

MATEMATIKA

Oběžné dráhy těžišť proměnných trojúhelníků a čtyřúhelníků I

MILAN KOMAN – RUDOLF FRITSCH

Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, Praha

Ludwig-Maximilians-Universität, Mathematisches Institut, München, NĚMECKO

V příspěvku studujeme pohyb těžišť proměnných trojúhelníků majících pevnou stranu a pevnou kružnici opsanou. Pojem těžiště přitom chápeme dvojím způsobem. V prvním případě jako těžiště známé ze školské geometrie, v druhém případě jako těžiště („hmotného“) obvodu mnohoúhelníku, tj. jako těžiště drátěného modelu mnohoúhelníku. V prvním případě jde o jednoduchou úlohu, kterou mohou zvládnout i žáci základních škol. V druhém případě jde o poměrně složitý, ale zato mnohem zajímavější problém. Jeho postupně se rozvíjející řešení bude přinášet nové a nové pohledy na tento problém. Jedním z nich je odhalení souvislosti řešení úlohy s „pavoučí“ křivkou významného malíře a matematika Albrechta Dürera.

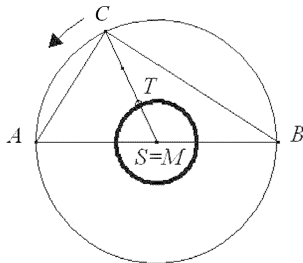
Prostředky, které k řešení úloh používáme, jsou Cabri-geometrie a programy počítačové algebry. Příspěvek je rozšířenou českou verzí první části německého článku [1].

1. Těžiště trojúhelníků s pevnou kružnicí opsanou a s pevnou stranou

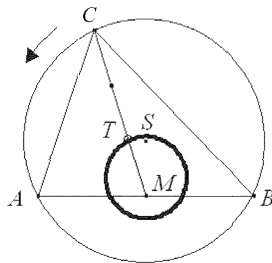
Zvolíme kružnici k se středem S , poloměrem r a s tětivou AB . Naši úlohou bude zkoumat dráhu těžišť všech proměnných trojúhelníků ABC se stranou AB a s vrcholem C na kružnici k .

Začneme jednodušší úlohou, kdy strana AB je průměrem kružnice k (obr. 1). Podle Thaletovy věty jde o pravoúhlé trojúhelníky ABC se spo-

lečnou přeponou AB a vrcholem C na kružnici k . Těžnice t_C z vrcholu C prochází středem strany AB , tj. středem kružnice k . V jedné třetině těžnice t_C od středu S leží těžiště trojúhelníku ABC . Těžiště T má tedy od středu S vzdálenost rovnou $\frac{1}{3}r$ a pohybuje se po kružnici k' soustředné s kružnicí k o poloměru $\frac{1}{3}r$.



Obr. 1 Dráha těžišť T proměnných pravoúhlých trojúhelníků ABC



Obr. 2 Dráha těžišť T proměnných obecných trojúhelníků ABC

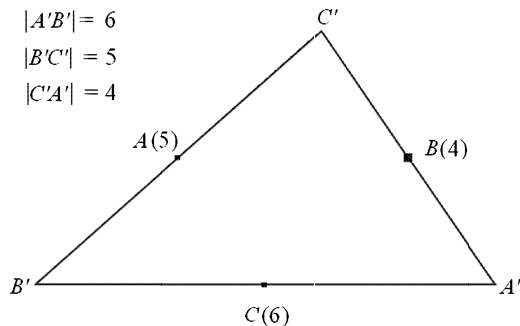
Můžeme přejít k druhému případu, kdy tětiva AB neprochází středem S kružnice (obr. 2). Těžnice t_C z vrcholu C prochází opět středem strany AB , na obr. 2 je to bod M . Těžiště T , podobně jako v prvním případě, leží na těžnici t_C v jedné třetině vzdálenosti od bodu M . Těžiště T dostaneme tak jako obraz vrcholu C ve stejnolehlosti se středem M a s koeficientem $\frac{1}{3}$. Oba obrázky 1 a 2 je možno snadno konstruovat i se žáky základních škol.

Po těchto dvou jednoduchých úlohách „zahřívacího“ kola přejdeme k úlohám, v nichž těžiště trojúhelníku nahradíme těžištěm jeho hranice. Předem však musíme vysvětlit, jak se těžiště hranice trojúhelníku sestaví.

2. Těžiště hranice trojúhelníku

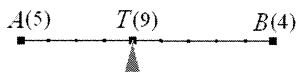
Hranici trojúhelníku můžeme vymodelovat pomocí drátu. Můžeme si představit, že hranice trojúhelníku vznikne „spojením“ tří rovných kusů drátu stejné tloušťky vyrobených ze stejného materiálu. Každý z těchto drátů má své hmotové těžiště, které se nachází ve středu tohoto drátu. Při ideálních podmínkách si můžeme představit, že hmotnosti těchto drátů jsou úměrné délkám těchto drátů. V geometrii si můžeme dokonce představit, že se tyto „hmotnosti“ rovnají přímo délkám těchto drátů (při tom se dohodneme, že jednotky nebudeme uvádět). Těžiště „hmotného“ hranice

trojúhelníku $A'B'C'$ si proto představíme jako hmotové těžiště soustavy tří hmotných bodů A, B, C , které leží ve středech stran $A'B', B'C', C'A'$ a mají hmotnosti rovné délkám těchto stran (obr. 3).

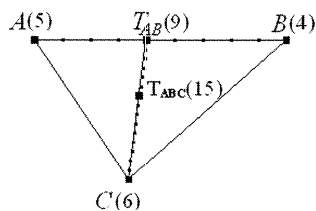


Obr. 3 Těžiště hranice trojúhelníku $A'B'C'$ zavádíme jako hmotové těžiště soustavy středů jeho stran $B'C', C'A', A'B'$ s hmotnostmi rovnými délkám těchto stran

Než uvedeme konstrukci hmotové těžiště tří hmotných bodů, vysvětlíme si, jak sestrojíme hmotové těžiště dvou hmotných bodů. Konstrukce je založena na principu *nerovnoramenných vah*. Máme-li např. soustavu dvou hmotných bodů $A = A(5)$, $B = B(4)$ ¹⁾, můžeme tuto soustavu nahradit jediným hmotným bodem $T = T(9)$ o celkové hmotnosti $9 = 5 + 4$, který dělí úsečku AB v poměru $4 : 5$ počítaje od bodu A (obr. 4). Pokud sestrojujeme toto těžiště se žáky základních škol, je vhodné upozornit, že těžiště je blíže tomu bodu, který má větší hmotnost.



Obr. 4 Těžiště dvojice hmotných bodů $A(5), B(4)$.

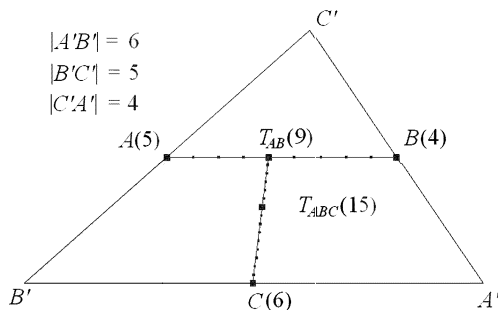


Obr. 5 Těžiště trojice hmotných bodů $A(5), B(4), C(6)$.

¹⁾ Zápís $A = A(6)$ znamená, že bod A má hmotnost 6. Podobně zápís $B = B(4)$ znamená, že bod B má hmotnost 4.

Máme-li soustavu tří hmotných bodů $A = A(5)$, $B = B(4)$, $C = C(6)$, sestrojíme nejdříve hmotové těžiště $T_{AB} = T_{AB}(9)$ bodů A , B a pak hmotové těžiště $T_{ABC} = T_{ABC}(15)$ bodů T_{AB} a C (obr. 5). Snadno se přesvědčíte (rýsováním nebo pomocí Menelaovy věty), že výsledek nezávisí na tom, pro které dva body sestrojíme těžiště nejdříve.

Je-li dán např. trojúhelník $A'B'C'$ o stranách $|A'B'| = 6$, $|B'C'| = 5$, $|C'A'| = 4$, pak těžiště jeho hranice sestrojíme takto: Najdeme střed A strany $B'C'$ a přiřadíme mu hmotnost 5, tj. délku strany $B'C'$ a označíme jej $A(5)$. Podobně najdeme body $B = B(4)$ a $C = C(4)$. Nakonec najdeme těžiště soustavy hmotných bodů A' , B' , C' (obr. 6).



Obr. 6 Sestrojení těžiště hranice trojúhelníku

Úloha pro čtenáře

Uvažujte rovnoramenný trojúhelník se základnou délky 2 a výškou k základně v . Zjistěte, kdy je těžiště tohoto trojúhelníku blíže základně než těžiště jeho hranice.

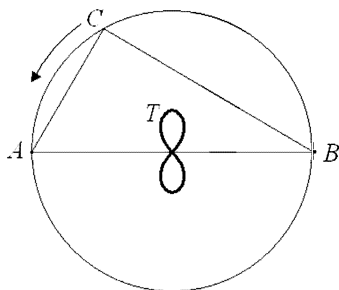
Úlohu můžete řešit početně nebo graficky pomocí Cabri-geometrie (nebo jiného interaktivního geometrické programu). V případě použití Cabri-geometrie doporučujeme vytvoření vlastní makro-konstrukce pro sestrojování těžiště hranice trojúhelníku.

3. Těžiště hranice trojúhelníku s pevnou kružnicí opsanou a s pevnou stranou

Začneme, podobně jako v odstavci 1, s pravoúhlými trojúhelníky ABC s pevnou přeponou AB . Budeme hledat dráhu těžišť hranic všech proměnných trojúhelníků ABC . Délku přepony AB zvolíme rovnou 1.

Sestrojíme již známým způsobem pro libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC těžiště T_O jeho hranice. Pak najdeme dráhu, kterou toto těžiště opisuje při pohybu bodu C po kružnici k nad průměrem AB ²⁾.

Výsledkem je křivka, která má tvar „osmičky“ (obr. 7), a připomíná tzv. Bernoulliovu lemniskátu³⁾. Dočkali jsme se však prvního zklamání. Ukázalo se, že Bernoulliova lemniskáta je širší, než naše osmička. Vidíme to na obr. 8.



Obr. 7 Osmičková dráha těžišť hranic proměnných trojúhelníků ABC



Obr. 8 Bernoulliova lemniskáta je širší než osmičková dráha

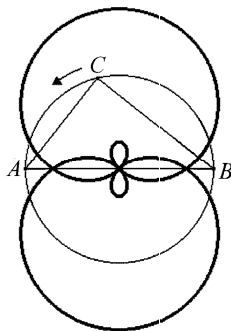
V tomto stádiu jsme se pokusili zjistit, jakou křivkou je naše „osmička“. Vrcholy A, B jsme umístili do bodů $(1, 0)$ a $(-1, 0)$. Pomocí počítačového programu Maple jsme po jistém úsilí došli k rovnicím

$$2(x^2 + y^2 - y^2)^2 = x^2 + y^2 \quad \text{a} \quad 2(x^2 + y^2 + y^2)^2 = x^2 + y^2 \quad (1)$$

Když jsme nakreslili tyto křivky, dostali jsme zcela *neočekávaný* výsledek. Dostali jsme dvě křivky. Naše „osmička“ je jen jejich malou součástí (obr. 9).

²⁾ Můžeme samozřejmě použít Cabri-konstrukce „Množina“. Provádíme-li tuto konstrukci se žáky/studenty, je didakticky výhodnější použít Cabri-konstrukci „Stopa ano/ne“. Než nakreslíme celou stopu, necháme žáky/studenty odhadovat, jaký výsledek dostaneme.

³⁾ Viz např. <http://mathworld.wolfram.com/Lemniscate.html>



Obr. 9 Křivky znázorňující rovnice (1)

Důvod, proč jsme dostali takový neočekávaný výsledek, je však vcelku jasný. K sestrojení těžiště hranice trojúhelníku potřebujeme znát délky jeho stran. Ale ty jsou vyjádřeny pomocí odmocnin, které pak odstraňujeme umocňováním. (To je totéž, jako když při řešení iracionálních rovnic používáme umocňování, a tím dostáváme nové „nepatřičné“ kořeny.)

Vznikla nám tak otázka:

Jaký geometrický význam (pokud vůbec nějaký existuje) mají body nalezených křivek, které nepatří našim „osmičkám“?

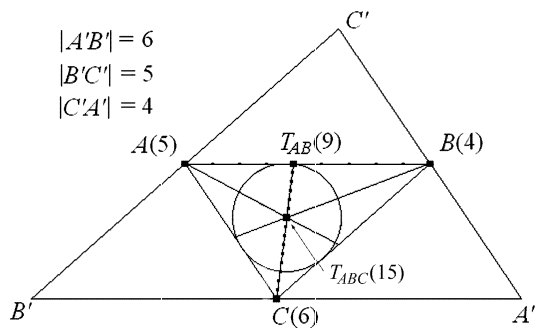
Dostali jsme spásnou myšlenku:

Uvědomili jsme si, že existuje ještě jedna konstrukce těžiště hranice trojúhelníku: V daném trojúhelníku ABC sestrojíme „příčkový“ trojúhelník, jehož strany spojují středy stran daného trojúhelníku. Střed kružnice vepsané tomuto příčkovému trojúhelníku je tzv. *Spiekerův střed* trojúhelníku ABC . A tento střed je zároveň *těžištěm hranice trojúhelníku*⁴⁾ (obr. 10). Čtenář se může o tom sám snadno přesvědčit. Např. úsečka CT_{AB} spojující body C a T_{AB} je osou vnitřního úhlu ACB , protože bod T_{AB} dělí stranu AB v poměru délek stran přilehlých stran AC a BC .

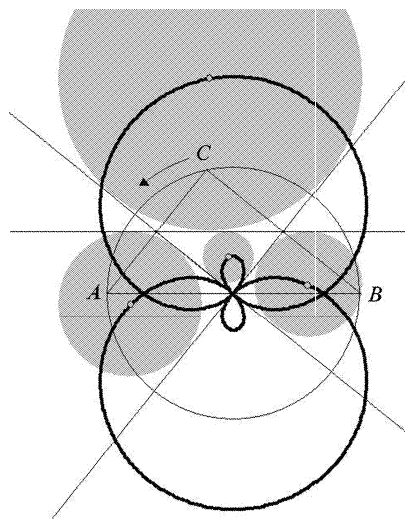
A naše spásná myšlenka byla: Zkusme sestrojit středy kružnic připsaných k příčkovému trojúhelníku, které nazveme *vnější Spiekerovy středy* trojúhelníku ABC .

Výsledek byl: Křivky popsané rovnicemi (1) se skládají z množiny všech čtyř Spiekerových středů, to je ze středů vepsaných a připsaných kružnic příčkovému trojúhelníku (obr. 11). Pro větší přehlednost obrázku jsou vnitřky těchto kružnic obarveny.

⁴⁾ Viz např. <http://faculty.evansville.edu/ck6/tcenters/class/spieker.html>



Obr. 10 Těžiště hranice trojúhelníku je středem kružnice vepsané příčkovému trojúhelníku

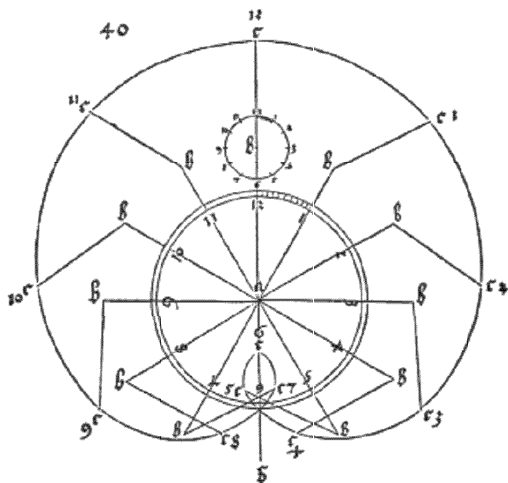


Obr. 11 Středů připsaných a vepsaných kružnic příčkových trojúhelníků vyplní křivky z obr. 9

Ale, to ještě nebyl konec. Ukázalo se, že křivky s rovnicemi (1) patří mezi tzv. *Pascalovy závitnice*⁵⁾. Podrobněji se těmito křivkami zabýval

⁵⁾ V německy mluvících zemích se nazývají *Pascalsche Schnecken*, v anglicky mluvících zemích *Pascal snails*, ve francouzsky mluvících zemích *Limaçon de Pascal*.

již *Étienn Pascal* (1588–1651), otec dobře známého *Blaise Pascala* (1623–1662). Avšak ještě před ním můžeme nalézt tyto křivky u Albrechta Dürera v jeho spise [2] z roku 1525. Vytvářel je složením otáčivých pohybů dvou úseček. První se otáčí kolem pevného bodu a druhá kolem jejího druhého koncového bodu dvojnásobnou rychlostí. Konec druhé úsečky opisuje nám již známou závitnici. Viz obrázek 12 převzatý z výše spisu [2]. Obrázek trochu připomíná pavouka, a proto Dürer mluví o „pavoučí“ čáře (*Spinnenlinie*).



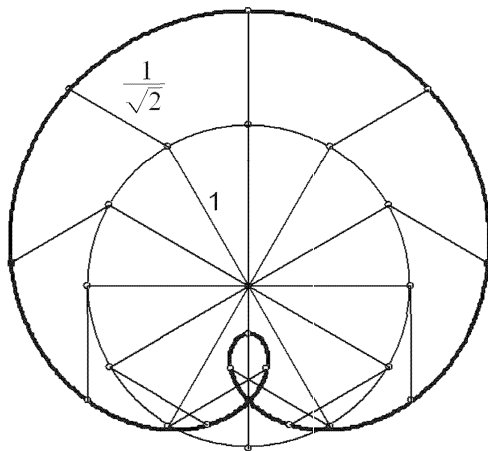
Obr. 12 Dürerův obrázek „pavoučí“ křivky

Zvolíme-li v Dürerově „pavoučí“ křivce (obr. 12) délku větší úsečky rovnou 1 a délku kratší úsečky rovnou $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dostaneme obr. 13. Tato křivka je shodná s horní křivkou na obr. 9. Malý rozdíl je pouze v tom, že čárkovaná kružnice na obr. 13 není kružnicí opsanou trojúhelníkem ABC .

Křivku z obr. 13 můžeme popsat také pomocí komplexních čísel v Gaussově rovině. Když kladnou reálnou poloosu zvolíme svislou (směřující nahoru), pak Pascalovu závitnici můžeme popsat rovnicí

$$f(z) = z + \frac{1}{\sqrt{2}}z^2, \quad (2)$$

kde z je komplexní jednotka.



Obr. 13 Pascalova závitnice neboli Dürerova „pavoučí“ křivka popsaná rovnicí (3)

Když komplexní čísla z obíhají po jednotkové kružnici, pak jejich obrazy $f(z)$ vyplní celou Pascalovu závitnici z obr. 13. To je důsledek známé Moivreovy věty o umocňování komplexních čísel. Podrobnosti získá čtenář v článku [3], nebo v jeho rozšířené české verzi [4] připravované pro náš časopis.

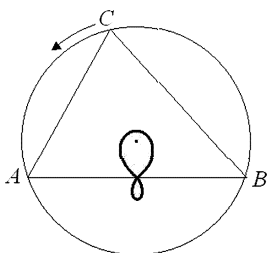
Pascalovy závitnice z obr. 9 popsané v kartézských souřadnicích rovnicemi (1), můžeme popsat i pomocí polárních souřadnic, kde polární osa vede svisle nahoru. Dostaneme jednoduché rovnice:

$$\rho = \cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \rho = -\cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

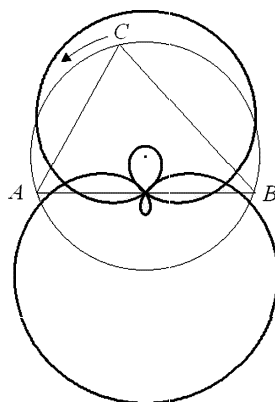
Můžete si všimnout, že číslo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se vyskytuje jak v Dürerově konstrukci, tak v rovnicích (3). Zkuste sestavit sami Pascalovy závitnice podle polárních rovnic (3).

Podobně jako v odstavci 1, ukážeme, jak se situace změní, když budeme zkoumat úlohu pro obecný trojúhelník. Jde o úlohu:

Je dána pevná kružnice k a její pevná tětiva AB . Hledali jsme opět množinu těžišť hranic všech trojúhelníků ABC , když bod C probíhá kružnicí k . Výsledkem byla, jak se dalo čekat, deformovaná „osmička“ z obr. 14, která je opět částí dvou křivek z obr. 15.



Obr. 14 „Osmičková“ dráha těžišť hranic
nepravoúhlých trojúhelníků ABC



Obr. 15 Křivky s rovnicemi (5), resp. (6)
zahrnujícími „osmičku“ z obr. 13

Pokusili jsme se opět najít pomocí Maplu rovnice drah těchto těžišť. Vrcholy A , B jsme umístili opět do bodů $(1,0)$ a $(-1,0)$. Střed kružnice k jsme umístili do bodu $(0, h)$, kde $h \geq 0$. Poloměr kružnice k je pak $r = \sqrt{1 + h^2}$. Došli jsme k rovnicím, které jsou zobecněním rovnic (1):

$$2(x^2 + y^2 - ry) = (r^2 - hr)(x^2 + y^2) \quad (4)$$

$$2(x^2 + y^2 - ry) = (r^2 + hr)(x^2 + y^2). \quad (5)$$

Obdobou rovnic (3) jsou rovnice

$$\varrho = r \cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 - hr} \quad \text{a} \quad \varrho = -r \cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 + hr}$$

Na obr. 15 vidíme zase Pascalovy závitnice, či Dürerovy „pavoučí“ křivky, tentokrát s parametry r a h .

Závěrečná poznámka. Na příspěvku je zajímavá nejen jeho matematická stránka, ale i samotná genese neustálého rozvíjení původního problému přinášející nové a nové výsledky a překvapení. Ve druhé části příspěvku náš problém obměníme a budeme v jeho vyšetřování pokračovat.

Literatura

- [1] *Fritsch, R. – Koman, M.*: Schwerpunktkurven. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2008, Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik von 13. 3. bis

18. 3. 2008 in Budapest, s. 393–396. Eva Vásárhelyi (ed). Online verze: <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2008/BzMU-2008 - alphabetisch.pdf> (str. 165)
- [2] *Dürer, A. (1525):* Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit, In: Linien Ebnen und ganzen Corporen. Verlag Dr. Alfons Uhl (Reprint 2000), Nördlingen, (Engl. Transl.: *The Painter's Manual, Abaris Books, New York 1977.* (<http://haegar.fh-swf.de/spielwiese/spinnenlinie.pdf>))
- [3] *Koman, M.:* Moivresche Formel und Wurzeln der Polynome (Visualisation mit Cabri-Geometrie). In: Neubrand, Michal (ed) *Beiträge zum Mathematikunterricht* 1999, 33. vyd., Berlin, Franzbecker Verlag, 1999, s. 309–312.
- [4] *Koman, M.:* Jak pomocí Cabri-geometrie hledáme reálné i komplexní kořeny polynomů (připraveno pro MFI).

Metoda podobnosti trojúhelníků

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře s využitím *metody podobnosti trojúhelníků* při řešení některých planimetrických úloh. Tato metoda patří kromě metody shodnosti (tj. využití shodných zobrazení v rovině) mezi nejčastěji používané prostředky syntetické planimetrie, pomocí nichž lze úspěšně řešit zejména důkazové planimetrické úlohy. Je založena na důkazu podobnosti vhodně zvolené dvojice trojúhelníků a využívá se především v důkazech shodnosti úseček, popř. shodnosti úhlů. Uvedená metoda zde bude prezentována při řešení tří tematicky příbuzných, na sebe navazujících úloh, které jsou seřazeny podle náročnosti od nejsnazší po neobtížnější tak, že tvoří tzv. *třístupňový gradovaný řetězec planimetrických důkazových úloh*, viz [2].

Článek byl připraven jako studijní materiál pro všechny zájemce o řešení planimetrických úloh, především pak pro učitele, kteří se systematicky věnují práci s matematickými talenty.

Příklad 1

Kružnice se středem v bodě S se dotýká ramen daného úhlu v bodech A a B . Libovolným vnitřním bodem M úsečky AB prochází kolmice k SM .

Její průsečíky s rameny uvažovaného úhlu označme C a D . Dokažte, že platí $|MC| = |MD|$.

Řešení. Je-li bod M středem úsečky AB , je tvrzení úlohy splněno triviálně. Dále (bez újmy na obecnosti) předpokládejme, že bod C leží na stejném rameni daného úhlu jako bod A a má od vrcholu úhlu menší vzdálenost než bod A . Bod D pak leží na stejném rameni jako bod B (obr. 1).

Podle zadání úlohy platí

$$|\angle CAS| = |\angle CMS| = 90^\circ,$$

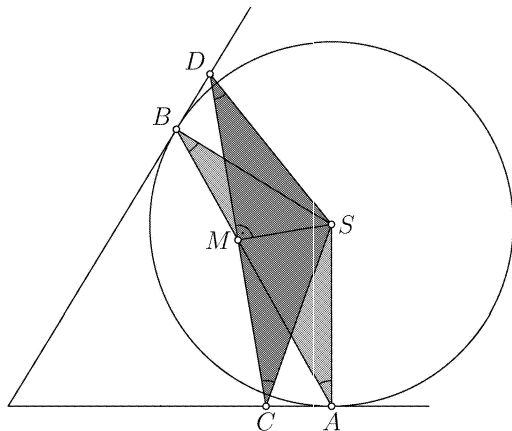
proto je čtyřúhelník $SACM$ tětivový. Podobně ukážeme, že také čtyřúhelník $SDBM$ je tětivový. Platí totiž

$$|\angle DBS| = |\angle DMS| = 90^\circ,$$

takže body B a M leží na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou SD jako jejím průměrem. Protože SAB je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB , platí

$$|\angle SCM| = |\angle SAM| = |\angle SBM| = |\angle SDM|.$$

To však znamená, že CDS je také rovnoramenný trojúhelník (se základnou CD), který je *podobný* trojúhelníku ABS . Vzhledem k tomu, že pro uvažovaný bod M úsečky AB platí $CD \perp SM$, je M středem úsečky CD , a tudíž $|MC| = |MD|$.



Obr. 1

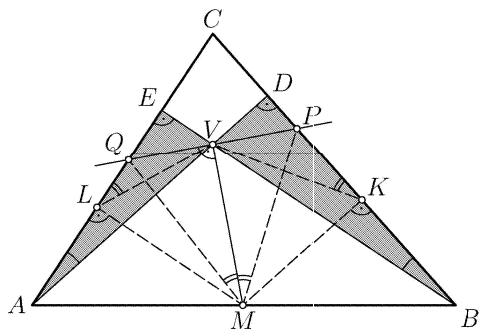
Analogicky lze postupovat také v případě, kdy bod C má od vrcholu daného úhlu větší vzdálenost než bod A . Tím je důkaz ukončen.

Všimněme si, že při řešení předešlé úlohy se výraznou měrou uplatnila právě metoda podobnosti trojúhelníků. Stejná metoda bude použita také v řešení navazující (poněkud náročnější) úlohy:

Příklad 2

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Označme V průsečík jeho výšek (ortocentrum) a M střed strany AB . Kolmice k VM procházející bodem V protíná strany BC a AC po řadě v bodech P a Q . Dokažte, že platí $|VP| = |VQ|$.

Řešení. V případě rovnoramenného trojúhelníku ABC se základnou AB je tvrzení splněno triviálně, neboť $VM \perp AB$. Dále uvažujme libovolný ostroúhlý trojúhelník ABC , který nemá výše uvedenou vlastnost, tj. pro který platí $|AC| \neq |BC|$.



Obr. 2

Označme v něm D, E paty výšek po řadě z vrcholů A, B a K, L po řadě středy úseček BD, AE . Uvažujme nejprve konfiguraci bodů P, Q ve shodě s obr. 2, tj. případ, kdy body P a Q jsou po řadě vnitřními body úseček DK a EL . Předně si všimněme, že trojúhelníky BVD a AVE jsou *podobné* (podle věty *uu*). Oba trojúhelníky jsou totiž pravoúhlé s pravými úhly při vrcholech D a E a úhly BVD a AVE jsou vrcholové, tedy shodné. Navíc platí

$$|\angle EAV| = |\angle DBV| = 90^\circ - |\angle BCA|.$$

Vzhledem k tomu, že K a L jsou po řadě středy odvěsen BD a AE obou podobných trojúhelníků, jsou podobné také pravoúhlé trojúhelníky KVD a LVE . Platí tedy $|\angle DKV| = |\angle ELV|$. Z obrázku je dále patrné, že čtyřúhelníky $KPVM$ a $LQVM$ jsou oba tětiové, neboť vnitřní úhly při jejich vrcholech K, V a L jsou pravé. Odtud plyne

$$|\angle PMV| = |\angle PKV| = |\angle DKV| = |\angle ELV| = |\angle QLV| = |\angle QML|.$$

Protože $VM \perp PQ$, je PQM rovnoramenný trojúhelník se základnou PQ , a bod V je středem jeho základny. Tím je důkaz uzavřen.

Podobně lze postupovat i případech, kdy $P = K$ nebo $Q = L$, a také v případě, kdy P je vnitřním bodem úsečky BK , nebo v případě, kdy Q je vnitřním bodem úsečky AL . Detailní provedení důkazu v těchto situacích ponecháváme laskavému čtenáři.

Poznámka. Uvedenou úlohu lze také řešit využitím tzv. „věty o motýlku“ (Butterfly theorem), viz např. [1]. Zde je však nutno uvažovat ještě průsečíky přímky PQ s kružnicí opsanou danému trojúhelníku ABC .

Příklad 3 (29. Turnaj měst, viz [3])

Úhlopříčky tětiového čtyřúhelníku se protínají v bodě P . Nechť K, L, M, N jsou středy jeho stran. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům PKL, PLM, PMN a PNK jsou shodné.

Řešení. Označme A, B, C, D vrcholy uvažovaného tětiového čtyřúhelníku a K, L, M, N středy jeho stran ve shodě s obr. 3. Z vlastností obvodových úhlů plyne

$$|\angle ABD| = |\angle ACD| \quad \text{a} \quad |\angle BAC| = |\angle BDC|,$$

a proto jsou trojúhelníky ABP a DCP podobné. Protože K a M jsou po řadě středy stran AB a CD podobných trojúhelníků ABP a DCP , jsou (stejně jako v řešení úlohy 2) podobné rovněž trojúhelníky AKP a DMP . Platí tedy

$$|\angle APK| = |\angle DPM|.$$

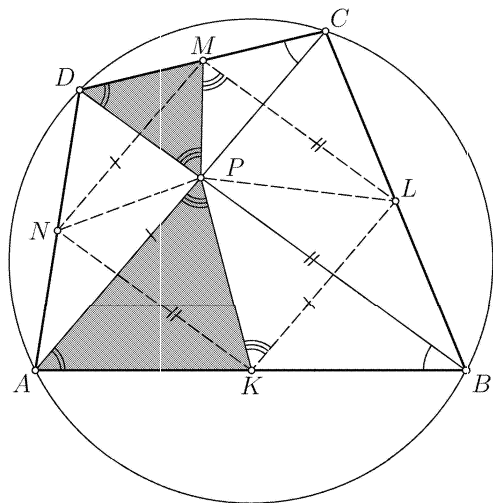
Dále si všimněme, že úsečka LM je střední příčkou v trojúhelníku BDC , a proto jsou přímky ML a BD rovnoběžné. Podobně úsečka KL je střední

příčkou v trojúhelníku ACB . Z vlastností střídavých úhlů (pro dvojice rovnoběžek LM, BD a KL, AC) plyne

$$|\angle LMP| = |\angle DPM| = |\angle APK| = |\angle LKP|.$$

To ale znamená, že z bodů K a M (ležících v opačných polorovinách vyřatých přímkou PL) vidíme úsečku PL pod týmž úhlem, a proto jsou kružnice opsané trojúhelníkům PLK a PLM shodné.

Analogicky dokážeme, že také kružnice opsané trojúhelníkům PMN a PNK jsou shodné s kružnicemi opsanými trojúhelníkům PKL a PLM . Tím je důkaz ukončen.



Obr. 3

Poznámka. Středy stran libovolného (i nekonvexního) čtyřúhelníku tvoří vrcholy tzv. *Varignonova rovnoběžníku*.

Literatura

- [1] Coxeter, H. S. M. – Greitzer, S. L.: Geometry revisited. The Mathematical Association of America, 1967.
- [2] Švrček, J.: Tvorba a využití gradovaných řetězců matematických úloh. Vydavatelství UP, Olomouc 2008.
- [3] <http://www.kag.upol.cz/turnajmest>

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 159 a 160, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (18.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 159

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y = z^3 + 1,$$

$$y^2 + z = x^3 + 1,$$

$$z^2 + x = y^3 + 1.$$

Pavel Calábek

Řešení: Všechny tři rovnice sečteme a po úpravě dostaneme

$$(x+1)(x-1)^2 + (y+1)(y-1)^2 + (z+1)(z-1)^2 = 0. \quad (1)$$

Ukážeme, že všechny tři neznámé nabývají hodnotu alespoň -1 . Předpokládejme, že jedna z neznámých nabývá hodnotu menší než -1 . Jelikož zadaná soustava rovnic je cyklická, můžeme předpokládat, že je to proměnná x a platí $x < -1$. Ze druhé rovnice zadané soustavy potom plyne $y^2 + z < 0$, neboli

$$z < -y^2. \quad (2)$$

Podle první dané rovnice platí $z^3 - y = x^2 - 1 > 0$. Odtud plyne $y < z^3$. Užitím (2) odtud dostaneme $y < z^3 < (-y^2)^3 = -y^6$. Tedy $y(1 + y^5) < 0$. Proto nutně platí $y \in (-1; 0)$. Vzhledem k výše odvozenému omezení $y < z^3 < -y^6$ odtud také plyne $z \in (-1; 0)$. S ohledem na intervaly, ve kterých leží neznámé x, y, z , je $1 + y^3 > 0$ a $z^2 + x < 0$, tedy $z^2 + x < 0 < 1 + y^3$. Tento vztah je ovšem ve sporu se třetí rovnicí zadané soustavy. To je spor s předpokladem, že $x < -1$.

Jelikož všechny neznámé nabývají hodnotu alespoň -1 , nabývá každý ze sčítanců na levé straně rovnice (1) nezáporné hodnoty. Jejich součet bude roven 0, právě když každý ze sčítanců na levé straně této rovnice bude roven 0. To nastane, právě když $x, y, z \in \{-1, 1\}$. Zkouškou snadno

ověříme, že pouze trojice $(-1; -1; -1)$ a $(1; 1; 1)$ jsou řešením zadané soustavy rovnic.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *Josef Křišťan* z MFF UK v Praze, *David Klaška* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše a *Martina Vaváčková* z GPdC v Táboře.

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Simona Domesová* z GMK v Bílovci, *Anna Chejnovská* z GBN v Hradci Králové, *Lukáš Chlad* z G v Plzni, Mikulášské nám. a *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R.

Úloha 160

Nechť ρ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC a ρ_a, ρ_b, ρ_c jsou poloměry kružnic vně připsaných jeho stranám. Určete obsah trojúhelníku ABC , jestliže ρ_a, ρ_b a ρ_c jsou vyjádřeny přirozenými čísly a $\rho = 2$.

Jaroslav Švrček

Řešení: Označme S obsah trojúhelníku ABC a a, b, c velikosti jeho stran BC, CA, AB . Uvedme nejprve několik známých vztahů mezi potřebnými prvky trojúhelníku

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} \quad (3)$$

$$S = \sqrt{\rho \rho_a \rho_b \rho_c}, \quad (4)$$

$$\frac{S}{\rho_a} = \frac{1}{2}(-a + b + c), \quad \frac{S}{\rho_b} = \frac{1}{2}(a - b + c), \quad \frac{S}{\rho_c} = \frac{1}{2}(a - b + c). \quad (5)$$

Na druhou stranu, pokud $\rho, \rho_a, \rho_b, \rho_c$ jsou kladná reálná čísla vyhovující vztahu (3), můžeme pomocí vztahů (4) a (5) jednoznačně určit hodnoty a, b, c . Ze vztahu (5) navíc plyne, že tato čísla budou splňovat trojúhelníkové nerovnosti, tedy bude existovat trojúhelník, pro nějž by byly $\rho, \rho_a, \rho_b, \rho_c$ po řadě poloměry kružnice vepsané a poloměry kružnic připsaných jednotlivým stranám.

Podle zadání úlohy tedy stačí určit všechna řešení (diofantovské) rovnice (3) v oboru přirozených čísel pro $\rho = 2$. Vztah (3) má tvar

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}. \quad (6)$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $0 < \rho_a \leq \rho_b \leq \rho_c$. Ze vztahu (6) plyne $\rho_a \geq 3$. Kdyby $\rho_a > 6$, potom by platilo $\frac{1}{6} > \frac{1}{\rho_a} \geq \frac{1}{\rho_b} \geq \frac{1}{\rho_c}$ a tedy

$$\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} < \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

což je ve sporu s (3). Proto $\rho_a \in \{3, 4, 5, 6\}$. Všechny čtyři případy rozebereme samostatně.

Nechť $\rho_a = 3$. Vztah (6) upravíme na tvar

$$(\rho_b - 6)(\rho_c - 6) = 36.$$

Vzhledem k tomu, že $-3 = \rho_a - 6 \leq \rho_b - 6 \leq \rho_c - 6$, platí, že oba činitele na levé straně jsou kladná celá čísla a mohou nastat možnosti z následující tabulky:

$\rho_b - 6$	1	2	3	4	6
$\rho_c - 6$	36	18	12	9	6

Odtud již snadno vyjádříme čísla ρ_b a ρ_c . Tato čísla a obsah trojúhelníku vypočítaný podle vztahu (4) jsou uvedena v prvních pěti sloupcích tabulky na konci řešení tohoto příkladu.

Nechť $\rho_a = 4$. Vztah (6) upravíme na tvar

$$(\rho_b - 4)(\rho_c - 4) = 16.$$

Vzhledem k tomu, že $0 = \rho_a - 4 \leq \rho_b - 4 \leq \rho_c - 4$, platí, že oba činitele na levé straně jsou kladná celá čísla a mohou nastat možnosti z následující tabulky:

$\rho_b - 4$	1	2	4
$\rho_c - 4$	16	8	4

Odtud již snadno vyjádříme čísla ρ_b a ρ_c a zapíšeme i s obsahem trojúhelníku do šestého až osmého sloupce tabulky na konci řešení.

Nechť $\rho_a = 5$. Vztah (6) upravíme na tvar

$$(3\rho_b - 10)(3\rho_c - 10) = 100.$$

Vzhledem k tomu, že $5 = 3\rho_a - 10 \leq 3\rho_b - 10 \leq 3\rho_c - 10$, platí, že oba činitele na levé straně jsou kladná celá čísla větší než 5, která při dělení třemi dávají zbytek 2. Proto $3\rho_b - 10 = 5$ a $3\rho_c - 10 = 20$. Odtud již vyjádříme čísla ρ_b a ρ_c a zapíšeme i s obsahem trojúhelníku do devátého sloupce závěrečné tabulky.

Nechť $\rho_a = 6$. Vztah (6) upravíme na tvar

$$(\rho_b - 3)(\rho_c - 3) = 9.$$

Vzhledem k tomu, že $3 = \rho_a - 3 \leq \rho_b - 3 \leq \rho_c - 3$, platí, že oba činitele na levé straně jsou kladná celá čísla, a musí být $\rho_b - 3 = 3$ a $\rho_c - 3 = 3$. Odtud již vyjádříme čísla ρ_b a ρ_c a zapíšeme i s obsahem trojúhelníku do posledního sloupce následující tabulky.

ρ	2									
ρ_a	3					4			5	6
ρ_b	7	8	9	10	12	5	6	8	5	6
ρ_c	42	24	18	15	12	20	12	8	10	6
S	42	$24\sqrt{2}$	$18\sqrt{3}$	30	$12\sqrt{6}$	$20\sqrt{2}$	24	$16\sqrt{2}$	$10\sqrt{5}$	$12\sqrt{3}$

Všech deset možných obsahů trojúhelníků vyhovujících podmínkám úlohy je uvedeno v posledním řádku předchozí tabulky.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Josef Křišťan* z MFF UK v Praze, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Simona Domešová* a *Jakub Solovský*, oba z GMK v Bílovci, *Adam Juraszek* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *David Klačka* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Nevorál* z G Jihlava, *Jana Masaryka*, *Miroslav Olšák* z GB v Praze 5, *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Petr Ryšavý* z GJH v Praze, *Jáchym Sýkora* z z GChD v Praze 5 a *Martina Vaváčková* z GPdC v Táboře.

Neúplné řešení zaslal *Lukáš Chlad* z G v Plzni, Mikulášské nám.

Pavel Calábek