

MATEMATIKA

Cílené řetězce matematických úloh

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Jistě jste slyšeli povzdechy některých dětí, ale spíše bývalých dětí, když jde o matematiku „já prostě na matematiku nejsem“, „já jsem matematiku nikdy nechápal(a)“, „matematika pro mne vždycky byla záhadou“, atd. Zkoumání oprávněnosti a příčin takových výroků, analýza stupně jejich oprávněnosti a posouzení, jaká je v tom role učitelů, však není cílem tohoto článku. Připomeňme jen jednu z těchto příčin, která působí, že tyto stesky jsou někdy oprávněné, a tou je extenzita výuky matematiky – žáci se ještě dostatečně neseznámili s jedním tématem, „neprožili“ je a neovládli jeho základy, a už se spěchá na téma další. Je tedy problém, jak za současného stavu i přes současnou poměrně malou hodinovou dotaci matematiky ve školách lze zlepšit účinnost výuky.

Jednou z možností prevence příčin takových pocitů je *diferenciace základního učiva* podle stupně nadání jednotlivých žáků a *zvýšení intenzity* jeho probírání. Nutná podmínka k tomu, aby se u žáků mohlo dosáhnout neformální znalosti matematiky, je, aby se povinná část výuky matematiky omezila jen na to podstatné a právě tady je možnost zvýšení intenzity výuky. Nemělo by jít např. o to, aby „čtyřkař“ dovedl s chybami řešit obtížné nebo středně obtížné úlohy (tj. vlastně neuměl je řešit), ale aby dovedl vyřešit snadnější úlohy z daného tématu samostatně a bez chyb. Zvětšení „šířky záběru základního učiva“ lze pak už řešit souběžným individuálním přístupem k „lepší“ žákům a tím, že pro to jsou v základním učivu nabaleny další poznatky. Každý žák, nemá-li se odvrátit od matematiky, potřebuje (tu a tam) úspěch a učitel ho i slabším žákům může (a měl by) dopřát, když je nechá samostatně pracovat většinou jen na úlohách zcela zásadních, přiměřených jejich možnostem, dobře probraných a procvičených.

Jak víme, má školská matematika dvě stránky. Předně je to „řemeslo“ (znalost pojmů, znalost algoritmů, dovednost je používat), bez něhož se neobejde žádná kvalitní lidská činnost. Druhou stránku bychom mohli nazvat „řešení problémů“, kdy jde jednak o typové problémy, k nimž lze se žáky vytvořit buď také algoritmus nebo alespoň strategii (hlavní myšlenku) řešení, a jednak o speciální problémy, kdy žák musí při řešení problému zmobilizovat a uplatnit všechny své matematické znalosti a zkušenosti a přemýšlet „nově“. Nejvyšším typem jsou úlohy, při jejichž řešení je nejprve nutno hledat matematický model, který nás může dovést k cíli (takových úloh je však ve škole bohužel málo, ale je možné je jistě nalézt v MO). Ale i zde lze nalézt či vytvořit úlohy různé náročnosti.

Jednou z možností, jak zlepšit výsledky při nácviu „řemesla“, je používání metody *cílených řetězců* matematických úloh. V čem spočívá tato metoda; začněme zkušeností odjinud. V [1] se pojednává o využívání *gradovaných řetězců matematických úloh* ve víceúrovňových matematických soutěžích, zejména MO. Ukazuje se, že pro vzdělávání a efektivní výcvik olympioniků je užitečné, když jsou v jednotlivých kolech soutěže použity úlohy ze záměrně vytvořeného řetězce úloh, které jsou sice samostatné, ale jistým způsobem na sebe navazují, tj. v každém dalším kole se při řešení příslušné úlohy znovu použijí některé myšlenky a poznatky z úloh předchozích kol a k tomu pak ještě přistoupí některé nové problémy. V našem případě, tj. při základním matematickém vzdělávání žáků, nejde o soutěž, ale o to, aby žáci zvládli požadované standardy a řešení úloh stanovených ve Školním vzdělávacím programu. I v základní úrovni vzdělávání je však často možné a užitečné vytvářet k jednotlivým bodům učebního cíle (jímž je např. uvědoměná znalost řešení určitého druhu úloh) promyšlené cílené řetězce úloh *vybraných ze základního učiva*, kde každá další úloha v řetězci rozšiřuje znalosti a zkušenosti žáků s řešením úloh vztahujících se k cílovému problému.

Princip použití cílených řetězců matematických úloh

Pojednejme nyní o tom, v čem spočívá tato metoda.

Příprava učitele

Nejprve si učitel podle ŠVP stanoví, které cílové kompetence (znalosti, dovednosti) by jeho žáci měli v příští dílčí etapě výuky (v příštích několika vyučovacích hodinách) zvládnout a jaký druh úloh tomuto cíli odpovídá. Podle toho vybere jeden nebo více typů základních úloh, znalost jejichž

řešení bude pro žáky kritériem úspěšnosti výuky. Z verzí těchto úloh vytvoří jejich řetězec zaměřený na splnění vybraného dílčího cíle ve zvoleném časovém intervalu. Přitom ovšem nelze jednoznačně připravit univerzální cílený řetězec úloh, který by se dal použít ve všech případech. Musí se totiž přihlídnout k řadě okolností.

Předně je třeba vzít ohled na věk žáků, druh školy, matematickou úroveň žáků a také na konkrétní situaci v dané škole a třídě. S těmito znalostmi si učitel (postupně) připravuje řetězec úloh cílený na splnění vytčeného záměru a udělá časovou rozvahu jeho použití. Samozřejmě že i dobu, na kterou se řešení úloh z daného řetězce rozloží, musí učitel zvolit podle konkrétní situace. Přitom se zaměří na základní učivo a na základní úroveň žáků (tj. např. na „tři mínus“). V celém průběhu však přidává „dobrovolné“ úlohy, které jsou povinné pro žáky, kteří chtějí lepší známku.

Práce se žáky:

- 1⁰ V úvodní hodině (hodinách) učitel vykonává se žáky přípravné práce: probere, připomene nebo procvičí potřebné základní pojmy, jednoduché operace a podúlohy, které budou následně použity při řešení úloh z daného cíleného řetězce.
- 2⁰ Společně se třídou vyřeší jednu (nebo i více) středně složitou úlohu z daného řetězce tak, aby se tu vyskytla velká část základních jevů, s nimiž se žáci setkají v celém řetězci úloh. Úlohy se třídou analyzují do plné srozumitelnosti a formulují (kde je to účelné) obecný princip řešení, postup (jevovou analýzu); ve vhodných případech i s použitím IKT. Další úlohou (úlohami) lze učivo procvičit.
- 3⁰ Žáci dostanou z daného tématu zadánu domácí úlohu, jejíž vyřešení se zkontroluje.
- 4⁰ Učitel zadá vypracování neklasifikované samostatné písemné práce*).
- 5⁰ Výsledek výuky se ověří (klasifikovanou) písemkou.
- 6⁰ Zhodnotí se výsledky písemky.

Není rozumné násilím od sebe trhat úlohy tématicky příbuzné, proto je často vhodné řešit příbuzné případy souběžně, takže můžeme pak pracovat třeba i s více cílenými do sebe vpletenými řetězci. Je pak na učiteli, aby celý postup správně a přehledně režíroval. (V hodinách, kde se pracuje

*) V článku [2] připomněl autor princip a význam samostatných prací pro efektivní zvládnutí matematického učiva a to na vyšší úrovni, tj. aby je žáci dovedli používat s velkým podílem samostatnosti.

s úlohami daného řetězce, není nezbytné soustředit se jen na ně, ale lze se v části hodiny zabývat i jinými tématy, např. vracet se k minulým látkám.)

Dále si ukážeme návrh výběru úloh a dílčích kroků v řetězcích cílených do tématického okruhu Práce s druhou odmocninou. Nabídneme zde vhodné úlohy a je na učiteli, které a jak použije. Jistě si povšimnete, že námi dále uvedené řetězce úloh neobsahují např. úlohy o vyšších odmocninách, ty by měly místo případně až v jiném tématu, aby se probíraná tematika příliš nerozměľňovala.

Řetězec I. Částečné odmocňování a násobení odmocnin

Cílem použití řetězce I je, aby žáci dovedli řešit úlohy na *částečné odmocňování a na součiny a druhé mocniny dvojčlenů s odmocninami*.

1⁰ Přípravné práce

Předpokládáme, že žáci už vědí, co je to druhá odmocnina z nezáporného čísla, dovedou ji pomocí kalkulačky vypočítat a již se setkali s nejjednoduššími vlastnostmi druhých odmocnin (též s odmocninou ze součinu). Je třeba novou látku na jednoduchých příkladech vysvětlit a postupně dosáhnout toho, aby žáci oběma cílovým operacím porozuměli.

Ú1: Ve spolupráci se třídou počítat částečné odmocniny ve výrazech:

$$\sqrt{12}, \sqrt{18}, \sqrt{50}, \sqrt{810}, \sqrt{48}, \sqrt{8}, \sqrt{1440}, \sqrt{968}, \sqrt{578}, \sqrt{1083}, \dots$$

Řešení: $2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 9\sqrt{10}, 4\sqrt{3}, 2\sqrt{2}, 12\sqrt{10}, 22\sqrt{2}, 17\sqrt{2}, 19\sqrt{3}, \dots$

Poznatek: Je vhodné znát druhé mocniny přirozených čísel do 20.

Ú2: (Ve spolupráci se třídou) provést naznačené operace, výsledek zjednodušit a pokud je to možné i pomocí částečného odmocnění: $(4\sqrt{2})^2$, $(5\sqrt{3})^2$, $(3\sqrt{5})^2$, $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, $(\sqrt{14} - 7) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{21})$, $(\sqrt{6} - 3) \cdot (\sqrt{6} + 3)$, $(\sqrt{5} + 2) \cdot (2 - \sqrt{5})$, $(\sqrt{10} + 2) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})$, $(4 - 3\sqrt{2})^2, \dots$

Řešení: $32, 75, 45, 5 - 2\sqrt{6}, 7(\sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{7} + \sqrt{21}), -3, -1, 3\sqrt{2}, 34 - 24\sqrt{2}, \dots$

Problém: Na příkladu výrazů $(\sqrt{50} - \sqrt{45})^2$, $(\sqrt{75} - \sqrt{27})^2$ ověřte, zda je vhodnější výraz nejprve umocnit a pak částečně odmocnit, nebo naopak; totéž pro násobení $(\sqrt{18} - \sqrt{12}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{27})$.

$$V_1 = (\sqrt{50} - \sqrt{45})^2 = 50 + 45 - 2\sqrt{50}\sqrt{45} = 95 - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} = 95 - 30\sqrt{10}.$$

$$V_1 = (5\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2 = 50 + 45 - 30\sqrt{10} = 95 - 30\sqrt{10}.$$

$$V_2 = (\sqrt{75} - \sqrt{27})^2 = 75 + 27 - 2\sqrt{75}\sqrt{27} = 102 - 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 102 - 90 = 12.$$

$$V_2 = (5\sqrt{3} - 3\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12.$$

$$V_3 = (\sqrt{18} - \sqrt{12}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{27}) = \sqrt{36} - \sqrt{24} - \sqrt{18 \cdot 27} + \sqrt{12 \cdot 27} = 6 - 2\sqrt{6} - 3 \cdot 3\sqrt{6} + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 24 - 11\sqrt{6}.$$

$$V_3 = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) = 3 \cdot 2 - 2\sqrt{6} - 9\sqrt{6} + 6 \cdot 3 = 24 - 11\sqrt{6}.$$

2⁰ Společné řešení a analýza ukázkových úloh

Ú1: Do výrazu $V = \frac{a^2 - 4b}{7}$ dosadte $a = 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, $b = 10 - 7\sqrt{6}$, výraz zjednodušte a vypočítejte jeho numerickou hodnotu s přesností na 3 desetinná místa.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } V &= \frac{(7\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (10 - 7\sqrt{6})}{7} = \\ &= \frac{98 - 28\sqrt{6} + 12 - 40 + 28\sqrt{6}}{7} = 10,000. \end{aligned}$$

Postup:

- do výrazu V dosadit za a , b ,
- provést naznačené početní výkony,
- výraz V upravit,
 - určit jeho numerickou hodnotu (zde vznikla již při úpravě).

Ú2: Po úpravě výrazu $V = (\sqrt{48} - \sqrt{24})^2 - (\sqrt{18} - 8)^2$ vypočítejte jeho numerickou hodnotu s přesností na 2 desetinná místa.

$$\text{Řešení: } V = 48 + 24 - 2\sqrt{48}\sqrt{24} - 18 - 64 + 16\sqrt{18} = -10 - 48\sqrt{2} + 48\sqrt{2} = 10,00.$$

Postup:

- provést naznačené početní výkony,
- výrazy s odmocninami částečně odmocnit,
- výraz V upravit,
 - určit jeho numerickou hodnotu (zde vznikla již při úpravě).

$$\begin{aligned} \text{Jiná možnost:} & \text{ zaměníme pořadí prvních dvou bodů: } V = (4\sqrt{3} - 2\sqrt{6})^2 - \\ & - (3\sqrt{2} - 8)^2 = 48 + 24 - 16\sqrt{18} - 18 - 64 + 48\sqrt{2} = -10 - 48\sqrt{2} + 48\sqrt{2} = \\ & = -10,00. \end{aligned}$$

3⁰ Domácí úloha

Ú1: Částečně odmocněte $\sqrt{12}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{810}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{1250}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{98}$, $\sqrt{320}$.

Řešení: $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $9\sqrt{10}$, $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$, $25\sqrt{2}$, 14 , $7\sqrt{2}$, $8\sqrt{5}$.

Ú2: Proveďte naznačené operace, výsledek zjednodušte a určete numerickou hodnotu jednotlivých výrazů s přesností na 3 desetinná místa.

$(4 - 3\sqrt{2})^2$, $(3 + 2\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2} - 5)$, $(\sqrt{5} - 1)^2$, $(\sqrt{147} + \sqrt{72}) \cdot (\sqrt{162} + \sqrt{192})$, $(13 - \sqrt{125})^2$.

Řešení: $(4 - 3\sqrt{2})^2 = 34 - 24\sqrt{2} \doteq 0,059$; $(3 + 2\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{2} - 5) = -3 - \sqrt{2} \doteq -4,414$; $(\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5} \doteq 1,528$; $(\sqrt{147} + \sqrt{72}) \cdot (\sqrt{162} + \sqrt{192}) = (7\sqrt{3} - 6\sqrt{2}) \cdot (9\sqrt{2} + 8\sqrt{3}) = 56 \cdot 3 - 54 \cdot 2 + 63\sqrt{6} - 48\sqrt{6} = 60 + 15\sqrt{6} \doteq 96,742$; $(13 - \sqrt{125})^2 = 294 - 130\sqrt{5} \doteq 3,311$.

4⁰ Samostatná práce

Ú1: Do výrazu $V = \frac{b^2 - 4a}{3}$ dosaďte $a = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$, $b = 5 - 6\sqrt{6}$, výraz zjednodušte a pak vypočítejte jeho číselnou hodnotu s přesností na 1 desetinné místo.

Řešení: $V = \frac{(\sqrt{27} - \sqrt{32})^2 - 4(5 - \sqrt{216})}{3} =$
 $= \frac{27 - 24\sqrt{6} + 32 - 20 + 24\sqrt{6}}{3} = 13,0.$

5⁰ Písemka je zařazena až v následujícím řetězci *Usměrnování zlomků*.

Usměrnování zlomků

Cílem použití řetězce je, aby žáci dovedli řešit úlohy, v nichž se vyskytuje usměrnování zlomku s jednočlenným jmenovatelem a usměrnování zlomku s dvojčlenným jmenovatelem a k tomu operace se zlomky probrané v řetězci I.

Řetězec II.

1⁰ Přípravné práce

Látku na příkladech vysvětlit a postupně dosáhnout toho, aby žáci usměrnování zlomků porozuměli.

Ú1: (Ve spolupráci se třídou) usměrňovat zlomky: $\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{7}{\sqrt{98}}, \frac{6}{\sqrt{24}}, \frac{12}{\sqrt{28}},$
 $\frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{10}}, \frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{15}}, \frac{4\sqrt{288}}{\sqrt{56}}, \frac{4\sqrt{338}}{\sqrt{175}}.$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } \frac{2}{\sqrt{13}} &= \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{7}{\sqrt{98}} = \frac{7}{7\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{6}{\sqrt{24}} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{12}{\sqrt{28}} = \frac{12\sqrt{28}}{28} = \frac{6\sqrt{7}}{7}, \frac{4 - \sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10} - \sqrt{20}}{10} = \\ &= \frac{2\sqrt{10} - \sqrt{5}}{5}, \frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{15} + \sqrt{90}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{10}}{5}, \frac{4\sqrt{288}}{\sqrt{56}} = \\ &= \frac{4 \cdot 12\sqrt{2}}{2\sqrt{14}} = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{14}} = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{14}} = \frac{24\sqrt{28}}{14} = \frac{24\sqrt{7}}{7}, \frac{4\sqrt{338}}{\sqrt{175}} = \frac{4 \cdot 13\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} = \\ &= \frac{52\sqrt{14}}{35}. \end{aligned}$$

Ú2: (Ve spolupráci se třídou) usměrňovat zlomky:

$$\frac{5}{\sqrt{5}-2}, \frac{5-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}-3}, \frac{2}{\sqrt{10}+2}, \frac{\sqrt{98}+3}{7+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \frac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{4}},$$

$$\frac{\sqrt{13}-\sqrt{3}}{\sqrt{13}-\sqrt{12}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } \frac{5}{\sqrt{5}-2} &= \frac{5(\sqrt{5}+2)}{5-4} = 5(\sqrt{5}+5), \\ \frac{5-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} &= \frac{(5-\sqrt{2})^2}{25-2} = \frac{27-10\sqrt{2}}{23}, \\ \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}-3} &= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{15}+3)}{15-9} = \frac{\sqrt{75}-\sqrt{45}+3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{6} = \\ &= \frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \frac{2}{\sqrt{10}+2} &= \frac{2(\sqrt{10}-2)}{10-4} = \frac{\sqrt{10}-2}{3}, \\ \frac{\sqrt{98}+3}{7+\sqrt{2}} &= \frac{7\sqrt{2}+3}{7+\sqrt{2}} = \frac{(7\sqrt{2}+3)(7-\sqrt{2})}{49-2} = \frac{21-14+49\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{47} = \\ &= \frac{7+46\sqrt{2}}{47}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3-2} = 3+2-2\sqrt{6} = 5-2\sqrt{6}, \\ \frac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{4}} &= \frac{12(\sqrt{7}-\sqrt{4})}{7-4} = 4(\sqrt{7}-\sqrt{4}), \\ \frac{\sqrt{13}-\sqrt{3}}{\sqrt{13}-\sqrt{12}} &= \frac{(\sqrt{13}-\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{13}+\sqrt{12})}{13-12} = 13-\sqrt{39}+2\sqrt{39}-6 = \\ &= 7+\sqrt{39}.\end{aligned}$$

2^o Společné řešení a analýza ukázkových úloh:

Ú1: Zjednodušte výraz $V = \frac{\sqrt{605} - 2\sqrt{88}}{\sqrt{11}}$ a pak vypočtěte jeho hodnotu s přesností na 3, na 2 a na jedno desetinné místo.

$$\begin{aligned}\text{Řešení: } V &= \frac{\sqrt{605} - 2\sqrt{88}}{\sqrt{11}} = \frac{11\sqrt{5} - 4\sqrt{22}}{\sqrt{11}} = \frac{11\sqrt{5} - 4\sqrt{22}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \\ &= \frac{11 \cdot \sqrt{5}\sqrt{11} - 4\sqrt{2} \cdot 11\sqrt{11}}{11} = \frac{11 \cdot (\sqrt{5}\sqrt{11} - 4\sqrt{2})}{11} = \\ &= \sqrt{55} - \sqrt{32} \doteq 1,759 \doteq 1,76 \doteq 1,8.\end{aligned}$$

Postup:

- částečné odmocnění všech odmocnin,
- rozšíření zlomku výrazem (odmocninou) ve jmenovateli,
- úprava a krácení,
- zjednodušení pro numerický výpočet,
- zjištění přibližné hodnoty výrazu V na daný počet desetinných míst.

Náměty do diskuse: Vysvětlíte, proč provádíme jednotlivé kroky a čeho jimi dosáhneme. Ve kterých zvláštních případech některý z uvedených kroků neprovedeme? Vyřešte úlohu tak, že zaměníte první dva kroky. Který postup vám připadá snadnější a proč?

Ú2: Odstraňte odmocniny ze jmenovatelů zlomků a upravte:

$$V = \frac{\sqrt{5}-10}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1}.$$

$$\begin{aligned}\text{Řešení: } V &= \frac{(\sqrt{5}-10) \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} + \frac{(\sqrt{3}+3) \cdot (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1) \cdot (\sqrt{3}-1)} = \\ &= \frac{5-10\sqrt{5}}{5} + \frac{3-3+2\sqrt{3}}{2} = 1-2\sqrt{5}+\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Zapište stručně postup řešení. Uvědomíme si, že jsme tu každý zlomek upravovali zvlášť.

Ú3: Zjednodušte:

$$V = (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 \cdot \left(\frac{3}{4 - \sqrt{10}} - \frac{5}{\sqrt{10}} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } V &= (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 \cdot \left(\frac{3}{4 - \sqrt{10}} - \frac{5}{\sqrt{10}} \right) = \\ &= (7 - 2\sqrt{10}) \cdot \left(\frac{3 \cdot (4 + \sqrt{10})}{6} - \frac{5\sqrt{10}}{10} \right) = (7 - 2\sqrt{10}) \cdot 2. \end{aligned}$$

Zapište stručně postup řešení.

- první výraz umocníme a u dvou zlomků provedeme usměrnění,
- upravujeme rozdíl zlomků v závorce,
- provedeme naznačené vynásobení.

Ještě jeden podobný příklad na procvičení:

Ú4: Zjednodušte: $V = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \cdot \left(\frac{1}{3 + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$ a určete jeho numerickou hodnotu s přesností na 4 desetinná místa.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } V &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \cdot \left(\frac{1}{3 + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) = \\ &= (5 - 2\sqrt{6}) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) = 5 - 2\sqrt{6} \doteq 0,1010. \end{aligned}$$

Vyslovte stručně postup řešení.

3⁰ Samostatná práce

Ú1: Zjednodušte výraz $s = \frac{5\sqrt{98} - \sqrt{90}}{\sqrt{10}}$ a pak vypočítejte jeho hodnotu s přesností na 3, na 2 a na jedno desetinné místo.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } s &= \frac{5\sqrt{98} - \sqrt{90}}{\sqrt{10}} = \frac{5 \cdot 7\sqrt{2} - 3\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{35\sqrt{20} - 30}{10} = \\ &= \frac{70\sqrt{5} - 30}{10} = 7\sqrt{5} - 3 \doteq 12,652 \doteq 12,65 \doteq 12,7. \end{aligned}$$

Ú2: Odstraňte odmocniny ze jmenovatelů zlomků a upravte:

$$V = \frac{\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } V &= \frac{(\sqrt{3}-6)\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} + \frac{(\sqrt{5}+5)(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \\ &= \frac{3-6\sqrt{3}}{3} + \frac{5-5+4\sqrt{5}}{4} = 1-2\sqrt{3}+\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Ú3: A|B: Do výrazu

$$A = \frac{16a}{a^2+3} \quad \Bigg| \quad B = \frac{6b}{2-b^2}$$

dosadíte $a = \sqrt{5} - 2$ [$b = 3 - \sqrt{5}$] a odstraňte odmocniny ze jmenovatele zlomku.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } C &= \frac{16(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}-2)^2+3} = \frac{16(\sqrt{5}-2)}{5-4\sqrt{5}+4+3} = \frac{16(\sqrt{5}-2)}{4(3-\sqrt{5})} = \\ &= \frac{4(\sqrt{5}-2)(3+\sqrt{5})}{9-5} = -1+\sqrt{5}. \\ D &= \frac{6(3-\sqrt{5})}{2-(3-\sqrt{5})^2} = \frac{6(3-\sqrt{5})}{2-9+6\sqrt{5}-5} = \frac{6(3-\sqrt{5})}{6(-2+\sqrt{5})} = \\ &= \frac{(3-\sqrt{5})(-2-\sqrt{5})}{-1} = 1+\sqrt{5}. \end{aligned}$$

4⁰ Domácí úloha

Ú1: Zjednodušte výraz

$$V = \frac{3\sqrt{50}-\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$$

a pak vypočítejte jeho hodnotu s přesností na 3, na 2 a na jedno desetinné místo.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } V &= \frac{3\sqrt{50}-\sqrt{24}}{\sqrt{6}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} - 2 = \frac{15 \cdot \sqrt{12}}{6} - 2 = \frac{30 \cdot \sqrt{3}}{6} - \\ &= 5\sqrt{3} - 2 \doteq 6,660 \doteq 6,66 \doteq 6,7. \end{aligned}$$

Kontrola domácí úlohy: Kdo nejprve částečně odmocnil?

$$\text{Ú2: Zjednodušte: } V = (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{15}-3} + \frac{5}{\sqrt{15}} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } V &= (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{15} - 3} + \frac{5}{\sqrt{15}} \right) = \\ &= (8 - 2\sqrt{15}) \cdot \left(\frac{2(\sqrt{15} + 3)}{6} - \frac{5\sqrt{15}}{15} \right) = 8 - 2\sqrt{15}. \end{aligned}$$

Ú3: Zjednodušte:

$$a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 \cdot \left(\frac{1}{2 - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } a &= (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 \cdot \left(\frac{1}{2 - \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (5 - 2\sqrt{6}) \cdot \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= 5 - 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

5⁰ Úlohy na písemku

Ú1: A|B Zjednodušte výraz

$$a = \frac{4\sqrt{288} - 3\sqrt{162}}{\sqrt{56}} \quad \Bigg| \quad b = \frac{4\sqrt{338} - 3\sqrt{128}}{\sqrt{175}}$$

a pak vypočtete jeho hodnotu s přesností na 3, na 2 a na jedno desetinné místo.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } a &= \frac{4\sqrt{288} - 3\sqrt{162}}{\sqrt{56}} = \frac{4 \cdot 12 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 9 \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{14}} = \frac{21\sqrt{2}\sqrt{14}}{2 \cdot 14} = \\ &= 1,5\sqrt{7} \doteq 3,969 \doteq 3,97 \doteq 4,0. \\ b &= \frac{4\sqrt{338} - 3\sqrt{128}}{\sqrt{175}} = \frac{4 \cdot 13\sqrt{2} - 3 \cdot 8\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} = \frac{28\sqrt{2}\sqrt{7}}{5 \cdot 7} = 0,8\sqrt{14} \doteq \\ &\doteq 2,993 \doteq 2,99 \doteq 3,0. \end{aligned}$$

Ú2: A|B Do výrazu

$$A = \frac{24x}{x^2 + 5} \quad \Bigg| \quad B = \frac{12y}{y^2 + 1}$$

dosaďte $x = 2 - \sqrt{3}$ [$y = 3 - \sqrt{2}$] a odstraňte odmocniny ze jmenovatele zlomku.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } A &= \frac{24 \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})^2 + 5} = \frac{24 \cdot (2 - \sqrt{3})}{4 - 4\sqrt{3} + 3 + 5} = \frac{24 \cdot (2 - \sqrt{3})}{4 \cdot (3 - \sqrt{3})} = \\ &= \frac{6 \cdot (2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} = 3 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$B = \frac{12 \cdot (3 - \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})^2 + 1} = \frac{12 \cdot (3 - \sqrt{2})}{9 - 6\sqrt{2} + 2 + 1} = \frac{12 \cdot (3 - \sqrt{2})}{6 \cdot (2 - \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2 \cdot (3 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = 4 + \sqrt{2}.$$

Ú3: A|B Odstraňte odmocniny ze jmenovatelů zlomků a zjednodušte výraz:

$$A = \frac{33}{5 - \sqrt{3}} - \frac{9}{2\sqrt{3}} \quad \Bigg| \quad B = \frac{55}{2(4 - \sqrt{5})} - \frac{25}{2\sqrt{5}}$$

Řešení:

$$A = \frac{33(5 + \sqrt{3})}{25 - 3} - \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3(5 + \sqrt{3})}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}$$

$$B = \frac{55(4 + \sqrt{5})}{2 \cdot (16 - 5)} - \frac{25\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{5(4 + \sqrt{5})}{2} - \frac{5\sqrt{5}}{2} = 10.$$

Je ovšem samozřejmé, že i dobře probraná témata je v třeba v souladu s křivkou zapominání trvale opakovat.

Závěr

Téma (práce s odmocninami), na kterém jsme předvedli *metodu cílených řetězců matematických úloh*, má už patrně zenit své slávy za sebou (dříve se probíralo v mnohem větším rozsahu), ale na druhé straně je jisté nelze vynechat pro jeho postavení v úpravách algebraických výrazů podloženého formálně i v *Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia* (viz [4], očekávané výstupy: „žák provádí operace s mocninami a odmocninami, upravuje číselné výrazy“). Je cenné pro získávání vydatné početní obratnosti, pro kultivaci vlastností v matematice i v životě potřebných, jako je schopnost vytrvalé práce, vynalézavost a zdatnost při překonávání překážek a tím i pro pěstování prvních dvou z pěti P formulovaných F. Kuřinou v [3]. Např. také v [5], kapitola 2, v požadovaných znalostech a dovednostech je zařazena kompetence: „Aktivně ovládat základní pravidla pro počítání s odmocninami a mocninami s racionálním exponentem.“ Toto téma najdeme ve ŠVP nejen pro 1. ročník čtyřletého gymnázia a středních odborných škol, ale již i škol základních, i když někdy je odbyto v rozsahu, který svádí spíš k tomu, rychle je přelétnout. Mám však za to, že mnohem lepší pro vzdělání žáků je vybrat třeba jen část tématu (např. jako jsme ji zvolili zde) a probrat ji naplno, aby žáci měli čas se s vybranými úlohami spřátelit a znalosti a dovednosti jejich řešení si uchovat. Ovšem odmocniny

nebyly v tomto článku to nejdůležitější, byly jen látkou pro konkretizaci myšlenek cílených řetězců matematických úloh.

Literatura

- [1] Švrček, J.: Tvorba a využití gradovaných řetězců matematických úloh. Vydavatelství UP Olomouc, 2008.
- [2] Trávníček, S.: Pěstování samostatnosti v matematice. MFI, 17 (2007/08), č. 7, str. 385402.
- [3] Kuřina, F.: Matematika a kalkuly. MFI, r. 18 (2008/09), č. 1.
- [4] Rámcový vzdělávací program pro gymnaziální vzdělávání, pilotní verze. VÚP Praha, 2004.
- [5] Fuchs, E. Kubát, J. a kol.: Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia. Prometheus, Praha 2001.

Pěstování finanční gramotnosti ve vzdělávání středoškoláků

VLADIMÍRA PETRÁŠKOVÁ

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Úvod

V současných diskusích o příčinách finanční krize se často vyčítá bankám, že nerozvážně poskytovaly půjčky lidem, kteří je pak nebyli schopni splácet. Banky ovšem svou odpovědnost za chování lidí žijících mnohdy celý život na dluh odmítají s tím, že příčinou je většinou nízká úroveň *finanční gramotnosti* těchto dlužníků.

Otázkou zlepšení finanční gramotnosti se zabývala i vláda České republiky již koncem roku 2005 a uložila ministerstvům financí, školství a průmyslu a obchodu připravit opatření pro vzdělávání občanů v této oblasti. Dokument s názvem „Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách“ byl vypracován a v prosinci 2007 vládou také schválen. Obsahuje konkrétní standardy, které stanovují cílový stav finančního vzdělávání pro základní a střední vzdělávání. Standardy jsou nyní implementovány do rámcových vzdělávacích programů. Jsou vytvořeny tak, aby

žáci a studenti získali znalosti a dovednosti, které přispějí k lepší orientaci v problematice peněz a cen a napomohou odpovědně spravovat rodinný rozpočet (schopnost vést rozpočet, stanovovat finanční cíle a rozhodovat o alokaci finančních zdrojů s ohledem na měnící se životní situaci).

Na počátku věnujme pozornost pojmu *finanční gramotnost*. Materiály OECD z roku 1999 [4] vymezují matematickou gramotnost jako „schopnost jedince rozpoznat a porozumět roli, kterou matematika hraje ve světě, dělat odůvodněná rozhodnutí a zabývat se matematikou takovým způsobem, který odpovídá potřebám současného a budoucího života jednotlivce, takového který je konstruktivním, usilujícím a reflektivním občanem.“ Od tohoto vymezení můžeme odvodit i finanční gramotnost, která by měla, zjednodušeně řečeno, sloužit jako podklad pro důležitá rozhodování v oblasti financí.

V tomto článku uvedeme několik příkladů týkajících se financí, které by mohly být řešeny v hodinách matematiky na střední škole. Klasické příklady typu: „*Pan Novák si uložil na dobu 5 let částku 300 000 Kč při roční úrokové míře 3 % a ročním připsování úroků. Kolik Kč obdrží po 5 letech?*“ ponecháme stranou, protože jsou dostupné v řadě sbírek (např. [1]). Zaměříme se na finanční produkty, které v reálné praxi využívá asi nejvíce obyvatel České republiky, a to na spotřebitelské úvěry a splátkový prodej a některé detaily, které je třeba při jejich využívání brát v úvahu, protože zdaleka nejsou zanedbatelné. Při výpočtech budeme předpokládat že čtenář zná pojmy úrok, úroková sazba, jednoduché a složené úrokování. Naše úvahy budeme ilustrovat příklady ze „skutečného“ života.

Spotřebitelský úvěr nebo splátkový prodej?

Příklad 1 (koupě sušičky prádla)

Mladý manželský pár s malým dítětem bydlící v nájemním bytě zjistil, že provoz domácnosti by značně zjednodušila koupě sušičky prádla. Na nákup sušičky potřebuje cca 18000 Kč.

Řešení. Pro získání potřebného kapitálu mají manželé dvě možnosti. První možnost je obrátit se na banku, která poskytne spotřebitelský úvěr. Druhou variantou je splátkový prodej. Vypůjčené peníze chtějí splatit do jednoho roku. Která varianta je výhodnější?

V případě *spotřebitelského úvěru* manželé zjistili, že existují spotřebitelské úvěry dvojího charakteru: *hotovostní* a *bezhotovostní*. U hotovostních úvěrů získané peněžní prostředky mohou použít na libovolný účel, zatímco

u bezhotovostního úvěru musí sdělit bance účel použití prostředků a banka přímo proplatí faktury dodavateli. Manželům se nejdříve zalíbilo, že nebudou muset nikomu sdělovat, na co peníze potřebují, ale pak zjistili, že možnost libovolného použití finančních prostředků u hotovostních úvěrů je vykoupena vyšší úrokovou sazbou, a to cca o 1 – 2 %. Vzhledem k tomu, že účel využití vypůjčených finančních prostředků (koupě sušičky prádla) znali, přiklonili se k úvěru bezhotovostnímu.

Manželé zjistili, že úroková sazba takového úvěru je 12 % p. a. a dále si banka účtuje poplatek ve výši 400 Kč za vyhodnocení žádosti o úvěr (poplatek je zaplacen při schválení žádosti) a poplatek 250 Kč ročně za správu úvěrového účtu (placeno na konci roku). Vypůjčenou částku budou manželé splácet právě jeden rok, a to měsíčními splátkami vždy na konci měsíce, přičemž banka vychází z měsíčního úrokového období. Výše měsíční splátky je bankou stanovena na částku 1 599 Kč. Manželé zaplatí za sušičku prádla částku $12 \cdot 1\,599 + 400 + 250 = 19\,838$ Kč. To znamená, že zaplatí navíc 1 838 Kč.

U *splátkového prodeje* zjistili manželé, že tento má většinou vyšší úroky než spotřebitelský úvěr. Místo aby klient zaplatil celou cenu zboží v hotovosti, odevzdá hotově pouze určitou procentní část ceny zboží, tzv. „akontaci“. Zbytek pak splácí v pravidelných splátkách. Splátkový kalendář je většinou měsíční a řídí se nabídkou dané splátkové společnosti. Manželé také velmi ocenili, že jim při tomto nákupu stačí většinou pouze dva doklady totožnosti a sdělení jejich pravidelného měsíčního příjmu. Potvrzení o pravidelném měsíčním příjmu by museli dodat v případě, že hodnota zboží by byla větší než 20 000 Kč. Úvěr je vyřízen během 20 minut. V reklamních akcích a speciálních nabídkách se někdy naskytne možnost získat půjčku i bez úrokového navýšení. To znamená, že např. za plánovanou sušičku by zaplatili jen 10 % akontaci (1 800 Kč) a 9 měsíčních splátek ve výši 1 800 Kč. Nepřeplatili by ani korunu.

Bohužel v době, kdy manželé pořizují sušičku, splátková společnost tuto reklamní akci nemá. Zjistili však, že splátková společnost nabízí tzv. úvěr „1/10“. Tento úvěr spočívá v tom, že se zaplatí v hotovosti 10 % z ceny zboží, další splátky jsou ve výši 10 % z ceny zboží a jejich počet je 10. Při koupi sušičky prádla by se na počátku zaplatilo 1 800 Kč (10 % z 18 000 Kč) a po dobu 10 měsíců by se splácelo každý měsíc 1 800 Kč. Za zboží by nakonec manželé zaplatili celkem 19 800 Kč, to je o 1 800 Kč navíc.

Pokud by se naši manželé rozhodovali na základě výše uvedených výpočtů, mohli by usoudit, že je jedno, zda zvolí splátkový prodej nebo spo-

třebitelský úvěr. V obou případech zaplatí za sušičku přibližně stejně. Při rozhodování by je ovšem mohly ovlivnit tyto skutečnosti:

1. U spotřebitelského úvěru je výše splátky přibližně o 200 Kč nižší než u splátkového prodeje (sice splácení o 2 měsíce déle, ale méně).

2. U splátkového prodeje musí okamžitě zaplatit 1 800 Kč, zatímco u spotřebitelského úvěru zaplatí první splátku až po měsíci.

S přihlédnutím k těmto faktům by jejich volba pravděpodobně padla na spotřebitelský úvěr. Tato volba by byla správná, což potvrzuje i roční procentní sazba nákladů (ve finančnictví vedená pod zkratkou RPSN), kterou mají banky za povinnost uvádět^{*)}. V našem případě je RPSN u spotřebitelského úvěru 22,19 % a u úvěru „1/10“ od splátkové společnosti 26,27 %.

Poznámka. V předchozím textu jsme viděli, že při posuzování výhodnosti úvěru manžele ovlivnila jedna důležitá skutečnost, a tou je faktor času. Říká se, že koruna dnes má větší hodnotu než koruna zítra, protože dnešní koruna může být investována a vydělávat úrok ([2]). Časový průběh půjčky zohledňuje výše zmíněná RPSN (na rozdíl od údajů jako je roční úroková míra či navýšení). Dále tato sazba zohledňuje vedle úrokové sazby i poplatky za schválení a poskytnutí úvěru a poplatky za správu a vedení úvěru. Jedná se o procentní sazbu, která vyjadřuje celkové roční průměrné náklady na daný úvěr. Tento ukazatel musí být zveřejněn ve všech reklamách, ve kterých je otištěna úroková sazba, případně náklady na úvěr. Ukazatel RPSN v reklamách obvykle uváděn bývá, ale většinou „někde v rohu a velmi malým písmem“. Dále si musíme uvědomit, že banky ve svých sazebnících uvádějí sazby minimální. To znamená, že uvedenou úrokovou sazbu je velmi obtížné získat a v praxi bývá zpravidla vyšší. Naopak splátkové společnosti ve většině případech neuvádějí roční úrokovou sazbu a ani poplatky spojené s úvěrem. Uvádí pouze RPSN.

Vzorec pro výpočet RPSN je dosti složitý a bez matematického programu většinou výpočetně neschůdný. Výpočet RPSN můžeme provést za pomoci i tzv. RPSN kalkulačky zveřejněné na webovských stránkách (<http://www.hypoteky-pujcky-uvery.cz/rpsn-kalkulacka.php>).

Kolik stojí spotřebitelský úvěr?

Příklad 2 (koupě obývací stěny)

Mladí manželé si chtějí koupit obývací stěnu. S touto koupí dlouho váhají, neboť nemají k dispozici dostatečně vysoký peněžní obnos. Jejich

^{*)} Tato povinnost se nevztahuje na určité druhy úvěru

cesta do práce vede kolem billboardu, kde je nabízen úvěr s úrokovou sazbou 9,5 % p. a., což se jim zdá velice výhodné. Nepostřehnou ovšem, že u údaje 9,5 % p. a. je malá hvězdička, která odkazuje na RPSN ve výši 15,93 %. Tento odkaz je umístěn v takové části billboardu, že ho naši manželé přehlédnou, a rozhodnou se obývací stěnu v hodnotě 35 000 Kč pořídit. Předpokládají, že si splátky rozloží do 3 let.

Řešení. Uvažujeme-li úrokovou sazbu 9,5 % p. a., pak odpovídající měsíční splátka je 1 121 Kč. Manželé chtějí obývací stěnu splácet 3 roky, tj. 36 měsíců, tudíž by celkem zaplatili $36 \cdot 1\,121 = 40\,356$ Kč. Navýšení činí 5 356 Kč. V bance jsou informováni, že kromě pravidelných splátek ve výši 1 121 Kč budou ještě platit poplatek za schválení úvěru 240 Kč a každý měsíc poplatek za vedení úvěrového účtu, a to 100 Kč. Těmto podmínkám odpovídá RPSN ve výši 15,93 %. Obývací stěna tak přijde na $240 + 36 \cdot 100 + 36 \cdot 1\,121 = 44\,196$ Kč, tzn. navýšení 9 196 Kč.

Shrneme-li fakta, pak záměna úrokové sazby a RPSN vede k tomu, že místo 5 356 Kč, což je asi sedmina z 35 000 Kč, by měli manželé zaplatit navíc 9 196 Kč, tedy přibližně čtvrtinu požadované půjčky. Manželé musí znovu zvažovat, zda jsou tuto cenu za obývací stěnu schopni a ochotni zaplatit.

Jsou mezi úvěry rozdíly?

Příklad 3 (financování opravy střechy)

Společenství vlastníků, jehož jste členem, se rozhodlo pro opravu střechy. Náklady rozpočtené na jeden byt činí 150 000 Kč. Vy touto částkou nedisponujete, tudíž jste nuceni si vzít spotřebitelský úvěr. Rozhodujete se mezi dvěma nabídkami, které zdánlivě vypadají stejně. Oba produkty slibují úrokovou sazbu od 8,9 % p. a., možnost kdykoliv úvěr splatit bez jakýkoliv sankcí, dobu splatnosti od 1 do 6 let a poplatek 0,5 % z půjčené částky za schválení úvěru. Vy jste rozhodnutí pro dobu splatnosti 5 let.

Řešení. Když začnete podrobně zkoumat první produkt, zjistíte, že úroková sazba 8,9 % p. a. je pouze pro klienty, kteří mají běžný účet u dané bankovní instituce a mají vyšší příjem. Vám je nabídnuta úroková sazba 13,5 % p. a., dále máte zaplatit 0,5 % z půjčené částky za schválení úvěru, tj. 750 Kč. Vzápětí se ovšem dozvíte, že minimální výše tohoto poplatku je 900 Kč (placeno při získání úvěru). Dále je Vám účtován poplatek za správu účtu 600 Kč ročně (placeno vždy na konci roku). Nyní se podívejme, na kolik nás tento produkt přijde. Za poplatky zaplatíme

$900 \text{ Kč} + 5 \cdot 600 \text{ Kč} = 3\,900 \text{ Kč}$. Banka určí měsíční splátku ve výši $3\,451 \text{ Kč}$, tudíž za 5 let zaplatíme $60 \cdot 3\,451 \text{ Kč} = 207\,060 \text{ Kč}$. Vaše náklady na střechu budou $210\,960 \text{ Kč}$. RPSN činí $14,37 \%$.

V případě druhého produktu, můžete skutečně mít úrokovou sazbu $8,9 \%$ p. a., protože máte u dané bankovní instituce veden běžný účet a již jste u této instituce měli jeden spotřebitelský úvěr, který jste včas splatili. Roli hraje i to, že úvěr je bezhotovostní (viz vysvětlení u příkladu 1). Jaké jsou další náklady spojené s tímto úvěrem: poplatky za schválení úvěru jsou $0,5 \%$ ze $150\,000 \text{ Kč}$, tj. 750 Kč . Minimální výše je stanovena u této bankovní instituce ve výši 500 Kč . Za vedení účtu zaplatíte každý rok 600 Kč . Dohromady poplatky činí $3\,750 \text{ Kč}$. Vypočítaná měsíční splátka je $3\,106 \text{ Kč}$, což za 5 let obnáší $60 \cdot 3\,106 \text{ Kč} = 186\,360 \text{ Kč}$. Dohromady zaplatíte $190\,110 \text{ Kč}$. RPSN činí $9,76 \%$.

Vidíme, že i když nabídky vypadaly zdánlivě stejně, ve druhém případě zaplatíme přibližně o $17\,000 \text{ Kč}$ méně. Výhodnost druhé nabídky potvrzuje i RPSN. Hlavní roli zde sehrála okolnost, že jsme již byli klientem dané bankovní instituce. V tomto příkladě jsme ale mohli rozhodnout bez uvedení RPSN, to znamená na základě výše částky, kterou jsme zaplatili navíc. Důvodem je časová shoda všech plateb souvisejících s úvěrem.

Poznamenejme ještě, že v případě zainvestování střechy, bychom mohli zvolit další produkt bankovníctví, a to je stavební spoření. Tento produkt by byl nejvýhodnější, neboť úrokové sazby u úvěrů stavebního spoření se pohybují od 4% p. a. do 5% p. a.. Pokud se společenství vlastníků chová hospodárně, má dozajista vypracován plán akcí týkajících se úprav společných prostorů minimálně 3 roky dopředu. Tudíž každý člen má dostatek času na získání požadovaných finančních prostředků.

Závěr

Z příkladů, které byly uvedeny v tomto článku, vidíme, že při řešení úloh ze života nevystačíme s dosazováním do vzorců. Použitá matematika není složitá (vzorec pro výpočet výše splátky, základní aritmetické operace a znalost práce s procenty), problém bude ale studentům (i všem, kteří si potřebují půjčit) dělat orientace ve světě financí. Ta je spojena se znalostí mnoha pojmů, jejichž významy mnohdy jen nejasně tušíme. Jak již bylo řečeno v úvodu, to je zřejmě jeden z důvodů implementování finančních standardů do rámcových vzdělávacích programů (RVP), popř. školních vzdělávacích programů. Vzhledem k tomu, že v RVP je prosazován projektový způsob výuky, může být článek návodem pro učitele, jak

zadat studentům projekt, ve kterém by využili přirozené tendence každého člověka orientovat se na řešení úkolů s reálným smyslem, přirozené zvědavosti, zájmu o práci s internetem. Řešení takového projektu ovšem předpokládá dostatek času nejen na vyhledání potřebných informací a výpočty, ale také na zvažování různých možností, na diskusi s ostatními, argumentování a naslouchání argumentům. To by ovšem k pěstování finanční gramotnosti mělo patřit, ostatně k naplňování RVP neméně.

L i t e r a t u r a

- [1] *Odvárko, O.*: Úlohy z finanční matematiky pro střední školy. Prometheus, Praha 2005.
- [2] *Kolář, P.*: Manažerské finance. Ministerstvo financí ČR, 1997.
- [3] *Radová, J. – Dvořák, P.*: Finanční matematika pro každého. Grada Publishing, 1997.
- [4] www.oecd.org : Informace o šetření PISA.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení zašlete nejpozději do 10. 1. 2010 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. 17. listopadu 12, 772 00 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 163

Nechť D je pata výšky k přeponě AB pravouhlého trojúhelníku ABC . Označme I_1 střed kružnice vepsané trojúhelníku BCD a T_1 její bod dotyku se stranou BC . Dále označme I_2 střed kružnice vepsané trojúhelníku CAD a T_2 její bod dotyku se stranou AC . Dokažte, že se přímky T_1I_1 a T_2I_2 protínají na přeponě AB .

Gottfried Perz (Graz)

Úloha 164

Najděte všechna reálná čísla x , pro která platí

$$(\sin^3 x + \cos^3 x)(\sin^5 x + \cos^5 x) = 2(\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x).$$

Ján Mazák (Košice)