

MATEMATIKA

Extrémy kubické funkce metodou neurčitých koeficientů

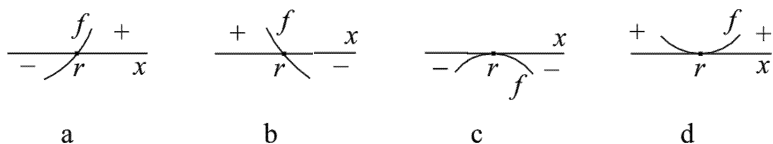
PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

S využíváním vlastností kvadratické funkce se středoškoláci učí řešit jednoduché extrémální úlohy bez užití diferenciálního počtu. Nyní si ukážeme, jak lze elementárním postupem určovat i maxima a minima kubické funkce.

Vydeme z poznatků a představ, jež jsou rozvíjeny v učivu o řešení rovnic a nerovnic v součinném tvaru. Tam se vychází z intuitivní představy polynommické funkce (s reálnými koeficienty) jako funkce spojitě v $\mathbb{R}$. Nulovým bodem funkce $y = f(x)$ budeme nazývat reálné číslo r , pro které platí $f(r) = 0$. Je-li tato funkce f polynommická a není-li konstantní, máme právě čtyři možnosti průběhu jejího znaménka v okolí nulového bodu r :

1. Při přechodu přes nulový bod se znaménko funkční hodnoty mění z „mínus“ na „plus“ (obr. 1a). Funkce je rostoucí v okolí čísla r .
2. Znaménko se mění z „plus“ na „mínus“, obr. 1b – klesající funkce.



Obr. 1

3. Hodnota funkce je v dostatečně malém okolí nulového bodu r záporná pro všechna $x \neq r$. Pak má funkce lokální maximum v bodě r , jak vidíme na obr. 1c.

4. Hodnota funkce je v dostatečně malém okolí nulového bodu r kladná pro všechna $x \neq r$, funkce má lokální minimum v bodě r (obr. 1d).

Uvažujme dále kubickou funkci f danou vztahem

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad (1)$$

kde a, b, c, d jsou reálná čísla ($a \neq 0$), a hledejme, za jakých podmínek má funkce lokální extrém ve svém nulovém bodě r . Zřejmě platí

$$f(x) - f(r) = a(x^3 - r^3) + b(x^2 - r^2) + c(x - r) + d - d.$$

Odtud užitím známých vztahů $x^3 - r^3 = (x - r)(x^2 + rx + r^2)$ a $x^2 - r^2 = (x - r)(x + r)$ dostaneme

$$f(x) - f(r) = a(x - r)g(x),$$

kde $g(x)$ je kvadratická funkce tvaru $g(x) = x^2 + px + q$, $p = (b + ar)/a$ a $q = (ar^2 + br + c)/a$.

Abychom zjistili, za jakých podmínek má funkce f lokální extrém v nulovém bodě r , rozlišíme následující možnosti:

- Číslo r není nulovým bodem funkce $g(x)$. V tomto případě se při přechodu přes číslo r se nezmění znaménko funkce g , avšak znaménko výrazu $a(x - r)$ se změní. Proto i funkce f změní znaménko přechodem přes r , a tak v bodě r nemá lokální extrém.
- Číslo r je dvojnásobným nulovým bodem funkce $g(x)$. Funkce f má tvar $f(x) - f(r) = a(x - r)^3$ a v bodě r roste nebo klesá podle toho, zda je a kladné či záporné.
- Je-li konečně $g(x) = (x - r)(x - s)$, kde $s \neq r$, pak $f(x) - f(r) = a(x - r)^2(x - s)$. Zřejmě existuje takové okolí bodu r , které neobsahuje bod s . V něm je znaménko výrazu $a(x - s)$ stejné pro všechna x a souhlasné se znaménkem funkce f pro $x \neq r$. Toto znaménko je určeno znaménkem čísla $a(r - s)$.

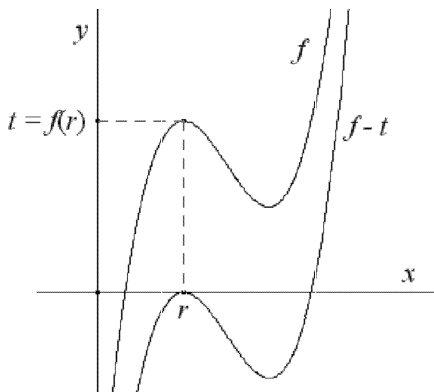
Je-li navíc $a(r - s) < 0$, nastává situace 3 a funkce f má v bodě r lokální maximum. Pro $a(r - s) > 0$, nastává v čísle r lokální minimum (situace 4). Za jiných podmínek zřejmě funkce f nemá ve svém nulovém bodě lokální extrém. Na obr. 2 jsou obě situace znázorněny pro $r < s$ pomocí schémat, jaká žáci užívají při řešení nerovnic v součinném tvaru.

$\overbrace{\hspace{1.5cm}}^r \hspace{0.5cm} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^s \hspace{0.5cm} x$			$\overbrace{\hspace{1.5cm}}^r \hspace{0.5cm} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^s$		
-		-	+		+
+		+	+		+
-		-	+		+

$a(r-s)$	+		+		-
$(x-r)^2$	+		+		+
f	+		+		-

Obr. 2

S otázkou, za jakých podmínek má funkce f lokální extrém t v čísle r , které není jejím nulovým bodem, si snadno poradíme posunutím grafu funkce f o vektor $\vec{u} = (0, -t)$ (jednu z možných situací ilustruje obr. 3): Funkce $f(x)$ má v bodě r lokální extrém $f(r) = t$, právě když má funkce $g(x) = f(x) - t$ v r lokální extrém $g(r) = 0$.



Obr. 3

Z dosavadních úvah plyne následující věta, jejíž využití při určování lokálních extrémů ukážeme na několika příkladech.

Věta 1

Kubická funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) má lokální extrém v bodě r , právě když existuje číslo $s \neq r$, pro něž platí

$$f(x) - t = a(x - r)^2(x - s). \quad (2)$$

Tento extrém je maximum, právě když $a(r - s) < 0$, nebo je minimum, právě když $a(r - s) > 0$.

Příklad 1

Určete lokální extrémy funkce $f : y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$.

Řešení. Podle věty 1 potřebujeme najít čísla t , r a s tak, aby pro každé $x \in \mathbb{R}$ platilo

$$2x^3 - 9x^2 + 12x - 3 - t = 2(x - r)^2(x - s).$$

Roznásobením pravé strany a sloučením koeficientů při stejných mocninách proměnné x odtud dostaneme

$$2x^3 - 9x^2 + 12x - (3 + t) = 2x^3 - 2(2r + s)x^2 + 2(2rs + r^2)x - 2r^2s.$$

Polynom na pravé straně poslední rovnice je roven polynomu na levé straně, právě když se rovnají jejich koeficienty u stejných mocnin x , tedy

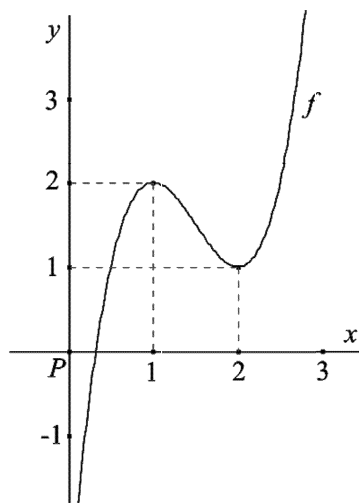
$$-2(2r + s) = -9, \quad 2(2rs + r^2) = 12, \quad -2r^2s = -(3 + t). \quad (3)$$

První dvě z těchto rovnic představují soustavu s neznámými r , s , kterou eliminační metodou upravíme do tvaru

$$s = \frac{9}{2} - 2r \quad \text{a} \quad r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Odtud standardním postupem zjistíme

1. $r_1 = 2$ a $s_1 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$. Číslo $a(r_1 - s_1) = 2(2 - \frac{1}{2}) = 3$ je kladné, proto má funkce f podle věty 1 lokální minimum v bodě $r_1 = 2$. Hodnotu minima určíme pomocí třetí z rovnic (3), $t_1 = 2r_1^2s_1 - 3 = 1$. Pro kontrolu se můžeme výpočtem funkční hodnoty přesvědčit, že $t_1 = f(r_1)$.
2. $r_2 = 1$, $s_2 = \frac{5}{2}$, pak $a(r_2 - s_2) = -3 < 0$. V bodě $r_2 = 1$ má funkce lokální maximum $t_2 = f(1) = 2$.
Graf funkce f je znázorněn na obr. 4.



Obr. 4

Poznámka 1. Při procvičování podobných úloh je vhodné zařadit i příklady kubických funkcí, které nemají lokální extrémy. Vhodné funkce snadno sestavíme sami. Chceme-li mít funkci která vede na typ z odstavce b), zvolíme například funkci danou předpisem $y = (x - 2)^3 + 3$ a žákům ji zadáme v roznásobené podobě $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$, aby ji výše popsaným způsobem upravili na námi původně zvolený tvar, z něž již lze snadno nakreslit graf (posunutím grafu známé funkce $y = x^3$). Funkce, jež vede na typ z odstavce a), může být například daná vztahem $y = (x-1)(x^2+2x+3)$, kterou ovšem žákům zadáme ve tvaru $y = x^3 + x^2 + x - 3$.

Poznámka 2. Bylo by vhodné vysvětlit žákům rozdíl mezi lokálním a absolutním extrémem. Definiční obor funkce z příkladu můžeme omezovat na různé intervaly a požadovat určení lokálních i absolutních extrémů. Po dostatečném procvičení lze na základě získaných zkušeností přijmout následující větu.

Věta 2

Má-li kubická funkce na intervalu J pouze jeden lokální extrém, pak je tento extrém na intervalu J absolutní.

Příklad 2

Plechová konzerva tvaru rotačního válce má povrch 5 dm^2 a maximální objem. Určete její objem a rozměry.

Řešení. Označme R poloměr válce (konzervy) a h jeho výšku. Objem konzervy je dán vztahem $V = \pi R^2 h$, přičemž proměnné R a h jsou vázány podmínkou konstantního obsahu, jež má tvar $2\pi R^2 + 2\pi R h = 5$. Z poslední rovnice určíme

$$h = \frac{5}{2\pi R} - R,$$

dosadíme do předposledního vztahu a vyjádříme objem jako kubickou funkci proměnné R :

$$V = -\pi R^3 + \frac{5R}{2}, \quad \text{přičemž} \quad R > 0. \quad (4)$$

Extrémy této funkce hledáme obdobně jako v předchozí úloze. Rovnici

$$-\pi R^3 + \frac{5R}{2} - t = -\pi(R - r)^2(R - s)$$

upravíme na tvar

$$-\pi R^3 + \frac{5}{2}R - t = -\pi R^3 + \pi(2r + s)R^2 - \pi(2rs + r^2)R + \pi r^2 s,$$

z něhož porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné R obdržíme

$$\pi(2r + s) = 0, \quad -\pi(2rs + r^2) = \frac{5}{2}, \quad \pi r^2 s = -t. \quad (5)$$

Soustavu prvních dvou rovnic snadno převedeme na tvar

$$s = -2r \quad \text{a} \quad 6\pi r^2 = 5,$$

ze kterého určíme

$$r = \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \quad \text{a} \quad s = -2\sqrt{\frac{5}{6\pi}},$$

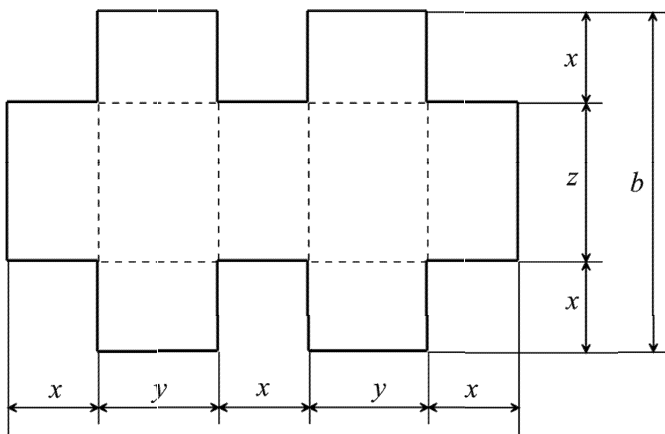
neboť záporné hodnoty r jsou vyloučeny definičním oborem funkce V . Dosazením zjistíme, že je výraz $a(r - s)$ záporný.

Můžeme tedy (na základě vět 1 a 2) konstatovat, že objem konzervy je největší při poloměru $R = \sqrt{5/(6\pi)} \text{ dm} \doteq 5,2 \text{ cm}$.

Výška konzervy je $h = 5/(2\pi R) - R = 2\sqrt{5/(6\pi)} \text{ dm} \doteq 10,4 \text{ cm}$ a objem $V_{\max} = \pi R^2 h = \sqrt{125/(54\pi)} \text{ dm}^3 \doteq 0,74 \text{ litru}$. Povšimněme si, že $h = 2R$. Osový řez válce je čtverec.

Příklad 3

Z kartónu ve tvaru obdélníku o rozměrech $a = 3u \text{ cm}$ a $b = 2u \text{ cm}$ ($u > 0$) má být zhotovena krabice tvaru kváдру s překrytím na třech stěnách a maximálním objemem. Její síť a označení rozměrů znázorňuje obr. 5. Určete rozměry a objem krabice.



Obr. 5

Řešení. Objem krabice je $V = xyz$, přičemž $y = 3(u - x)/2$ a $z = 2(u - x)$, jak plyne z obr. 5. Je tedy

$$V = 3x(u - x)^2 \quad \text{a} \quad 0 < x < u, \quad (6)$$

neboť rozměry kváдру musí být kladná čísla. Analogicky, jako v předchozích příkladech, zjistíme

$$3x^3 - 6ux^2 + 3u^2x - t = 3x^3 - 3(2r + s)x^2 + 3(2rs + r^2)x - 3r^2s$$

a odtud

$$2r + s = 2u, \quad 2rs + r^2 = u^2, \quad 3r^2s = t. \quad (7)$$

První dvě rovnice jsou ekvivalentní se soustavou

$$s = 2(u - r) \quad \text{a} \quad 3r^2 - 4ur + u^2 = 0,$$

z níž určíme $r = \frac{1}{3}u$, $s = \frac{4}{3}u$ a $a(r - s) = -u < 0$. Druhý kořen $r_2 = u$, který je ostatně zřejmý již ze vztahu (6), nepatří do definičního oboru funkce. Rozměry složené krabice maximálního objemu jsou

$$x = r = \frac{u}{3} \text{ cm}, \quad y = 3(u - x) = 2u \text{ cm}, \quad z = 2(u - x) = \frac{4u}{3} \text{ cm}^3$$

a její objem $V_{\max} = \frac{8}{9}u^3 \text{ cm}^3$.

Čtenáře možná napadlo, že při práci se studenty by se dala výše uvedená řešení urychlit: Odvodit nejprve Viètovy vztahy mezi kořeny a koeficienty algebraické rovnice a pak už jen podle nich sestavovat klíčové rovnice. Považují však za vhodnější, když žáci nejprve dobře pochopí a procvičí metodu neurčitých koeficientů, pomocí níž se ostatně Viètovy vztahy odvozují. Metoda spočívá v porovnání koeficientů u stejných mocnin proměnné polynomu vyjádřeného dvěma různými způsoby. Je užitečným nástrojem při řešení řady problémů a její osvojení je přínosem k rozvoji matematického myšlení. Neměla by být opomíjena ve středokolské matematice.

Elementární metody hledání extrémů funkcí mohou být vhodným námětem pro samostatné práce studentů a lze je použít i v různých projektech, protože mají široké uplatnění v praxi. Článek uzavřeme několika neřešenými úlohami, které mohou posloužit k procvičení uvedené metody i jako inspirace pro žákovské aktivity.

Úlohy k procvičení

1. Součet dvou čísel je 12. Najděte tato čísla, jsou-li obě kladná a součin jednoho s druhou mocninou druhého je maximální.
2. Z plechu tvaru pravoúhelníka $20 \text{ cm} \times 32 \text{ cm}$ máme v rozích vystřihnout čtverce o straně délky x tak, abychom po ohnutí pravoúhelníků, které vznikly odstřižením čtverců, a sletování těch okrajů délky x , které se ohnutím dostaly k sobě, obdrželi krabici tvaru kvádra, jehož objem je maximální. Určete x .

3. Krabice tvaru kvádru má dvakrát větší délku než šířku a povrch (včetně dna a víka bez překrytí) 108 cm^2 . Jaký je její největší možný objem?
4. Do koule o poloměru R vepište rotační kužel o největším plášti.
5. Určete výšku rotačního kužele, který má při dané straně s co největší objem.
6. Do parabolické úseče vytvořené parabolou $6y = x^2$ a přímkou $y = 9$ vepište rovnoramenný lichoběžník se základnami rovnoběžnými s osou x tak, aby obsah lichoběžníku byl co největší.
7. Do rotačního kužele o poloměru r a výšce h vepište válec maximálního objemu.

Literatura

- [1] *Mordkovič, A. G.*: Extrémy polynomu třetího stupně, Kvant, 1974, č. 11, Nauka, Moskva 1974.

Číslo π ve tvaru nekonečného součinu

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Čtenáři je jistě známo, že existuje celá řada vyjádření čísla π jako součtu nekonečné řady (viz např. [1]), nebo jako součinu nekonečné mnoha činitelů. Středoškolské studenty však s nimi seznámit nemůžeme, protože k odvození většiny z nich je nutno použít matematických znalostí, které těmto studentům nejsou známé. Samozřejmě si nemyslím, že bychom je s těmito poznatky seznamovat měli, ale někdy by to pro některé z nich užitečné být mohlo. V následujícím odvození čísla π jako nekonečného součinu budeme potřebovat pouze znalosti, které tito studenti (aspoň někteří) znají.

Ze známého vztahu $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, který platí pro všechna reálná čísla x , dostaneme n rovností:

$$\begin{aligned}\sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \\ \sin \frac{x}{2} &= 2 \sin \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \\ \sin \frac{x}{2^2} &= 2 \sin \frac{x}{2^3} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \\ &\vdots \\ \sin \frac{x}{2^{n-2}} &= 2 \sin \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \cos \frac{x}{2^{n-1}} \\ \sin \frac{x}{2^{n-1}} &= 2 \sin \frac{x}{2^n} \cdot \cos \frac{x}{2^n}\end{aligned}$$

Dosadíme-li nyní do předposlední z nich za $\sin \frac{x}{2^{n-1}}$ pravou stranu rovnosti poslední, vznikne rovnost

$$\sin \frac{x}{2^{n-2}} = 2^2 \sin \frac{x}{2^n} \cdot \cos \frac{x}{2^n} \cdot \cos \frac{x}{2^{n-1}}.$$

Pokračujeme-li tímto způsobem dále, dostaneme nakonec dosazením za $\sin \frac{x}{2}$ do první rovnosti, že pro všechna reálná x platí

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \cdot \cos \frac{x}{2^n} \cdot \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \cos \frac{x}{2^{n-2}} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2},$$

neboli (ale už jen pro $x \neq k\pi$)

$$\frac{2^n \sin \frac{x}{2^n}}{\sin x} = \cos^{-1} \frac{x}{2} \cdot \cos^{-1} \frac{x}{2^2} \cdot \dots \cdot \cos^{-1} \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \cos^{-1} \frac{x}{2^n}. \quad (1)$$

Čitatel zlomku na levé straně (1) upravíme na tvar

$$x \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}$$

a vypočteme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = x,$$

neboť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = 1.$$

V obou stranách rovnosti (1) necháme nyní n vzrůstat nade všechny meze, čímž pro $x \neq k\pi$ dostaneme, že její levá strana bude rovna

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\sin x} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x} = \frac{x}{\sin x}.$$

Na její pravé straně bude součin nekonečně mnoha činitelů

$$\cos^{-1} \frac{x}{2} \cdot \cos^{-1} \frac{x}{2^2} \cdot \cos^{-1} \frac{x}{2^3} \cdot \cos^{-1} \frac{x}{2^4} \cdot \dots$$

Je tedy

$$\frac{x}{\sin x} = \cos^{-1} \frac{x}{2} \cdot \cos^{-1} \frac{x}{2^2} \cdot \cos^{-1} \frac{x}{2^3} \cdot \dots,$$

odkud dosazením $x = \frac{1}{2}\pi$ dostaneme vyjádření čísla π nekonečným součinem:

$$\frac{\pi}{2} = \cos^{-1} \frac{\pi}{4} \cdot \cos^{-1} \frac{\pi}{8} \cdot \cos^{-1} \frac{\pi}{16} \cdot \cos^{-1} \frac{\pi}{32} \cdot \dots = \prod_{k=2}^{\infty} \cos^{-1} \frac{\pi}{2^k}.$$

Tento výsledek upravíme ještě tak, že ze vztahu $\cos \frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pomocí vzorce

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{x}{2}}{2}}$$

vypočteme postupně

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \cos \frac{\pi}{16} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \dots,$$

Dosazením do rovnosti pro $\frac{1}{2}\pi$, kterou jsme odvodili výše, dostaneme toto pozoruhodné vyjádření čísla π :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \cdot \dots$$

Doufám, že mi bude prominuto, keď tento matematický článok zakončím rečníckou otázkou:

Existuje nejaký čtenář, jehož žádnému oku tento výsledek nelahodí?

L i t e r a t u r a

- [1] *Calda, E.*: Kterak od jedné vlastnosti Fibonacciho posloupnosti ku číslu π dospěti možno jest. MFI, roč. 8, č. 4.

Návrhy matematických diktátov na stredných školách

VLADIMÍR STREČKO

Prešovská univerzita, Prešov, SLOVENSKO

V príspevku je prezentovaný systém matematických diktátov aplikovateľných na stredných školách. Príspevok je zároveň podnetom na tvorbu uvedenej formy vyučovania, ktorá v matematicko-pedagogickom procese evidentne zvyšuje kvalitu matematických zručností študentov SŠ. Experimentálne bolo potvrdené, že systematická celoročná aplikácia matematických diktátov zlepšila klasifikačný stupeň v 5. a 6. ročníku ZŠ v priemere o 0,5 klasifikačného stupňa [4]. Potvrdilo sa, že najväčší efekt pri použití uvedenej formy preverovania vedomostí žiakov sa potvrdil u žiakov s chválitebným a dobrým prospechom. Chceme zdôrazniť, že návrhy diktátov predstavujú len časť mohutného spektra učiva matematiky na SŠ.

Matematický diktát je jednou z foriem, ktorú môže učiteľ matematiky využiť na efektívne preverovanie vedomostí žiakov. Učiteľ si z určitej témy vopred zostaví systém zadávaných úloh (spravidla 5 až 8), ktoré môžu na seba nadväzovať. Na priesvitné fólie alebo na výkres si pripraví aj potrebné zápisy a obrázky. Na ich zobrazenie použije spätný projektor alebo magnetickú tabuľu. Pred písaním diktátu učiteľ skontroluje, či žiaci majú

pripravené písacie, prípadne i rysovacie potreby, ktoré budú potrebovať pri práci.

Odporúča sa, aby učiteľ prečítal najprv celý text diktátu [2], čo nie je vždy nevyhnutné. V tomto štádiu majú žiaci právo pýtať sa na prípadné nejasnosti v zadaní úloh. Potom učiteľ postupne diktuje primeraným tempom text úloh s dostatočnými prestávkami na vypracovanie. Sleduje, či žiaci pracujú samostatne.

Počas samotného vykonávania úloh by už žiaci nemali klásť žiadne otázky. Ak je diktát ukončený, učiteľ umožní žiakom v priebehu 1 až 2 minút prezrieť si svoju prácu a vykonať posledné úpravy.

Čas potrebný na realizáciu diktátu môže byť 5 až 40 minút. Diktát sa zvyčajne zaraďuje na začiatok vyučovacej hodiny. Vtedy úlohy diktátu nadväzujú na zadanie domácej úlohy. Môže však byť i aplikovaný na konci vyučovacej hodiny, po vysvetlení a precvičení nového učiva. Analýza výsledkov riešení úloh z diktátu potom učiteľovi ukáže, či bol dosiahnutý cieľ hodiny, a ktoré momenty je potrebné opätovne vysvetliť a precvičiť.

Pri písaní prvých diktátov je žiaduce žiakom hneď po realizácii diktátu dôkladne objasniť vykonanie jednotlivých úloh, ako aj ukázať požadované zápisy. Učiteľ má od žiakov vyžadovať primeranú grafickú úpravu.

Pri systematickom vykonávaní matematických diktátov si žiaci zvyknú na takúto formu práce, a ich príprava a prevedenie nemusí byť časovo náročné. Pokiaľ si žiaci ešte nezvykli na diktáty, neodporúča sa ich známkovať. Učiteľ by mal pri analýze diktátu vyzdvihnúť zlepšenie vedomostí, a spomenúť prípadné nedostatky u konkrétnych žiakov. Ak žiak bol klasifikovaný negatívnou známkom, učiteľ by mu mal venovať zvýšenú pozornosť, a dodatočne môže preveriť jeho vedomosti z danej témy i iným spôsobom.

Zostaveniu diktátov má učiteľ venovať dostatočnú pozornosť. Nesmie pritom zabúdať na výborných žiakov. Samozrejme, úlohy diktátu je potrebné vždy prispôbiť vedomostnej úrovni triedy. Väčšina diktátov vyžaduje od žiakov len zápisy výsledkov, prípadne geometrické konštrukcie. Učiteľ môže vyžadovať taktiež stručný postup riešenia alebo dokončenia vety.

Použitie diktátov má svoje výhody i nevýhody.

Výhody spojené s matematickými diktátmi:

- umožňujú žiakom pracovať samostatne
- ich riešenia môžu byť originálne
- výchova pozornosti žiakov
- pomoc učiteľa a spolužiakov je vylúčená

- všetci žiaci majú rovnaké úlohy, preto je matematický diktát objektívny
- upevňujú presvedčenie žiakov o potrebe systematickej prípravy na vyučovaciu hodinu
- vhodne zvolený matematický diktát pomáha odstraňovať strach z matematiky, a tým posilňuje sebadôveru žiakov, udržiava záujem pri ďalšom osvojovaní vedomostí
- nabáda k sústavnej dôslednej práci
- odhalí tých žiakov, ktorí nepracujú samostatne a neprenikli do podstaty učiva
- preveruje pohotovosť žiakov
- umožňuje zažiť úspech a radosť z dobre vykonanej práce
- upevňuje znalosť matematickej terminológie a symboliky
- poskytuje učiteľovi prehľad o vedomostiach žiakov z daného učiva
- výsledky matematických diktátov sú neskresleným obrazom úspešnosti práce učiteľa.

Nevýhody a ťažkosti spojené s matematickými diktátmi:

- diktáty sú náročnou formou práce pre učiteľa i pre žiaka
- niekedy sa nesprávne chápu (za diktát sa považuje každá práca, zadávaná diktovaním)
- o diktátoch je málo dostupnej literatúry
- grafické vyjadrovanie žiakov nie je na žiaducej úrovni
- nedostatky vo vedomostiach vyradia mnohých žiakov veľmi rýchlo z práce
- oprava a hodnotenie matematických diktátov je náročnejšie ako pri iných metódach kontroly
- strach, resp. stres z matematických diktátov (ktorý je možné odbúrať používaním tejto formy vyučovania počas celého školského roka, pričom klasifikovanie diktátov v prvých fázach ich aplikácie neberieme do úvahy, teda výsledky diktátov slúžia žiakovi a učiteľovi len na zoriento- vanie a prvotné napredovanie v edukácii).

V ďalšom uvedieme konkrétne diktáty aplikovateľné na stredných školách.

DIKTÁT 1

Téma: Kvadratické rovnice a nerovnice

Tematický celok: Funkcie, rovnice, nerovnice I.

Riešte kvadratické nerovnice v množine $\mathbb{R}$:

1. $x^2 < 9$
2. $x^2 \geq 4$
3. $x^2 - 64 \leq 0$
4. $x^2 - 1 > 80$
5. $3x^2 - 12 < 0$
6. $x^2 \leq x$
7. $x^2 < 25x$
8. $x^2 + 6 < 0$
9. $-x^2 - 2 > 0$
10. $x^2 - 2x + 1 < 0$
11. $x^2 - 5x + 6 \leq 0$
12. $x^2 - 4x + 3 > 0$
13. $x^2 - 4x - 12 \geq 0$
14. $x^2 - 7x + 10 < 0$
15. $x^2 + 5x - 24 > 0$

Čas: 15 minút

Návrh bodového hodnotenia	
Krok	Počet bodov
1 – 15	30
Spolu	30

Návrh klasifikácie	
Počet bodov	Známka
30 – 27	1
26 – 22	2
21 – 15	3
14 – 10	4
9 – 0	5

DIKTÁT 2

Téma: Grafy funkcií

Tematický celok: Funkcie, rovnice, nerovnice II.

Načrtnite grafy funkcií (každý graf na iný obrázok):

1. $f : y = 4$
2. $f : y = x$
3. $f : y = -x$
4. $f : y = 10x$
5. $f : y = \frac{x}{2}$
6. $f : y = |x|$
7. $f : y = -|x|$
8. $f : y = -\pi$
9. $f : y = x^2$
10. $f : y = -x^2$
11. $f : y = \sqrt{x}$
12. $f : y = x^3$
13. $f : y = x^4$
14. $f : y = \sqrt[3]{x}$
15. $f : y = \sqrt[4]{x}$
16. $f : y = \frac{1}{x}$
17. $f : y = \frac{1}{x^2}$
18. $f : y = \frac{1}{x^3}$
19. $f : y = 1 + x^2$
20. $f : y = x^3 + 4$

Čas: 10 minút

Návrh bodového hodnotenia	
Krok	Počet bodov
1 – 20	20
Spolu	20

Návrh klasifikácie	
Počet bodov	Známka
20 – 18	1
17 – 15	2
14 – 10	3
9 – 6	4
5 – 0	5

DIKTÁT 3

Téma: Kužeľosečky

Tematický celok: Analytická geometria

Určte typ kužeľosečky:

1. $x^2 + y^2 = 4$

2. $x^2 - y^2 = 9$

3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

4. $\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

5. $(y-2)^2 = 4(x+1)$

6. $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

7. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$

8. $2x^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

9. $4x^2 - y^2 - 64 = 0$

10. $x^2 + y^2 = 4x$

Čas: 10 minút

Návrh bodového hodnotenia	
Krok	Počet bodov
1 – 10	20
Spolu	20

Návrh klasifikácie	
Počet bodov	Známka
20 – 18	1
17 – 15	2
14 – 10	3
9 – 6	4
5 – 0	5

DIKTÁT 4

Téma: Derivácia funkcie reálnej premennej

Tematický celok: Funkcie, rovnice, nerovnice III.

Vypočítajte 1. deriváciu funkcie

1. $f : y = 4$
2. $f : y = x^2$
3. $f : y = (x - 1)(x + 1)$
4. $f : y = (4x^3 + 1)^2$
5. $f : y = \sin x^2$
6. $f : y = \sin^2 x$
7. $f : y = \cos 2x$
8. $f : y = \cos(3x + 1)$
9. $f : y = \operatorname{tg}^4 x$
10. $f : y = \operatorname{cotg}^5 x$
11. $f : y = e^{-3x}$
12. $f : y = e^{-x^2}$
13. $f : y = a^{6x}$
14. $f : y = \ln x^2$
15. $f : y = \ln(\cos x)$
16. $f : y = \log_a x$
17. $f : y = \sqrt{x}$
18. $f : y = \sqrt{2x - 5}$
19. $f : y = \sqrt{x^2 + 2}$
20. $f : y = \sqrt[3]{x}$
21. $f : y = \sqrt[4]{x^4 + 1}$
22. $f : y = \frac{1}{x}$
23. $f : y = \sin^2 2x^2$
24. $f : y = \sqrt{\cos^2 x + 9x}$
25. $f : y = \sin^2 x + \cos^2 x$
26. $f : y = e^{\sqrt{\sin x}}$
27. $f : y = \ln^2 \sqrt{1 - x^2}$
28. $f : y = \sqrt{\cos e^{\sqrt{\operatorname{tg} x}}}$
29. $f : y = \sin^3 \sqrt{\ln x}$
30. $f : y = \sqrt[5]{\operatorname{tg} e^{\sqrt{\ln(x^2 + 1)}}}$

Čas: 30 minút

Návrh bodového hodnotenia	
Krok	Počet bodov
1 – 30	30
Spolu	30

Návrh klasifikácie	
Počet bodov	Známka
30 – 27	1
26 – 22	2
21 – 15	3
14 – 10	4
9 – 0	5

DIKTÁT 5

Téma: Neurčitý integrál – integračné vzorce

Tematický celok: Funkcie, rovnice, nerovnice III.

Vypočítajte primitívnu funkciu $F(x)$ k danej funkcii $f(x)$:

1. $f : y = 1$
2. $f : y = x$
3. $f : y = x^3$
4. $f : y = 5x^4$
16. $f : y = \frac{1}{x^4}$
17. $f : y = \frac{1}{x^{-5}}$
18. $f : y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
19. $f : y = \frac{1}{\cos^2 x}$

5. $f : y = x^2 - 1$
6. $f : y = x^4 - x^2 + 1$
7. $f : y = (x - 3)^2$
8. $f : y = \sin x$
9. $f : y = \cos x$
10. $f : y = \sqrt{x}$
11. $f : y = \sqrt[7]{x}$
12. $f : y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$
13. $f : y = e^x$
14. $f : y = a^x$
15. $f : y = \frac{1}{x}$
20. $f : y = \frac{1}{\sin^2 x}$
21. $f : y = 2 \sin x + 3 \cos x$
22. $f : y = 2^x - 3^x$
23. $f : y = 1 - \frac{2x}{\pi}$
24. $f : y = e^{4x}$
25. $f : y = 2^x + e^x$
26. $f : y = \frac{2x}{x^2 + 1}$
27. $f : y = \frac{1}{x \ln x}$
28. $f : y = \cot g x$
29. $f : y = \frac{e^x}{e^x - 5}$
30. $f : y = \frac{x^2}{x^3 - 2}$

Čas: 30 minút

Návrh bodového hodnotenia	
Krok	Počet bodov
1 – 30	30
Spolu	30

Návrh klasifikácie	
Počet bodov	Známka
30 – 27	1
26 – 22	2
21 – 15	3
14 – 10	4
9 – 0	5

Literatúra

- [1] *Fischer, R. – Malle, G.*: Človek a matematika. SPN, Bratislava 1992.
- [2] *Gábor, O. – Kopanec, O. – Krížalkovič, K.*: Teória vyučovania matematiky 1. SPN, Bratislava 1989.
- [3] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky 2. SPN, Bratislava 1990.
- [4] *Olekšáková, D.*: Matematické diktáty a ich prínos pre vyučovací proces. Rigorózna práca, PU v Prešove, KM FHPV, Prešov 2003.
- [5] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky. SPN, Praha 1972.
- [6] *Průcha, J.*: Moderní pedagogika. Portál, Praha 1997.
- [7] *Strečko, V.*: Výber z didaktiky matematiky. Náuka, Prešov 2004.
- [8] *Trávníček, S.*: Oprava písemek z matematiky (skriptum). UP, Olomouc 2006.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 161 a 162, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (19.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 161

Přirozené číslo n nazveme *pozoruhodným*, právě když existují nezáporná celá čísla x a y taková, že $n = 7x^2 + 287y^2$. Dokažte, že pro každé pozoruhodné číslo n jsou rovněž čísla $2009n$ a $2010n$ pozoruhodná.

Gottfried Perz (Graz)

Řešení: Platí $2009 = 287 \cdot 7$. Předpokládejme, že číslo n je pozoruhodné, tedy existují nezáporná celá čísla x, y tak, že $n = 7x^2 + 287y^2$. Potom platí

$$2009n = 287 \cdot 7 \cdot 7x^2 + 7 \cdot 287 \cdot 287y^2 = 7(287y)^2 + 287(7x)^2$$

a současně

$$\begin{aligned} 2010n &= 2009n + n = 7(287y)^2 + 287(7x)^2 + 7x^2 + 287y^2 = \\ &= 7((287y)^2 - 2 \cdot 287xy + x^2) + 287((7x)^2 + 2 \cdot 7xy + y^2) = \\ &= 7(287y - x)^2 + 287(7x + y)^2. \end{aligned}$$

Jelikož čísla $287y, 7x, |287y - x|, 7x + y$ jsou celá nezáporná, plyne odtud, že čísla $2009n$ a $2010n$ jsou pozoruhodná.

Správné řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Petr Boroš* a *Simona Domesová*, oba z GMK v Bílovci, *Michal Horák*, *David Klačka* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jaromír Karmazín* z G ve Velkém Meziříčí, *Jan Nevoral* z G Jihlava, *Jana Masaryka*, *Miroslav Olšák* z GB v Praze 5, *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Petr Pařízek* z GBN v Hradci Králové, *Petr Ryšavý* z GJH v Praze a *Trung Ha Duc* z MG v Plzni, Petáková.

Neúplné řešení zaslali *Lukáš Chlad* z G v Plzni, Mikulášské nám. a *Lenka Sumbalová* z GMK v Bílovci.

Úloha 162

Nechť M je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC . Označme T_a , T_b , T_c po řadě středy stran BC , CA , AB . Vrcholy A , B , C vedme přímký rovnoběžné po řadě s přímkami MT_a , MT_b , MT_c . Rozhodněte, zda tyto přímký procházejí jedním společným bodem. Svou odpověď zdůvodněte.

Jaroslav Švrček

Řešení: Označme T těžiště trojúhelníku ABC a uvažujme stejnoolehlost κ se středem v bodě T a koeficientem -2 . Z vlastností těžiště plyne

$$T_a \mapsto A, \quad T_b \mapsto B, \quad T_c \mapsto C.$$

Označme M' obraz bodu M ve stejnoolehlosti κ , potom se přímký MT_a , MT_b a MT_c zobrazí ve stejnoolehlosti κ po řadě na přímký $M'A$, $M'B$ a $M'C$. Obrazem přímký ve stejnoolehlosti je přímká s ní rovnoběžná. Proto přímký rovnoběžné s přímkami MT_a , MT_b , MT_c vedené po řadě body A , B , C jsou přímký $M'A$, $M'B$ a $M'C$, které procházejí jedním společným bodem M' .

Správné řešení zaslali *Vladimír Pavel* z Blovic, *Simona Domesová*, *Jakub Solovský* a *Lenka Sumbalová*, všichni z GMK v Bílovci, *Filip Hlášek* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Michal Horák*, *David Kláška* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Adam Juraszek* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova, *Jaromír Karmazín* z G ve Velkém Meziříčí, *Jan Nevoral* z G Jihlava, Jana Masaryka, *Miroslav Olšák* z GB v Praze 5, *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Petr Pařízek* z GBN v Hradci Králové, *Dan Šafka* z GJK v Praze 6 a *Trung Ha Duc* z MG v Plzni, Petáková.

Neúplné řešení zaslala *Anna Chejnovská* z GBN v Hradci Králové.

Pavel Calábek