dvou minut měla úlohu vyřešenu; řekla: „Když A řekl *tarabara*, znamenalo to, že neumí anglicky, rozhodně tedy nemohl říci *ano* ani *ne*, ale snad něco jako *Nerozumím*. Proto je B lhář, když tvrdí, že A řekl *ano*. A protože je lhář a řekl o A , že je lhář, musí být A poctivec.“ Posuďte sami, v čem spočívá tento rozpor.

Ukažme si nyní případ, že osoby jsou tři.

Úloha 4

Na ostrově X jsem potkal tři osoby, A , B a C . Zeptal jsem se A : „*Jsi poctivec nebo padouch?*“ A odpověděl, ale nesrozumitelně. Proto jsem se zeptal B : „*Co říkal?*“ B odpověděl: „*Říkal, že je padouch.*“ Nato řekl C : „*Nevěřte B, on lže.*“ Co můžeme zjistit o A , B a C ?

Řešení. Vyvození, že C je poctivec a B je padouch je v této úloze zcela jednoduché. Ukažme si však řešení užitím logických tabulek pravdivosti. Z úvah při řešení úlohy 2 plyne, že údajný výrok pana A zněl *Já jsem padouch*, což lze modelovat ekvivalencí $A \Leftrightarrow \neg A$, která má však pravdivostní hodnotu 0, neboť takový výrok nemohl pan A pronést ani jako poctivec, ani jako padouch. (Předpokládáme, že A rozuměl otázce a že řekl *Já jsem padouch* nebo *Já jsem poctivec* a ne něco jiného, viz úlohu 3.) Avšak protože to o A řekl pan B , je logický model výroku pana B : $B \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg A)$. Výrok pana C už lze vyjádřit jednoduše ekvivalencí $C \Leftrightarrow \neg B$. Vytvoříme tabulku 3 (levé i horní záhlaví) a postupně ji vyplňujeme (tab. 5). Vytvoříme ji bez zjednodušení použitého v tab. 2.

A	B	C	$(B \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg A)) \wedge (C \Leftrightarrow \neg B)$											
1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0			
1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0			
1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1			
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1			
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0			
0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0			
0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1			
0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1			

Tab. 5

Soulad pravdivosti v levém záhlaví s konjunkcí výroků v horním záhlaví nastává v řádce 1 0 1 a v řádce 0 0 1, odkud plyne, že B byl padouch a C poctivec (co byl A , to nevíme).

Úloha 5

Řekneme, že dva obyvatelé ostrova X mají stejnou povahu, právě když jsou oba poctivci nebo oba padouši. Máme nyní 3 obyvatele A , B , C . A říká „ B je padouch“ a B říká „ A i C mají stejnou povahu.“ Co je C ?

Řešení. Výrok pana A lze zapsat $A \Leftrightarrow \neg B$, výrok pana B zapíšeme $B \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow C)$. Sestavíme si tabulku pravdivost (tab. 6).

A	B	C	$(A \Leftrightarrow \neg B) \wedge (B \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow C))$		
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1

Tab. 6

Ve výsledném sloupci (pod znakem konjunkce) vidíme, že podmínkám úlohy vyhovují dva případy, 1 0 0 a 0 1 0; v obou případech je $ph(C) = 0$, tedy C je padouch.

Obyvatel ostrova X může také vypovídat jen o sobě.

Úloha 6

Mladík z ostrova X prohlásil: *Miluji Lindu, a jestli miluji Lindu, miluji i Katku*. Je to poctivec nebo padouch?

Řešení. $ph(A)$ udává, jestli je A poctivec nebo padouch, $ph(L)$ říká, zda miluje Lindu, a $ph(K)$, zda miluje Katku. Již známým postupem dostaneme tabulku 7.

A	L	K	$(A \Leftrightarrow L) \wedge (A \Leftrightarrow (L \Leftrightarrow K))$		
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

Tab. 7

Z výsledného sloupce pod znakem konjunkce vidíme, že mladík je poctivec a že miluje Lindu i Katku.

V této úloze se můžeme pokusit i o kratší postup průzkumem, které případy mohou nastat. Označme L objektivní výrok (tj. nikoli výrok mladíka) A miluje Lindu a podobně K výrok A miluje Katku. Tabulka 7a přinese odpověď.

L	K	L	$\wedge (L \leftrightarrow K)$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Tab. 7a

Vidíme, že obě podmínky jsou splněny současně jen v 1. řádku. V dalších třech řádcích jsou zadané podmínky v rozporu, takže A miluje Lindu i Katku. (Stačí to?)

Nyní přejdeme na ostrov Y , kde žijí poctivci, padouši i normální lidé, tj. takoví, že někdy mluví pravdu a někdy lžou. Podle toho jsou lidé rozdělení do tří kast; nejvyšší kasta je kasta poctivců, střední je kasta normálních lidí a v nejnižší kastě jsou padouši.

Úloha 7

Potkáváme tři ostrovany a víme, že každý z nich je z jiné kasty. A říká: „ B je z vyšší kasty než C .“ (Zapišme jako $B > C$.) B říká: „ C je z vyšší kasty než A .“ ($C > A$) Pak C dostane otázku: „ Kdo je z vyšší kasty, A nebo B ?“ Co odpoví?

Řešení. Sestavíme tabulku, v níž označíme $N1$ normálního člověka, který právě mluví pravdu a $N0$ normálního člověka, který právě lže, a do levého záhlaví vypíšeme všechny možnosti (tab. 8). První podmínku zapišeme $A \leftrightarrow (B > C)$, druhou jako $B \leftrightarrow (C > A)$, současné splnění obou podmínek vzhledem ke kombinaci pravdivosti v levém záhlaví vyjádří jejich konjunkce.

Z výsledného sloupce pod znakem konjunkce vidíme, že obě podmínky jsou v souladu s kombinacemi pravdivosti $1N00$ a také $0N11$. V prvním případě je A poctivec, tedy $A > B$, ale C je padouch a tak zalže a odpoví „ B je z vyšší kasty než A “, ve druhém případě je A padouch, takže $B > A$, a ježto je C poctivec, řekne podle pravdy také „ B je z vyšší kasty než A “. Tento výsledek bychom dostali přímo i užitím tabulky pravdivosti, když

A	B	C	$(A \Leftrightarrow (B > C))$		$\wedge$	$(B \Leftrightarrow (C > A))$	
1	N1	0	1	1	0	0	0
1	N0	0	1	1	1	1	0
1	0	N1	0	0	0	1	0
1	0	N1	0	0	0	1	0
N1	1	0	1	1	0	0	0
N1	0	1	0	0	0	0	1
N0	1	0	0	1	0	0	0
N0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	N1	0	1	0	1	1
0	N1	1	1	0	1	1	1
0	N0	1	1	0	0	0	1

Tab. 8

bychom v horním záhlaví přidali ještě třetí podmínku $C \Leftrightarrow (B > A)$ a vyhodnotili konjunkci všech tří podmínek.

V další úloze si ukážeme použití tabulek pravdivosti ještě u jiného typu úloh.

Úloha 8

Na ostrově Z žil lev, který lhal v pondělí, v úterý a ve středu, jinak mluvil pravdu, a jednorožec, který lhal ve čtvrtek, v pátek a v sobotu, jinak mluvil pravdu. Když jsem přišel na ostrov, řekl lev „*Včera jsem měl lhací den*“ a jednorožec dodal „*Já měl včera také lhací den.*“ Který den v týdnu jsem přišel na ostrov?

Řešení. Výrok lva označme VL , výrok jednorožce VJ . Máme tedy posoudit konjunkci výroků $L \Leftrightarrow VL$ a $J \Leftrightarrow VJ$, kde L je výrok *Lev mluví pravdu*, takže v případě $ph(L) = 0$ lev lže, a podobně výrok J znamená *Jednorožec mluví pravdu se dvěma možnými pravdivostními hodnotami*. Oba výroky však v průběhu týdne mění svoji pravdivost. Proto do levého záhlaví zapíšeme jednotlivé dny v týdnu a příslušné pravdivostní hodnoty výroků L a J (tab. 9).

	L	J	$(L \Leftrightarrow VL)$		$\wedge$	$(J \Leftrightarrow VJ)$			
po	0	1	0	1	0	1	0	0	
út	0	1	0	0	1	0	1	0	0
st	0	1	0	0	1	0	1	0	0
ct	1	0	1	1	1	1	0	1	0
pa	1	0	1	0	0	0	0	0	1
so	1	0	1	0	0	0	0	0	1
ne	1	1	1	0	0	1	1	1	1

Tab. 9

Ze sloupce pod znakem konjunkce vidíme, že jsem na ostrov Z dorazil ve čtvrtek.

Podobné téma s „lhacími dny“ jsme našli i v soutěži Matematický klokan. V [6] má 3. úloha z roku 2000 toto znění:

Úloha 9

Chytrá horákyňe od pondělí do středy jenom lže, ostatní dny mluví pouze pravdu. Který den mohla říct:

V1: Včera jsem lhala.

V2: Zítra budu lhát.

Řešení. Chytrá horákyňe tedy řekla dva výroky a úloha se ptá, který den v týdnu mohou být současně oba vysloveny. Sestavíme tabulku (tab. 10).

	(H ⇔ V1)				∧	(H ⇔ V2)			
po	0	1	0	0	0	0	0	1	
ut	0	0	1	0	0	0	0	1	
st	0	0	1	0	0	0	1	0	
ct	1	1	1	0	1	0	0		
pa	1	0	0	0	1	0	0		
so	1	0	0	0	1	0	0		
ne	1	0	0	0	1	1	1		

Tab. 10

Z tabulky vidíme, že výrok V1 mohl být vyřčen jen v pondělí nebo ve čtvrtek a výrok V2 jen ve středu a v neděli, proto ve výsledném sloupci pod znakem konjunkce jsou samé nuly. Takový den, kdy by mohly být proneseny oba výroky, tedy neexistuje. V tom se shodujeme s řešením uvedeným v [6].

V [7] (pro starší studenty) je v roce 2000 velmi podobná úloha pod číslem 2. Uvedeme nyní její přesné znění a zjistíme, že „nepatrný“ rozdíl mezi nimi je docela podstatný.

Úloha 10

Chytrá horákyňe od pondělí do středy vždy lhala a zbytek týdne vždy mluvila pravdu. Který den mohla říci:

„Lhala jsem včera a budu lhát zítra.“

Řešení. Podstatný rozdíl oproti předchozí úloze spočívá v tom, že tentokrát neřekla horákyňe dva výroky, ale *jeden výrok* složený, a to $V1 \wedge V2$. Proto i tabulka pravdivosti je jiná (tab. 11).

$$(H \Leftrightarrow V1 \wedge V2)$$

po	0	1	0	0	1
ut	0	0	1	1	1
st	0	1	1	0	0
ct	1	0	1	0	0
pa	1	0	0	0	0
so	1	0	0	0	0
ne	1	0	0	0	1

Tab. 11

Výsledek čteme ve sloupci pod znakem ekvivalence a vidíme, že tento složený výrok mohla chytrá horákyně pronést buď v pondělí nebo ve středu. V těchto dvou dnech je vždy jedna část složeného výroku pravdivá a druhá nepravdivá, takže výsledná konjunkce je nepravdivá a mohla být v těchto dvou lhacích dnech pronesena. Tím se lišíme od řešení uvedeného v [7].

Užitím tabulek pravdivosti lze řešit mnoho dalších úloh různých typů, jaké najdeme např. v [2]. Nevýhodou je někdy to, že když máme více osob nebo více podmínek, mohou být tabulky nepříjemně rozsáhlé.

Literatura

- [1] Šedivý, J.: O modernizaci školské matematiky. Druhé rozšířené vydání, SPN Praha, 1969.
- [2] Smullyan, R. M.: Jak se jmenuje tahle knížka? Mladá fronta, Praha 1986.
- [3] Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky. Prometheus, Praha 2002.
- [4] Gardner, R.: Mathematical puzzles and diversions (ruské vydání: Matematičeskije golovolomki i razvlečenija). Mir, Moskva 1971.
- [5] Mazurek, J.: Pravdomluvní a lháři. MFI r. 18 (2008/09) s. 139 144.
- [6] Horenský, R. – Rys, P. – Zhouf, J. – Molnár, J.: Počítejte s klokanem, kategorie „Junior“, 2000 2004. Prodos spol s r.o., 2007.
- [7] Calábek, P. – Švrček, J.: Počítejte s klokanem, kategorie „Student“, 2000 2004. Prodos spol s r.o., 2007.

Přístup k matematizaci prostřednictvím úloh rekreační matematiky

FRANTIŠEK ŠÍMA

VŠTE, České Budějovice

Obvyklé slovní úlohy při výuce matematiky na školách jsou do jisté míry typové a zpravidla se jen velmi stručně zabývají praxí, o které pojednávají. Při jejich řešení se často mechanicky označí neznámé, aniž by se příliš sledoval jejich praktický význam, sestaví se rovnice (zpravidla se ví předem, jakého typu bude), rovnice se formálně vyřeší a provede se zkouška. Na tomto postupu není nic špatného, ale tak trochu se ztrácí širší význam pojmu *matematizace reálných situací* – užití matematického modelování při řešení reálných problémů (viz např. [1]). Např. to, že při vytváření modelu nevíme předem, jaký bude, nebo že tvoříme model nikoli pro jednu konkrétní úlohu, ale pokoušíme se modelovat typ zadané úlohy (nalézt „obecný model“). Vhodným zdrojem netypických úloh pro řešení užitím matematizace mohou být některé úlohy rekreační matematiky, které bývají neobvyklé, pro něž matematický model je teprve třeba vymyslet a které navíc vyvolávají zájem studentů. Projdeme si některé úlohy.

Úloha 1

Kdosi koupil 30 ptáků za 30 penízů. Za tři vrabce platil jeden peníz, za dvě hrdličky též jeden peníz, za jednoho holuba dva peníze. Kolik ptáků každého druhu koupil?

(Úloha pochází z knihy [3] a její autorství je zde připisováno Leonardu Pisanovi, zvanému Fibonacci.)

Řešení. Provedeme analýzu problémové situace a zjistíme, že cílem řešení je určit jednotlivé počty ptáků. Neznámé hodnoty počtu postupně označíme x – počet vrabců, y – počet hrdliček, z – počet holubů, kde x , y , z jsou přirozená čísla (vyjadřují počty ptáků; z textu úlohy plyne, že od každého druhu máme alespoň jeden kus). Mohli bychom ještě zkoumat, jaké jsou

největší možné počty jednotlivých druhů ptáků, ale počkejme si, zda to bude zapotřebí.

Protože součet počtu všech ptáků je 30, dostáváme první rovnici modelu úlohy

$$x + y + z = 30.$$

Jeden vrabec stojí $\frac{1}{3}$ peníze, tedy x vrabců stojí $\frac{1}{3}x$ penízů; jedna hrdlička stojí $\frac{1}{2}$ peníze, tedy y hrdlíček stojí $\frac{1}{2}y$ penízů a konečně jeden holub stojí 2 peníze, tedy z holubů stojí $2z$ penízů. Tak dostáváme druhou rovnici

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30.$$

Modelem úlohy je tak soustava diofantických rovnic:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 30 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z &= 30.\end{aligned}$$

Po vyloučení z dospějeme k diofantovské rovnici $10x + 9y = 180$, z toho

$$y = 20 - \frac{10}{9}x.$$

Proveďme nyní horní odhad velikosti x ; ježto $y > 0$, je i pravá strana předchozí rovnice kladná, z čehož plyne $x \in \{1, 2, \dots, 17\}$, a protože je x zřejmě dělitelné devíti, je $x = 9$. Odtud ihned máme $y = 10$ a $z = 11$.

Odpověď: Neznámý koupil 9 vrabců, 10 hrdlíček a 11 holubů.

Poznámka. Ve všech úlohách *zkoušku* vždy provedeme dosazením vypočtených hodnot do textu a ověřením splnění podmínek úlohy. Z technických důvodů zkoušky vynecháváme a jejich provedení ponecháváme na čtenáři.

Úloha 2

Matka má 9 dětí, narozených v pravidelných intervalech. Věky všech jsou dány celými počty let. Součet čtverců věků všech devíti dětí je roven čtverci matčína věku. Jak jsou staří?

(Tato úloha pochází z knihy [2], autor ji nabízí „pro trpělivé počtáře“ a varuje: „Řešení této úlohy je už mistrovský kousek. Kdo nevěří, ať to zkusí.“)

Řešení. Popsaná situace není opět příliš reálná, ale u úloh rekreační matematiky se na to tak nehledí, protože jejich úkolem není popis reálné situace, ale pobavení řešitele.

Nejprve zvolme neznámé. Věk nejmladšího dítěte označme x , konstantní rozdíl věku dětí y a věk matky z . Všechna čísla x , y , z jsou přirozená (pro x připustíme i nulu).

Zadanou úlohu lze modelovat kvadratickou rovnicí o třech neznámých

$$x^2 + (x + y)^2 + (x + 2y)^2 + (x + 3y)^2 + (x + 4y)^2 + (x + 5y)^2 + (x + 6y)^2 + (x + 7y)^2 + (x + 8y)^2 = z^2.$$

řešenou (z pohledu matematiky) v oboru přirozených číslech. Při matematizaci však bývá vhodné (jak jsme viděli již v první úloze) neodevzdat úlohu jen „do rukou matematiky“, ale při řešení si uvědomovat význam a možné rozsahy proměnných. Např. zde je výraznou vlastností zadání, že rozdíl věku prvního a posledního dítěte je $8y$, což nemůže přesáhnout dobu, po kterou může žena rodit děti. Takže i když hodně přidáme, musíme uznat praktický předpoklad $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Řešme nyní modelovou rovnici. Po její úpravě dostáváme:

$$9x^2 + 72xy + 204y^2 = z^2,$$

na levé straně rovnice vytkneme číslo 3:

$$3(3x^2 + 24xy + 68y^2) = z^2.$$

Odsud plyne, že výraz na levé straně rovnice je dělitelný třemi, a proto také z^2 je dělitelné třemi, tj. $3|z^2 \rightarrow 3|z$ a můžeme psát $z = 3k$, $k \in \mathbb{N}$.

Potom platí:

$$\begin{aligned} 3(3x^2 + 24xy + 68y^2) &= (3k)^2 \\ 3(3x^2 + 24xy + 68y^2) &= 9k^2 & | : 9 \\ x^2 + 8xy + \frac{68}{3}y^2 &= k^2 \end{aligned}$$

a z toho plyne, že také y^2 a tedy i y je dělitelné třemi, protože výraz na levé straně rovnice je celé číslo. Podle výše uvedeného praktického předpokladu je tedy $y = 3$ a danou rovnici lze postupně upravit na tvar

$$\begin{aligned} k^2 &= x^2 + 24x + 204 \\ k^2 &= (x + 12)^2 + 60. \end{aligned}$$

Nyní můžeme postupovat takto: provedeme odhad: pro $x \geq 0$, je $k^2 \geq 204$, tj. $k \geq 15$. Proto vyzkoušíme $k = 15, 16, \dots$ a zjistíme, že řešení máme pro $k = 16$ (tj. $z = 48$), $x = 2$ (ale není dokázána jednoznačnost).

Jiná možnost: Poslední rovnici rozložíme na tvar:

$$(k - x - 12) \cdot (k + x + 12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5;$$

protože druhý výraz je minimálně o 24 větší než první, *jediná* možnost je

$$k - x - 12 = 2$$

$$k + x + 12 = 30.$$

Odsud $k = 16$, $x = 2$. Potom $z = 48$.

Odpověď: Jediným řešením dané úlohy je tedy věk matky 48 let a stáří devíti dětí: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 a 26 let.

Úloha 3

Tráva na louce roste všude stejně hustě a stejně rychle. Víme, že 70 krav by ji vypáslo za 24 dní, zatímco 30 krav by ji vypáslo za 60 dní. Kolik krav vypase louku za 96 dní?

(Úloha pochází z knihy [3] a byla upravena podle Newtonovy úlohy, kterou se budeme zabývat později.)

Řešení A. Vytvořme si obecný model dané reálné situace. Označme proměnné z oboru přirozených čísel

p počet krav,
 d za kolik dní je louka spasena,
 m kolik trávy je na louce,
 n kolik trávy naroste za den,
 q kolik trávy spase za den jedna kráva.

Předpokládejme, že hodnoty m , n a q jsou zadány v nějaké společné jednotce množství trávy. Nyní vyjádříme základní vlastnost zadání: p krav za d dní spase celkem pdq trávy, tj. všechnu tu, co na louce již byla i tu, co za d dní narostla, celkem $m + nd$. Takže obecný základ modelu naší reálné situace je

$$pdq = m + nd. \quad (1)$$

Do rovnice (1) dosadíme konkrétní údaje z obou zadaných případů:

$$\begin{aligned}70 \cdot 24 \cdot q &= m + 24n \\ 30 \cdot 60 \cdot q &= m + 60n\end{aligned}\tag{2}$$

K tomu ještě přidejme model našeho problému, najít x takové, že x krav spase louku za 96 dní:

$$96 \cdot x \cdot q = m + 96n\tag{3}$$

a pak soustava (2) a rovnice (3) jsou modelem naší problémové reálné situace. Řešme nyní zadaný problém. Když od druhé rovnice (2) odečteme první, dostaneme po úpravě

$$\frac{10}{3}q = n\tag{4}$$

a po dosazení za n ze (4) do některé z rovnic (2) máme $m = 1600q$. Po dosazení za n a m do (3) máme

$$96 \cdot x \cdot q = 1600q + 96 \cdot \frac{10}{9}q,$$

odkud $x = 20$.

Odpověď: Celou louku spase za 96 dní 20 krav.

Viděli jsme, že proměnná q tu hrála roli parametru a na její hodnotě však při konstantním růstu trávy (n) řešení úlohy nezáviselo; tedy řešení se nemění, ať (každá) kráva spase za den jakékoli množství trávy. Z toho dostáváme myšlenku dalšího způsobu řešení, kdy za jednotku množství trávy volíme q , tj. v (1) volíme $q = 1$ (Při řešení B se postupuje stejně jako při řešení A , nebudeme je zde předvádět.)

Řešení C. Předně z (1) plyne

$$q = \frac{m + nd}{pd}.\tag{5}$$

V tomto řešení zvolme za jednotku množství trávy m , tj. volíme $m = 1$. Vložíme konkrétní údaje.

Množství $1 + 24n$ spotřebuje 70 krav za 24 dní, takže jedna kráva spase za jeden den $q = \frac{1+24n}{24 \cdot 70}$. Stejnou úvahou dostaneme $q = \frac{1+60n}{60 \cdot 30}$ trávy.

Porovnáním $\frac{1+24n}{24 \cdot 70} = \frac{1+60n}{60 \cdot 30}$ dostaneme přírůstek trávy za jeden den: $n = \frac{1}{480}$.

Z předchozích vztahů vypočítáme, jak velkou část původního množství trávy spase jedna kráva za jeden den $q = \frac{1+24n}{24 \cdot 70} = \frac{1+24 \cdot \frac{1}{480}}{24 \cdot 70} = \frac{1}{1600}$.

Nyní uvažujeme, že x krav spase louku za 96 dní. Jedna kráva spase za jeden den $q = \frac{1+96n}{96 \cdot x} = \frac{1+96 \cdot \frac{1}{480}}{96 \cdot x} = \frac{1}{1600}$ trávy.

Řešením této rovnice je $x = 20$.

Řešení D. Inspirací dalšího způsobu řešení je vztah (4), který nám říká, že veškerá tráva, která vyroste za den ($n = 1$) je beze zbytku spotřebována deseti třetinami krav (je to myšleno tak, že tři krávy se pasou celý den a jedna jen třetinu dne).

Při řešení úlohy tímto způsobem rozdělíme krávy teoreticky na dvě skupiny. Jedna skupina krav spásá dorůstající trávu, druhá trávu už dříve vyrostlou. Velikost první skupiny je přímo úměrná velikosti louky a není závislá na čase, protože tráva roste stále, ani na celkové velikosti stáda. Druhá skupina také záleží na velikosti louky a je nepřímo úměrná času; čím je tato skupina menší, tím déle trvá pastva.

Velikost první skupiny označíme s a velikost druhé skupiny s_1 při 70 kravách ve stádu a s_2 při 30 kravách. Tedy

$$s + s_1 = 70$$

$$s + s_2 = 30.$$

Původní trávu na louce vypáslo s_1 krav za 24 dní a s_2 krav za 60 dní, tj. $s_1 : 24 = s_2 : 60$, odkud $s_2 = \frac{2}{5}s_1$. Po dosazení za s_2 do předchozí soustavy dostáváme soustavu

$$s + s_1 = 70$$

$$s + \frac{2}{5}s_1 = 30,$$

jejímž řešením je: $s = 3\frac{1}{3}$, $s_1 = 66\frac{2}{3}$.

Tím jsme zjistili, že narůstající trávu bude nepřetržitě spásat $3\frac{1}{3}$ krav a již na počátku narostlou trávu za 24 dní vypase $66\frac{2}{3}$ krav. Nyní se ptáme, kolika kravám to bude trvat 96 dní. Jak již bylo zmíněno, jedná se o nepřímou úměrnost.

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad 66\frac{2}{3} \text{ ks} \dots\dots\dots 24 \text{ dní} \quad \downarrow \\ \quad \quad s_2 \text{ ks} \dots\dots\dots 96 \text{ dní} \end{array}$$

Odsud $s_2 = 16\frac{2}{3}$ ks, takže celkový počet krav je $s + s_2 = 3\frac{1}{3} + 16\frac{2}{3} = 20$.

Úloha 4

Prvá louka o velikosti 100 měr stačí 80 kravám na pastvu po dobu 14 neděl. Pustíme-li tam však na pastvu 120 krav, spasou trávu za 7 neděl. Druhá louka má 400 měr. Máme určit, kolik kusů se na ní může pást po dobu 4 neděl za předpokladu, že tráva je všude stejná i při spasení stejnoměrně dorůstá a všechny krávy spotřebují stejně.

(Úloha je z knihy [2] a autor uvádí, že takovéto úlohy se nalézaly ve všech učebnicích algebry jako vzorové příklady matematického myšlení.)

Řešení. Tato úloha se liší od předchozí v tom, že máme dvě louky s různou výměrou v . Opět vytvoříme model dané reálné situace.

1. louka v_i [měr] p_i [ks] t_i [týd.],
2. louka v_k [měr] p_k [ks] t_k [týd.].

Kromě uvedených hodnot (neznámé či parametry – dle zadání úlohy) zavedeme ještě neznámou r , která představuje přírůstek nové trávy na jednotce plochy za jednotku času [týd.]. (Souvisí tedy s hodnotou n , ale má jinou velikost.)

Za t_i týdnů přiroste na ploše m_i celkem $m_i \cdot t_i \cdot r$ trávy; za t_i týdnů spase p_i krav $m_i + t_i \cdot m_i \cdot r$ trávy, tj. $m_i(1 + t_i \cdot r)$ trávy a za jeden týden spase jedna kráva $q_i = \frac{m_i \cdot (1 + t_i \cdot r)}{t_i \cdot p_i}$ trávy, srovnej s (5).

Stejně tak v druhém případě za týden spase jedna kráva $q_k = \frac{m_k \cdot (1 + t_k \cdot r)}{t_k \cdot p_k}$ trávy.

Protože hodnoty q_i, q_k se rovnají, dostáváme obecný model dané reálné situace, který vlastně vznikne rozepsáním vzorce (1), a to

$$\frac{m_i \cdot (1 + t_i \cdot r)}{t_i \cdot p_i} = \frac{m_k \cdot (1 + t_k \cdot r)}{t_k \cdot p_k}, \text{ kde} \quad (6)$$

m_i, m_k je spásaná plocha v jednotlivých případech,

t_i, t_k je doba spásání v jednotlivých případech,

p_i, p_k je počet ks krav v jednotlivých případech,

r je množství trávy, která naroste na jednotce plochy za jednotku času.

Vidíme, že zde šlo o úpravu postupu při modelování v úloze 2. Řešme nyní zadanou úlohu s konkrétními údaji.

Zadání: 100 měř spase 80 krav za 14 neděl,
100 měř spase 120 krav za 7 neděl,
400 měř spase x krav za 4 neděle.

Použijeme-li vzorec (6) na první dva řádky zadání, vypočteme $r = \frac{1}{14}$. Dosadíme tuto hodnotu do (6) a použijme (6) pro druhý a třetí řádek zadání; dostaneme $x = 720$.

Odpověď: Druhou louku o ploše 400 měř spase za 4 neděle 720 krav.

Jiné řešení. Můžeme rovněž použít postupu při vytváření modelu v případě D předchozí úlohy. Krávy opět rozdělíme na dvě skupiny, první spásá dorůstající travu, druhá travu už dříve vyrostlou. Při stejném významu proměnných velikost první skupiny označíme s a velikost druhé skupiny s_1 při 80 kravách ve stádu a s_2 při 120 kravách. Tedy

$$\begin{aligned}s + s_1 &= 80 \\ s + s_2 &= 120.\end{aligned}$$

Původní travu na louce vypáslo s_1 krav za 14 týdnů a s_2 krav za 7 týdnů, z čehož plyne $s_2 = 2s_1$. Po dosazení za s_2 do předchozí soustavy dostáváme soustavu

$$\begin{aligned}s + s_1 &= 80 \\ s + 2s_1 &= 120,\end{aligned}$$

jejímž řešením je: $s = 40$, $s_1 = 40$. Takže 40 krav bude spásat dorůstající travu na 100 měřích, ale na 400 měřích to zvládne až 160 krav. Druhých 40 krav spase za 14 týdnů 100 měř původní trávy, $\frac{14}{4} \cdot 40 = 140$ krav spase za 4 týdny 100 měř, $4 \cdot 140 = 560$ krav spase za 4 týdny 400 měř. K nim přidejme ještě 160 krav pasoucích se na dorůstající travě a máme $x = 720$.

Úloha 5

Tři louky se stejně hustou travou, která stejně rychle roste, mají obsahy ploch $3\frac{1}{3}$ ha, 10 ha a 24 ha. První louka stačila 12 býkům na dobu 4 týdnů a druhá louka stačila 21 býkům na dobu 9 týdnů. Kolik býků se může na třetí louce pást 18 týdnů?

(Úloha je z knihy [4] a nazývá se *Newtonova úloha*.)

Řešení. Tato úloha se liší od předchozích tím, že máme 3 louky. Model vyjádřený vzorcem (6) je však vhodný i pro tuto úlohu, podobný je i postup řešení.

Zadání: $3\frac{1}{3}$ ha spase 12 býků za 4 týdny,
 10 ha spase 21 býků za 9 týdnů,
 24 ha spase x býků za 18 týdnů.

Jestliže použijeme (6) na první dva řádky zadání, vypočteme $n = \frac{1}{12}$. Dosadíme-li tento údaj do (6) a použijeme tento vzorec pro druhý a třetí řádek zadání, vypočteme $x = 36$.

Odpověď: Po dobu 18 týdnů užíví louka o ploše 24 ha 36 býků.

Jiné řešení. U této úlohy se traduje ještě jeden zajímavý model dané reálné situace, který spočívá na této myšlence. Množství trávy, které je na počátku na 1 ha louky vezmeme za jednotku. Množství trávy, které vyroste na jednotce plochy za jednotku času, je pak relativní částí u této jednotky. Např. když $u = \frac{1}{5}$, pak to znamená, že za jednotku času (týden) naroste na 1 ha stejné množství trávy, jako bylo na $\frac{1}{5}$ ha louky původně. Pro všechny tři louky tak platí, že původně je na louce množství v_i jednotek trávy a za t_i týdnů přiroste na každém hektaru ut_i a na celé louce v_it_iu ; množství trávy je tedy takové, jako by narostlo na $v_i + v_it_iu = v_i(1 + t_iu)$ hektarech. Tím jsme vlastně z úvah vyloučili problém růstu trávy. Jestliže tento výraz dělíme počtem p_i býků a počtem t_i týdnů, dostaneme q , tj. kolik trávy spotřebuje za týden jeden býk:

$$q = \frac{v_i(1 + t_iu)}{p_it_i}. \quad (7)$$

Dostali jsme opět obecný matematický model dané situace, stejně jako je (5). Nyní jej použijeme pro konkrétní vstupní údaje naší úlohy.

Protože q je stejné pro všechny tři louky, dostaneme v našich třech případech postupně

$$q_1 = \frac{3\frac{1}{3}(1 + 4u)}{12 \cdot 4} = \frac{10 + 40u}{144},$$

$$q_2 = \frac{10(1 + 9u)}{21 \cdot 9} = \frac{10 + 90u}{189},$$

a pro x býků na třetí louce

$$q_3 = \frac{24(1 + 18u)}{18x}$$

Porovnáním $q_1 = q_2$ vypočteme $u = \frac{1}{12}$ a porovnáním např. $q_1 = q_3$ dostaneme $x = 36$.

Jiné řešení. Čtenář si může vyzkoušet, že k modelování situace lze využít i postup, jaký jsme použili v řešení *D* úlohy 3 a v řešení *B* úlohy 4.

Literatura

- [1] *Trávníček, S.*: Matematizace reálných situací, MFI 11 (2001/2002), č. 7, s. 388–398.
- [2] *Dobrovolný, B.*: Matematické rekreace, Polytechnická knihnice, Praha 1969.
- [3] *Konforovič, A. G.*: Významné matematické úlohy, SPN, Praha 1989.
- [4] *Perel'man, J. I.*: Zajímavá algebra, Polytechnická knihnice, Praha 1985.
- [5] *Smida, J. a kol.*: Matematika pro I. ročník gymnázií, SPN, Praha 1984.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 5. 2010 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 167

V rovině jsou dány úsečky AB a CD . Najděte všechny body V této roviny, pro které mají trojúhelníky ABV a CDV stejný obsah.

Šárka Gergelitsová

Úloha 168

a) Dokažte, že existuje přirozené číslo n , pro něž je číslo

$$\sqrt{2n-1} + \sqrt{5n-1}$$

racionální, a že existuje přirozené číslo m , pro něž je číslo $\sqrt{2m-1} + \sqrt{5m-1}$ iracionální.

b) Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $\sqrt{3n-1} + \sqrt{4n-1}$ iracionální.

Jaroslav Zhouf