

Stochastické grafy jako nástroj řešení matematických úloh

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków, POLSKO

Stochastickým grafem rozumíme orientovaný graf, kde je každé hraně přiřazeno kladné reálné číslo a součet čísel přiřazených hranám se společným počátečním uzlem je roven 1. Teorie stochastických grafů nachází široké uplatnění v nejrůznějších oblastech matematiky i technických aplikací. V tomto příspěvku si ukážeme, jak je lze využít při řešení konkrétní úlohy z teorie pravděpodobnosti. V článcích [2] a [4] je řešen následující problém

Úloha 1

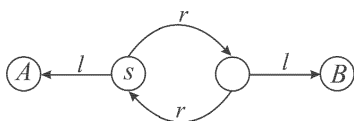
Hráči A a B házejí střídavě pravidelnou mincí. Vyhrává ten, při jehož hodu se v sérii všech získaných výsledků právě po k -té objeví líc, kde $k = 1$ a $k = 2$. Hráč A hází první a zajímá nás, jaké jsou šance na vítězství hráčů A a B v závislosti na parametru k .

V [4] se k nalezení řešení využívá vlastností tzv. aritmeticko-geometrických posloupností. Naproti tomu v [2] je zvolen pravděpodobnostní přístup, který je dále zobecněn v [3], kde je podáno obecné řešení úlohy 1 pro libovolné přirozené číslo k .

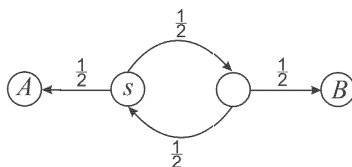
Nyní si ukážeme, jak lze úlohu 1 řešit pomocí stochastických grafů. Tento přístup nám navíc umožní další zobecňování uvažovaného problému a zejména v situacích, kdy

1. se hry účastní více než dva hráči,
2. používáme jiný losovací nástroj než je „symetrická“ mince.

Graf na obr. 1a představuje hrací plátno ke hře popsané v úloze 1. Na začátku hry postavíme figurku do uzlu $\textcircled{s}$ – **start**. Házíme mincí a podle výsledku hodu posouváme figurku ve směru šipek tak dlouho, až se dostane buď do uzlu $\textcircled{A}$ (z vítězí hráč A), nebo do uzlu $\textcircled{B}$ (z vítězí hráč B).



Obr. 1a



Obr. 1b

Označme x pravděpodobnost, že zvítězí hráč A . Uvažme dále dva případy:

- v prvním hodu padne líc (to nastane s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, viz obr. 1b) a figurka se dostane do uzlu $\textcircled{A}$;
- v prvním a druhém hodu padne rub (pravděpodobnost tohoto jevu je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$) a figurka se vrátí do uzlu $\textcircled{s}$, což znamená, že se situace vrátí na začátek.

Z těchto faktů a z obr. 1b vyplývá, že

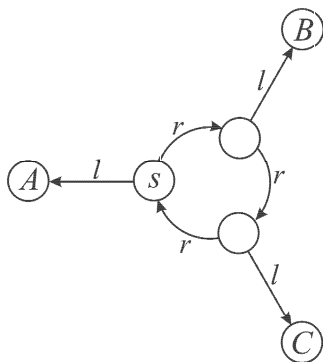
$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot x, \quad \text{a tedy} \quad x = \frac{2}{3}.$$

Analogicky spočítáme, že hráč B zvítězí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$.

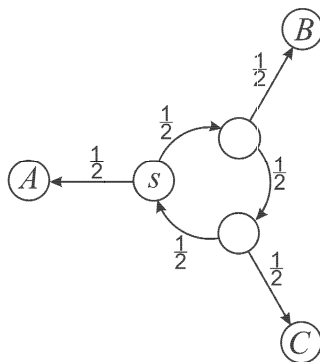
Dostali jsme shodný výsledek jako v [2] a [4]. Tento přístup navíc umožňuje snadno řešit i obecnější úlohy.

Úloha 2

Uvažujme analogickou hru jako v úloze 1, ale budou ji hrát tři hráči. Nejprve hází mincí hráč A , po něm hráč B , pak hráč C , pak opět A atd. Zvítězí ten, komu prvněmu padne líc. Pro každého hráče vypočítejte pravděpodobnost jeho vítězství.



Obr. 2a



Obr. 2b

Graf na obr. 2a představuje hrací plátno k této hře. Opět označme x pravděpodobnost, že se figurka z uzlu s dostane do uzlu A , tedy x je pravděpodobnost vítězství hráče A . Uvažme dva případy:

- v prvním hodu padne líc (to nastane s pravděpodobností $\frac{1}{2}$, viz obr. 2b) a figurka se dostane do uzlu A ;
- v prvním, druhém a třetím hodu padne rub (pravděpodobnost tohoto jevu je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$) a figurka se vrátí do uzlu s , tj. situace se vrátí na začátek.

Z těchto faktů a z obr. 2b vyplývá, že

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot x, \quad \text{a tedy} \quad x = \frac{4}{7}.$$

Analogicky spočítáme, že hráč B zvítězí s pravděpodobností $\frac{2}{7}$ a hráč C zvítězí s pravděpodobností $\frac{1}{7}$.

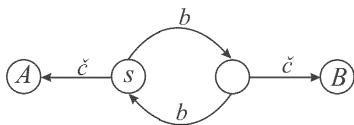
Z navrženého postupu je zřejmé, že ho lze použít i v obecném případě, kdy hráči čekají na první úspěch v sérii nezávislých pokusů (pravděpodobnost u úspěchu v jednom pokusu je $0 < u < 1$ nebo dokonce, kdy každý hráč má jiný losovací nástroj (mění se jen váhy jednotlivých hran stochastického grafu). Ukažme si to při řešení následující úlohy.

Úloha 3

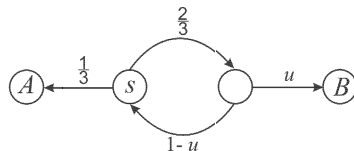
Hráči A a B střídavě losují (s vrácením) kouli každý ze své urny. Vyhrává ten, kdo vylosuje jako první červenou kouli. Hráč A bude losovat

první a v jeho urně jsou dvě bílé koule a jedna koule červená. Kolik nejméně koulí musí být v urně hráče B , aby oba hráči měli v takové hře stejnou šanci zvítězit?

Řešení. Označme u pravděpodobnost vylosování červené koule z urny hráče B . Na obr. 3 je hrací plátno a odpovídající stochastický graf.



Obr. 3a



Obr. 3b

Mají-li mít oba hráči stejnou šanci zvítězit, znamená to, že každý z nich zvítězí ve hře s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Kdy zvítězí hráč A ? Uvažme dva případy:

- v prvním losování vylosuje hráč A červenou kouli (to nastane s pravděpodobností $\frac{1}{3}$, viz obr. 3b) a figurka se dostane do uzlu $\textcircled{A}$;
- v prvním losování vylosuje hráč A bílou kouli, pak hráč B vylosuje také bílou kouli (pravděpodobnost tohoto jevu je $\frac{1}{3} \cdot (1 - u)$) a figurka se vrátí do uzlu $\textcircled{S}$, což znamená, že se situace vrátí na začátek.

Z těchto faktů a z obr. 3b vyplývá, že dostáváme rovnici

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot (1 - u) \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{a tedy} \quad u = \frac{1}{2}.$$

Odtud je zřejmé, že hra bude spravedlivá, pokud urna hráče B bude obsahovat jednu bílou a jednu červenou kouli.

Literatura

- [1] *Mason, S. J.*: Feedback Theory: Some properties of signal flow graphs, Proc. I.R.E. 41 (1953), Nr. 9, 1144-1156.
- [2] *Tlustý, P.*: Jiný přístup ke dvěma úlohám z pravděpodobnosti. MFI, Vol. 9, 1999/2000, č. 8.
- [3] *Tlustý, P.*: Obecné řešení jedné úlohy z pravděpodobnosti, MFI. 2001, roč. 10, č. 9.
- [4] *Trojovský, P.*: Patří aritmeticko-geometrická řada na střední školu? MFI, Vol. 8, 1998/1999, č. 10.
- [5] *Pločki, A. – Tlustý, P.*: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé. Prometheus, Praha, 2007.

Několik úloh pro výuku infinitesimálního počtu na gymnáziu

JAN BENEŠ

Gymnázium Jihlava

Relativně nízký počet hodin výuky matematiky na gymnáziu vede vyučující matematiky a vedení každé jednotlivé školy ke zvážení, zda do školního programu nezařadit nebo zařadit, a v jakém rozsahu, výuku témat infinitesimálního počtu. Tento článek má podpořit názor, že je velmi vhodné poskytnout alespoň zvědavým studentům již na gymnáziu přiměřené informace o diferenciálním a integrálním počtu. Pro kvalitní studenty gymnázií, byť se v budoucnu podle svého zájmu a možností budou věnovat různým odborným zaměřením, jsou vhodné přinejmenším ze dvou důvodů.

Předně přiměřené používání infinitesimálního počtu na gymnáziích mimo veškerou pochybnost obohacuje myšlení studenta, přináší mu nové nástroje na řešení problémů (např. práce s „nekonečně malými“ veličinami) a vede k nárůstu kompetencí studenta pro řešení mnohých úloh, které dosud řešit nemohl, nebo řešil příliš zdlouhavě.

Druhý a velmi závažný důvod spočívá v tom, že infinitesimální počet přináší možnost významných praktických aplikací matematiky, které studentům potvrzují, že matematika je věda pro praxi velmi užitečná.

K danému tématu bylo už napsáno mnohé. Na podporu tvrzení vyslovených v předchozích dvou odstavcích uvádím dále řešení několika osvědčených praktických úloh z matematického semináře, který vedu na našem gymnáziu. Seminář probíhá ve čtvrtém ročníku a úlohy jsou zařazovány na závěr systematizace učiva z diferenciálního a integrálního počtu.

Některé z nich navazují na výuku fyziky a tím také prohlubují mezipředmětové vztahy.

1. Užití derivací

Úloha 1

Vypočítejte tvar osového řezu plechové konzervy tvaru rotačního válce o daném objemu $V = 1$ litr tak, aby plech použitý k výrobě měl minimální hmotnost.

Řešení. Konzervu si modelujeme jako válec, kde x je poloměr podstavy a v výška válce. Z plechu se vyrábějí podstavy (dna konzervy) a plášť (boky konzervy), celkový povrch je tedy

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xv. \quad (1)$$

Ještě využijeme znalosti objemu. Pro objem V platí

$$V = 1 = \pi x^2 v,$$

odkud $v = \frac{1}{\pi x^2}$. Po dosazení do (1) máme povrch

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{1}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2}{x} \quad (2)$$

a chceme, aby byl co nejmenší. A nyní se obrátíme na představitel studentů: Představte si, že výška v je velmi malá, pak by konzerva vypadala jako velký disk a plechu by bylo potřeba hodně. Když budeme poloměr zmenšovat, bude se výška konzervy zvětšovat, ale povrch S se bude nejprve zmenšovat, ale pak bude povrch zase růst, neboť kdyby byl poloměr např. už jen 1 cm, byla by konzerva vysoká a její povrch S zase už veliký. Někde mezi těmito „krajními“ případy je S nejmenší. Pro praktické úlohy tohoto typu platí:

Jestliže z praktické povahy úlohy plyne, že nastane právě jeden extrém, a jaký je to extrém (maximum nebo minimum) a existuje jediný stacionární bod, pak tento extrém nastane ve zjištěném bodě.

Pro vyřešení úlohy tedy stačí derivaci $\frac{dS}{dx}$, položit rovnu nule a najít řešení této rovnice. Podle (2) je

$$\left(\frac{dS}{dx}\right) 4\pi x - \frac{2}{x^2} = 0,$$

$$2\pi x^3 = 1,$$

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}.$$

Nyní zjistíme odpovídající výšku v_0 .

$$v_0 = \frac{1}{\pi x_0^2} = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{(2\pi)^2} = \dots = 2 \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = 2x_0.$$

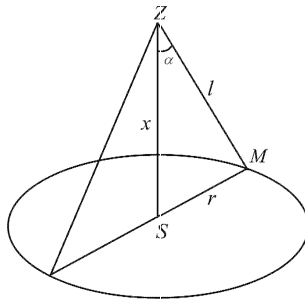
Závěr: Osovým řezem konzervy je čtverec.

Studenti se mohou dále zajímat o problém: Jaký je tvar osového řezu, když plech na bocích konzervy je dvakrát silnější než na dnech.

Úloha 2

Kruhový stůl o poloměru r je osvětlen bodovým zdrojem světla svítivosti I , který visí nad středem stolu. V jaké výšce v má být zdroj zavěšen, aby osvětlení na okraji stolu bylo pro daný zdroj největší?

Řešení. Opět nejprve se žáky uvažujeme, jak se podle jejich představ bude měnit osvětlení okraje stolu, budeme-li zdroj světla Z zvedat nad středem stolu. Dospějeme k výsledku, že prakticky od temného okraje stolu (jestli zdroj ve výšce 0, tj. přímo na stole) se jeho osvětlení bude zvětšovat k maximum a pak zase klesat, když zdroj vystupuje velmi vysoko, že tedy maximum osvětlení existuje. Situace je znázorněna na obr. 1



Obr. 1

Připomeňme standardní vztah pro osvětlení E bodu M okraje stolu od bodového zdroje Z svítivosti I vzdáleného l od bodu M :

$$E = \frac{I \cos \alpha}{l^2}, \quad (3)$$

kde α je úhel, pod kterým světlo dopadá na okraj stolu (měřený od kolmice). Podle obr. 1 nyní zavedeme ve vztahu (3) závislost osvětlení E na

výšce x zdroje Z nad středem S stolu. Do (3) dosadíme za l a za $\cos \alpha$:

$$l = \sqrt{x^2 + r^2}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{l} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}},$$

takže

$$E = \frac{Ix}{(x^2 + r^2)\sqrt{x^2 + r^2}} = Ix(x^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} = f(x). \quad (4)$$

Nyní určíme 1. derivaci funkce $E = f(x)$ z rovnice (4). Platí

$$\frac{dE}{dx} = I \left[(x^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x(x^2 + r^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \right] = \dots = I \cdot \frac{r^2 - 2x^2}{(x^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Pro zjištění stacionárního bodu stačí čitatel zlomku položit roven nule. Protože $x \geq 0$, dostáváme jediný stacionární bod $x_0 = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$, což je taková výška zdroje nad stolem, že osvětlení na okraji stolu je největší.

Toto očekávání můžeme i formálně potvrdit následující úvahou: Protože pro x v intervalu $x_0 = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}r\right)$ je $\frac{dE}{dx} > 0$, funkce $E = f(x)$ je na tomto intervalu rostoucí. Pro $x > \frac{\sqrt{2}}{2}r$ je $\frac{dE}{dx} < 0$, a proto je funkce $f(x)$ zde klesající. Okraj stolu bude tedy skutečně osvětlen nejvíce, bude-li bodový zdroj světla ve výšce

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}r. \quad (5)$$

Pro představu o optimální výšce zdroje vypočteme velikost úhlu α . Z (5) vidíme, že

$$\frac{x_0}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cotg \alpha,$$

odkud $\alpha \doteq 54^\circ 44'$. Pomocí (4) můžeme dopočítat hodnotu extrémního osvětlení, v případě zájmu studentů i s konkrétními hodnotami r a I .

2. Užití integrálů

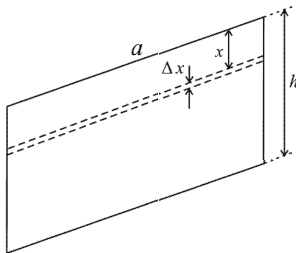
Úloha 3

Určete tlakovou sílu vody na svislou přehradní hráz tvaru obdélníka délky a metrů, výšky ponořené části hráze h metrů

Řešení. Pro tuto úlohu je výhodné, že řada studentů má zkušenosti s koupáním ve vodních nádržích. Proto zájem o výpočet síly, kterou působí vodní masiv na přehradní hráz, je celkem přirozený. Existuje více cest, jak úlohu vyřešit. Zde je jedna z nich.

Uvážíme, že hydrostatický tlak p závisí na hloubce x pod hladinou podle vztahu $p = \rho g x$, kde ρ je hustota vody a g tíhové zrychlení.

Rozdělíme přehradní hráz na vodorovné obdélníkové proužky délky a , o šířce (tj. výšce) Δx a obsahu $\Delta S = a \Delta x$ (obr. 2).



Obr. 2

Na každý takový proužek působí tlaková síla

$$F = \rho g x \Delta S = a \rho g x \Delta x. \quad (6)$$

Vztah (5) vyjadřuje příspěvek jednoho proužku k integrálnímu součtu. Pro $\Delta x \rightarrow 0$ lze vztah (6) vyjádřit ve tvaru diferenciálním, tj.

$$dF = a \rho g x dx,$$

takže tlaková síla na celou přehradní hráz je

$$F = a \rho g \int_0^h x dx = \frac{1}{2} a \rho g h^2.$$

Výsledek jistě nepřekvapí, jsme-li si vědomi lineární závislosti hydrostatického tlaku na výšce vodního sloupce.

Poznámka. Je třeba, aby studenti získali o výsledku nějakou konkrétní představu. Třeba takto: Pro celkem malou přehradu, kde $a = 80$ m, $h = 16$ m, $\rho = 10^3$ kg/m³, $g = 9,81$ m/s², je

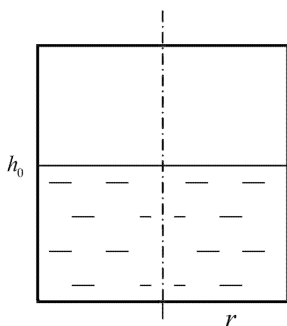
$$F = 0,5 \cdot 80 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot 16^2 \text{ N} \doteq 10^8 \text{ N}$$

(což je přibližně tíha 528 kg zlata).

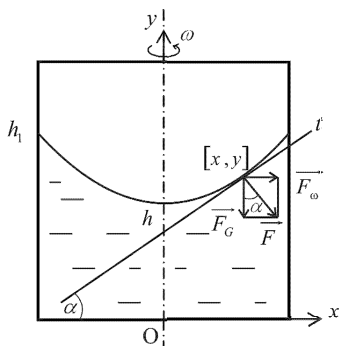
Úloha 4

Zjistěte tvar, který má povrch ideální kapaliny (přibližně voda) rotující konstantní úhlovou rychlostí spolu s válcovou nádobou kolem její svislé osy.

Řešení. Pro přiblížení úlohy využijeme běžné zkušenosti studentů s mícháním nápojů. Určitě pozorovali změnu tvaru povrchu a určitě řešili i situace, kdy při příliš usilovném míchání nápoj přetekl okraj nádoby. Vraťme se k zadání. Aby bylo možné děj pozorovat, je výhodné si představit průhlednou rotující nádobu. Vzhledem k symetrii můžeme problém řešit v osovém řezu. Kapalina v klidu má podle nádoby tvar válce (obr. 3). Poloměr podstavy válcového sloupce kapaliny označme r .



Obr. 3



Obr. 4

Přechází-li válcová nádoba z klidu do rotace s konstantní úhlovou rychlostí ω , mění se tvar povrchu kapaliny vždy tak, že výsledná síla F na každou povrchovou strukturální částici kapaliny je kolmá na tečnu k povrchové křivce procházející zmíněnou částicí.

Zavedeme soustavu souřadnic (podle obr. 4) a tvar povrchu rotující kapaliny v osovém řezu hledejme jako graf funkce $y = f(x)$. Vybereme jednu z povrchových strukturálních částic, její hmotnost označíme m , tíhové zrychlení g , polohu částice vyjádříme souřadnicemi $[x; y]$. Směrnicí uvažované tečny můžeme vyjádřit jako

$$k = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

Na částici působí tíhová síla o velikosti $F_G = mg$ a setrvačná odstředivá síla o velikosti $F_\omega = m\omega^2 x$, kde x je poloměr otáčení vybrané povrchové strukturální částice (tj. její x -ová souřadnice).

Z vektorového silového rovnoběžníku je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_\omega}{F_G} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2}{g} x. \quad (8)$$

Ze (7) a (8) dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g} x$$

a po úpravě obdržíme

$$dy = \frac{\omega^2}{g} x dx.$$

Po integraci dostáváme rovnici paraboly

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C. \quad (9)$$

Dosazením $x = 0$ do rovnice (9) zjistíme význam konstanty C ; je to y -ová souřadnice h vrcholu paraboly, takže rovnice paraboly je

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + h \quad (10)$$

V prostoru se jedná o *rotační paraboloid*. Vidíme, že koeficient v kvadratickém členu přímo závisí na druhé mocnině úhlové rychlosti, což souhlasí s naší zkušeností: čím rychleji mícháme, tím více se jamka v tekutině prohlubuje a okraje tekutiny se blíží k okraji nádoby.

Trvá-li zájem studentů o danou úlohu, můžeme pokračovat hledáním souvislosti rozměrů nádoby, výšky h_0 hladiny kapaliny v klidu a polohy významných bodů rotující kapaliny, tzn. vrcholu paraboly $[0; h]$ a nejvyšších bodů (nejvyšší kružnice) rotující kapaliny; stačí jeden: $[r; h_1]$.

Podle základních zákonů hydromechaniky jsou obsahy řezů kapaliny v klidu i při rotaci stejné. Obsah řezu kapaliny v klidu je $S_0 = 2h_0r$ a obsah řezu rotující kapaliny

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \int_0^r f(x) dx = 2 \int_0^r \left(\frac{\omega^2}{2g} x^2 + h \right) dx = 2 \left[\frac{\omega^2}{2g} \cdot \frac{x^3}{3} + hx \right]_0^r = \\ &= \frac{\omega^2}{3g} r^3 + 2hr. \end{aligned}$$

Z rovnosti $S_0 = S_1$ vychází

$$2h_0r = \frac{\omega^2}{3g}r^3 + 2hr,$$

z čehož

$$h = \frac{1}{2} \left(2h_0 - \frac{\omega^2}{3g}r^2 \right).$$

Rovnici (10) tak lze vyjádřit v konečném tvaru

$$y = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + h_0 - \frac{\omega^2}{6g}r^2. \quad (11)$$

Z (11) již pak lehce dopočítáme, kde jsou nejvyšší strukturální částice rotující kapaliny:

$$h_1 = f(r) = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + h_0 - \frac{\omega^2}{6g}r^2 = h_0 + \frac{\omega^2}{3g}r^2.$$

Poznámka. Určitě je velmi vhodné výsledky více přiblížit a spolu se studenty je oživit dosazením konkrétních hodnot.

3. Jednoduché diferenciální rovnice

Úloha 5

Do banky byl vložen počáteční kapitál K_0 . Jakou hodnotu K_m má kapitál na konci m -tého roku při spojitém úročení, je-li p úrok p. a. (roční) v % a u daň z úroku také v %. (Pro formulaci a řešení úlohy je použita terminologie a symboly z učebnice [4].)

Řešení. Úvodem k řešení úlohy je diskuse se studenty o jejich zkušenostech s úročením vkladů, s frekvencí úročení, s úroky v našich bankách a s výnosy z vkladů. Připomeneme, že v ČR je úrok zdaňován 15 % sazbou, tj. $u = 15$.

Shrňme úvodní poznatky studentů o úročení: na konci prvního roku při ročním úročení je hodnota kapitálu

$$K_1 = K_0 + \frac{p}{100}K_0 - \frac{p}{100} \cdot \frac{u}{100}K_0 = K_0 \left[1 + \frac{p}{100} \left(1 - \frac{u}{100} \right) \right].$$

Označme *roční míru úročení* $i = \frac{p}{100}$ a zdaňovací koeficient $k = 1 - \frac{u}{100}$; pak

$$K_1 = K_0(1 + ik) \quad (12)$$

a při měsíčním úročení

$$K_1 = K_0 \left(1 + \frac{i}{12}k\right)^{12}. \quad (13)$$

Uvedme příklad. Uvažujme vklad $K_0 = 50\,000$ Kč, $i = 0,03$, $k = 0,85$ (při současném zdaňování úroků v ČR patnáctiprocentní sazbou je zdaňovací koeficient 0,85). Pak podle (12) je $K_1 = 51\,275,00$ Kč a podle (13) je $K_1 = 51\,290,00$ Kč.

Obecněji, bude-li úročení probíhat během roku r -krát, bude $K_1 = K_0 \left(1 + \frac{i}{r}k\right)^r$. (V našem příkladu např. pro $r = 100$ je $K_1 = 51\,291,23$ Kč.)

Po m letech máme

$$K_m = K_0 \left[\left(1 + \frac{i}{r}k\right)^r \right]^m. \quad (14)$$

Nyní hledejme K_m při *spojitém úročení*. O takovém úročení mluvíme tehdy, jestliže se délka úrokovacích období neomezeně zkracuje a jejich počet roste nade všechny meze.

Označme y průběžnou velikost kapitálu a $t \in \langle 0; m \rangle$ čas (jednotkou je 1 rok). Přírůstek kapitálu za dobu Δt je $\Delta y = yik\Delta t$, což lze v diferenciálním tvaru zapsat jako

$$dy = yikdt \quad (15)$$

a to je zvláštní případ diferenciální rovnice

$$y' = ay, \quad (16)$$

kde a je konstanta a y je neznámá funkce. Řešíme ji separací proměnných a integrováním; pokračujeme v řešení rovnice (15):

$$\frac{dy}{y} = ikdt,$$

$$[\ln |y|]_{K_0}^{K_m} = [ikt]_0^m,$$

kde $\ln$ je označení přirozeného logaritmu, tj. logaritmu při základu e (Eulerovo číslo), a dále

$$\ln K_m - \ln K_0 = ikm,$$

$$\ln \frac{K_m}{K_0} = ikm, \quad (17)$$

$$\frac{K_m}{K_0} = e^{ikm},$$

$$K_m = K_0 e^{ikm}. \quad (18)$$

(V našem příkladu je podle tohoto vzorce nyní $K_1 = 51\,291,40$ Kč. Porovnejte výsledky.)

Přidejme ještě příklad na použití vzorce (18): Jak dlouho by kapitál 50 000 Kč musel být v bance spojitě úročen, aby vzrostl na 55 000 Kč? Z rovnice (18) resp. (17) vypočteme m :

$$m = \frac{1}{ik} \ln \frac{K_m}{K_0};$$

po dosazení $ik = 0,03 \cdot 0,85$, $K_0 = 50\,000$, $K_m = 55\,000$ dostaneme $m \doteq 3,74$, tj. asi 3 a 3/4 roku.

Ukažme si ještě jiný postup při odvození vzorce (11) pomocí limitních úvah vycházejících ze vzorce (14)

$$K_m = \lim_{r \rightarrow \infty} K_0 \left[\left(1 + \frac{i}{r} k \right)^r \right]^m = K_0 \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{i}{r} k \right)^r \right]^m.$$

Chceme nyní použít znalosti, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e, \quad (19)$$

a tak pokračujeme v úpravách:

$$K_m = K_0 \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{ik}{r} \right)^{\frac{r}{ik}} \right]^{ikm} = K_0 \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ik}{r} \right)^{\frac{r}{ik}} \right]^{ikm} = K_0 e^{ikm},$$

neboť platí, že pro $r \rightarrow +\infty$ také $n = \frac{r}{ik} \rightarrow +\infty$, takže v hranaté závorce je levá strana rovnosti (19). Vidíme, že jsme dostali též výsledek (18).

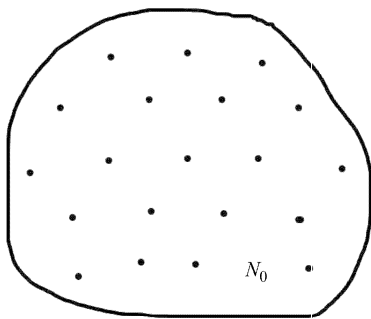
Úloha 6

Odvoďte zákon radioaktivní přeměny, porovnejte rozpadové vlastnosti radia a radonu.

Řešení. Toto je další příležitost, jak v přiměřeném pojetí aplikovat jednoduchou diferenciální rovnici. Nejprve je vhodné se studenty prohodit, jak jsou v současné době otázky radioaktivity významné a jak aktuální jsou ve vztahu k životnímu prostředí.

Označme N_0 počet nerozpadlých jader atomů na počátku popisu rozpadového procesu ve vzorku přirozeně radioaktivní látky, jinak řečeno v čase $t = 0$ s je N_0 počet nerozpadlých jader atomů. V čase t označme počet nerozpadlých jader atomů $N(t)$.

Jádra atomů radioaktivní látky se rozpadají tak, že rychlost rozpadu v okamžiku t je přímo úměrná počtu nerozpadlých jader atomů $N(t)$ přítomných v okamžiku t . Počet jader atomů je přirozené číslo, tedy v realitě není funkce $N(t)$ spojitá (obr. 5). Ukazuje se však, že když považujeme funkci $N(t)$ za spojitou (dokonce diferencovatelnou), odpovídá model procesu realitě velmi přesně (pro velké N se $N(t)$ chová téměř jako spojitá funkce).



Obr. 5

Vyjádříme-li, že za čas dt se rozpadne dN jader, můžeme psát

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t),$$

kde konstanta úměrnosti λ je *přeměnová konstanta* charakterizující rozpadové vlastnosti uvažované radioaktivní látky. Popisujeme rychlost, se

kteřou se jádra atomů rozpadají, proto znaménko na pravé straně je minus (nerozpadlých jader ubývá). Tato rovnice je opět typu (16).

Úpravou získáme

$$\frac{1}{N}dN = -\lambda dt$$

a zvolíme-li konstantu při integraci ve vhodné (logaritmické) podobě, bude

$$N(t) = C \cdot e^{-\lambda t}.$$

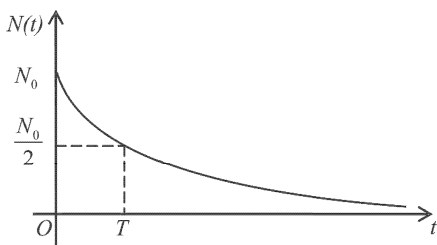
Z počátečních podmínek pak dostáváme

$$N_0 = C \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = C.$$

a zákon radioaktivní přeměny je:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}. \quad (20)$$

Ze zákona přesvědčivě vyplývá, že nerozpadlá jádra ubývají s časem podle exponenciální funkce. Tomu odpovídá i grafická podoba zákona (obr. 6).



Obr. 6

Někdy je názornější charakterizovat přirozeně radioaktivní látku poločasem rozpadu T jako dobou, za kterou se rozpadne právě polovina atomů vzorku. Potom

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda T}$$

a odtud

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}, \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Zákon radioaktivní přeměny pak můžeme vyjádřit

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{T} \ln 2} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}. \quad (21)$$

Pro ilustraci spočítejme, kolik procent z původního počtu jader radia ${}_{88}\text{Ra}^{226}$ s poločasem rozpadu $T = 1590$ roků se rozpadne za 100 let.

Pro radium je tedy $\lambda = \frac{\ln 2}{1590} = \frac{0,693}{1590} \doteq 0,00044$ a dále $N(100) = N_0 \cdot e^{-0,044} \doteq 0,957 \cdot N_0$. Během 100 let se rozpadne pouze 4,3 % uvedeného radia.

Pro porovnání nyní zjistíme, za jak dlouho by nastal stejný pokles u radonu ${}_{86}\text{Rn}^{222}$ s poločasem rozpadu $T = 3,825$ dne.

Z podoby (21) zákona radioaktivní přeměny vyplývá

$$t = -T \cdot \frac{\ln \frac{N}{N_0}}{\ln 2} = -3,825 \cdot \frac{\ln 0,957}{\ln 2} \doteq 0,243 \text{ dne.}$$

U radonu by tedy stejný pokles nastal přibližně za 5 hodin a 49 minut.

Literatura

- [1] *Trávníček, S.*: Matematická analýza I. (<http://kag.inf.upol.cz>).
- [2] *Berman, G. N.*: Zbierka úloh z matematickej anylýzy. ŠNTL, Bratislava 1955.
- [3] *Kriegelstein, E.*: Užití diferenciálního počtu. RMF, r. 40 (1961/62), č. 6.
- [4] *Odvárko, O.*: Úlohy z finanční matematiky pro střední školy. Prométheus, Praha 2005.
- [5] *Ponomarev, K. K.*: Sostavlenije differencialnyh uravnenij (rusky). IVŠ, Minsk 1978.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 3. 2010 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 165

Připravuje se oslava narozenin, na kterou je pozván lichý počet hostů. V místnosti je pro ně přichystán odpovídající počet židlí rozmístěných u několika stolů. Hostitel si před začátkem oslavy všiml zajímavé věci. Všechny hosty lze ve druhé polovině večera přesadit tak, že žádný z nich nebude sedět u stejného stolu jako před přesazením. Kdyby však hostitel před příchodem hostů srazil k sobě libovolné dva stoly i s jejich židlemi a udělal z nich jeden společný stůl, takové přesazení již nebude možné. Kolik stolů je v místnosti?

Marek Pechal

Úloha 166

Dvě shodné kružnice k a l se protínají v bodech A , B . Označme Y obraz libovolného bodu $X \notin \{A, B\}$ kružnice k v otočení se středem v bodě A , které převádí kružnici k na kružnici l . Dokažte, že přímka XY prochází bodem B .

Pavel Leischner

Dále uvádíme bilanci za uplynulý (16.) ročník této rubriky, který je zároveň šestým ročníkem dalšího cyklu dlouhodobé soutěže. Redakce obdržela celkem 94 úplných nebo částečných řešení od 41 jednotlivců (alespoň jednu vyřešenou úlohu druhého cyklu přitom zaslalo 120 řešitelů). Za každou úplně vyřešenou úlohu řešitel obdržel 6 bodů, za částečně vyřešenou 3 body; k -násobným laureátem této rubriky se stane řešitel, který získá od 11. ročníku alespoň k -násobek čísla 93 (rubrika byla založena v roce 1993).

Pořadí řešitelů po šestém ročníku druhého cyklu dlouhodobé soutěže:

1. Anton Hnáth z Moravan (258 b.),
2. Vladimír Pavel z Blovic (159 b.),
2. Miroslav Hübsch z Prahy 5 (156 b.),
4. Karol Gajdoš z Trnavy (138 b.),
5. Jozef Mészáros z Jelky (126 b.).

Pavel Calábek