

MATEMATIKA

Pellova rovnice pro úlohu o součtu jedenácti čtverců

JAROMÍR ŠIMŠA

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

V soutěžní rubrice *Zajímavé matematické úlohy* byla uveřejněna v 7. čísle uplynulého (18.) ročníku časopisu MFI následující úloha (č. 158) autora Aleše Kobzy:

Úloha

Označme K množinu všech přirozených čísel k , pro něž lze číslo k^2 zapsat jako součet druhých mocnin jedenácti po sobě jdoucích celých čísel.

- Dokažte, že každé číslo z K dává při dělení číslem 66 zbytek 11 nebo 55.
- Najděte (s využitím kalkulačky) všechna čísla z K , která jsou menší než 2 009.

Elementární řešení této úlohy najdete na str. 82 tohoto čísla. V tomto článku nejen ukážeme, že zkoumaná množina

$$K = \{11, 77, 143, 1\,529, 2\,849, 30\,503, 56\,837, 608\,531, \dots\} \quad (1)$$

je nekonečná, ale odvodíme rovněž rekurentní vzorce, podle kterých lze všechna čísla patřící do množiny K postupně počítat, a to v pořadí podle jejich velikosti, ve kterém je uvedeno i prvních osm prvků K v (1). Na základě zmíněných vzorců pak dospějeme k zajímavému upřesnění výsledku původní Kobzovy úlohy: *Všechna čísla z K dávají při dělení číslem 66 zbytek 11.*¹⁾

¹⁾ Neznáme jinou metodu jak vyloučit možnost, že některé číslo z K při dělení číslem 66 dává zbytek 55. Kdyby některý z čtenářů takový jednodušší postup objevil, redakce MFI ho ráda zveřejní.

Budeme tedy hledat všechna přirozená čísla k , pro něž existuje 11 po sobě jdoucích celých čísel, která výhodně označíme

$$n-5, n-4, \dots, n-1, n, n+1, \dots, n+4, n+5$$

(číslo n je tedy prostřední z nich) a která vyhovují vztahu

$$k^2 = (n-5)^2 + (n-4)^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + \dots + (n+5)^2.$$

Díky takovému označení dostaneme po úpravě poměrně jednoduchý vztah

$$k^2 - 11n^2 = 110. \quad (2)$$

Naším cílem je rovnici (2) s dvěma celočíselnými neznámými k a n vyřešit, tedy určit všechny vyhovující dvojice (k, n) . Je všeobecně známo, že algebraickým rovnicím řešeným v oboru celých čísel říkáme *diofantovské*. Rovnice (2) patří k těm z nich, kterým se matematikové věnovali v celé historii nejvíce. Patří dokonce do skupiny rovnic, které mají své vlastní jméno. Podle anglického matematika *Johna Pella* (1611–1685) nazýváme *Pellovou* každou rovnici typu

$$x^2 - dy^2 = m, \quad (3)$$

v níž $d > 0$ a $m \neq 0$ jsou daná celá čísla, zatímco dvojice celých čísel x a y jsou neznámé, které hledáme. Čtenářům, kteří se chtějí s teorií Pellových rovnic teprve seznámit, je určen právě náš článek. Při řešení jedné Pellovy rovnice (2) totiž poznáme všechny podstatné rysy teorie rovnic (3) v konkrétní podobě. Teoretické poučení o Pellových rovnicích lze nalézt v celé knize [1], jejich souvislosti s řetězovými zlomky na str. 142–152 brožury [3]. Základní i podrobnější informace jsou dostupné též na Internetu (heslo *Pell's equation*).

Často se Pellovými rovnicemi míní pouze rovnice (3) s parametrem $m = 1$. Řešení takových speciálních rovnic se uplatňují i při výpočtech řešení rovnic (3) s parametrem $m \neq 1$, jak to ostatně uvidíme u naší rovnice (2), ve které $m = 110$. Historii i teorii rovnic (3) s parametrem $m = 1$ je věnován nedávný článek [2] tohoto časopisu.²⁾

²⁾ Uveďme zde pouze základní výsledek, který poprvé dokázal *J. L. Lagrange* v roce 1766: Není-li přirozené d druhou celého čísla, má rovnice $x^2 - dy^2 = 1$ v oboru $\mathbb{N}$ nekonečně mnoho řešení. Nejmenší z nich lze sestavit pomocí řetězového zlomku pro iracionální číslo $\sqrt{d}$.

Pusťme se tedy do řešení rovnice (2) v oboru $\mathbb{Z}$ všech celých čísel. Protože na znaménkách čísel k, n podle tvaru rovnice (2) nezáleží, můžeme tuto rovnici řešit pouze v oboru $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.³⁾ Tam jsou nejmenšími řešeními dvojice (k, n) tvaru $(11, 1)$, $(77, 23)$, $(143, 43)$, $(1\,529, 461)$ atd., jak se můžeme přesvědčit numerickým experimentováním.⁴⁾ Jen stěží však přitom uhadneme zákonitost, s jakou jsou tyto dvojice sestaveny. Tu objevíme až při „teoretickém“ zkoumání rovnice (2), jehož prvním rozhodujícím (a pro nezasvěcené velmi překvapivým) krokem je rozložení rovnice do součinnového tvaru s iracionálními činiteli:

$$(k + n\sqrt{11})(k - n\sqrt{11}) = 110. \quad (4)$$

Budeme tedy pracovat s rozklady na činitele tvaru $a + b\sqrt{11}$ s celočíselnými koeficienty a, b . Pro lepší přehlednost nejprve uvedeme pravidla, která při výpočtech s takovými čísly budeme potřebovat: součin dvou čísel tvaru $a + b\sqrt{11}$ je opět číslo téhož tvaru a pro libovolná celá čísla a, b, c, d, e, f a každé přirozené číslo i platí

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{11} = c + d\sqrt{11} &\Rightarrow (a = c) \wedge (b = d), \\ (a + b\sqrt{11})(c + d\sqrt{11}) &= e + f\sqrt{11} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a - b\sqrt{11})(c - d\sqrt{11}) = e - f\sqrt{11}, \\ (a + b\sqrt{11})^i &= c + d\sqrt{11} \Rightarrow (a - b\sqrt{11})^i = c - d\sqrt{11}. \end{aligned}$$

První implikace plyne z iracionality čísla $\sqrt{11}$, druhá implikace se už pak snadno ověří roznásobením, konečně třetí implikace plyne z druhé užitím principu matematické indukce.

Při konstrukci vyhovujících rozkladů (4) sehraje významnou roli dvojice čísel $10 \pm 3\sqrt{11}$, které odpovídají řešení $(10, 3)$ rovnice $x^2 - 11y^2 = 1$:

$$(10 + 3\sqrt{11})(10 - 3\sqrt{11}) = 10^2 - 11 \cdot 3^2 = 100 - 99 = 1$$

Jinak vyjádřeno, platí $(10 + 3\sqrt{11})^{-1} = 10 - 3\sqrt{11}$, takže k našim číslům tvaru $a + b\sqrt{11}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) patří mocniny $(10 \pm 3\sqrt{11})^i$ nejen s celým

³⁾ Přesto budeme dále uvažovat i řešení v oboru $\mathbb{Z}$, protože to zjednoduší prováděné důkazy.

⁴⁾ Pro řešení (k, n) rovnice (2) v oboru $\mathbb{N}$ zřejmě platí: čím je větší k , tím je větší n (a naopak). Proto všechna řešení z tohoto oboru můžeme uspořádat podle velikosti.

kladným, ale i celým záporným exponentem i . Navíc pro každé takové i platí

$$(10 + 3\sqrt{11})^i (10 - 3\sqrt{11})^i = 1^i = 1. \quad (5)$$

Takové *rozklady jednotky* umožňují z jednoho řešení rovnice (2) sestavit nekonečně mnoho dalších řešení způsobem, popsaným v následujícím pomocném tvrzení.

Lemma

Je-li (k_0, n_0) libovolné řešení rovnice (2) v oboru $\mathbb{Z}$, pak pro každé $i \in \mathbb{Z}$ je rovněž řešením rovnice (2) dvojice celých čísel (k_i, n_i) určená předpisem

$$k_i + n_i\sqrt{11} = (k_0 + n_0\sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11})^i. \quad (6)$$

Na *důkaz* lemmatu jsme dobře připraveni: platí-li (6), platí rovněž

$$k_i - n_i\sqrt{11} = (k_0 - n_0\sqrt{11}) \cdot (10 - 3\sqrt{11})^i.$$

Vynásobíme-li obě tyto rovnosti a využijeme-li pak předpokladu, že dvojice (k_0, n_0) splňuje rovnost $k_0^2 - 11n_0^2 = 110$, dostaneme s přihlédnutím k (5)

$$k_i^2 - 11n_i^2 = (k_0^2 - 11n_0^2) \cdot 1^i = 110,$$

takže dvojice (k_i, n_i) je vskutku řešením rovnice (2) a důkaz je hotov.

Podívejme se, jaké výsledky dokázané lemma přináší. Z řešení $(k_0, n_0) = (11, 1)$ rovnice (2) dostaneme nekonečně mnoho dalších řešení určených podle (6) vztahy $k_i + n_i\sqrt{11} = (11 + \sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11})^i$, například $(k_1, n_1) = (143, 43)$, $(k_{-1}, n_{-1}) = (77, -23)$, $(k_2, n_2) = (2\,849, 859)$, $(k_{-2}, n_{-2}) = (1\,529, -461)$ atd.

Podobně z řešení $(k_0, n_0) = (77, 23)$ dostaneme další řešení $k_i + n_i\sqrt{11} = (77 + 23\sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11})^i$, tedy $(k_1, n_1) = (1\,529, 461)$, $(k_{-1}, n_{-1}) = (11, -1)$, $(k_2, n_2) = (30\,503, 9\,197)$, $(k_{-2}, n_{-2}) = (143, -43)$ atd. Podle numerických experimentů, které jsme dříve zmiňovali, se zdá, že v uvedených dvou nekonečných posloupnostech nechybí žádné řešení (k, n) rovnice (2) s kladnou složkou k . To potvrzuje následující hlavní výsledek.

Věta

Řešení rovnice (2) v oboru $\mathbb{N}$ jsou právě ty dvojice (k, n) , pro něž je číslo $k + n\sqrt{11}$ tvaru

$$(11 + \sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11})^i \quad \text{nebo} \quad (77 + 23\sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11})^i \quad (7)$$

pro některé celé $i \geq 0$.

Úvodem *důkazu* poznamenejme, že každá dvojice (k, n) , které odpovídá číslo $k + n\sqrt{11}$ jednoho z tvarů (7), je skutečně řešením rovnice (2) podle dříve dokázaného lemmatu. Až do konce důkazu proto budeme předpokládat, že pevná dvojice (k, n) je libovolným řešením rovnice (2) v oboru $\mathbb{N}$ a že pro odpovídající číslo $k + n\sqrt{11}$ platí

$$k + n\sqrt{11} \notin \{(11 + \sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11})^i\}_{i=0}^{\infty}. \quad (8)$$

Naším cílem bude ukázat, že v popsané situaci platí

$$k + n\sqrt{11} \in \{(77 + 23\sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11})^i\}_{i=0}^{\infty}, \quad (9)$$

Protože (11, 1), (77, 23) a (143, 43) jsou podle numerických výpočtů tři nejmenší řešení rovnice (2) v oboru $\mathbb{N}$ a mají vlastnost uvedenou v dokazované větě, můžeme o zkoumaném řešení (k, n) předpokládat, že je tvořeno čísly $k > 143$ a $n > 43$. Znamená to, že platí nerovnost

$$(11 + \sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11}) < k + n\sqrt{11},$$

kteřá spolu s podmínkou (8) zaručuje existenci indexu $j \in \mathbb{N}$ s vlastností

$$(11 + \sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11})^j < k + n\sqrt{11} < (11 + \sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11})^{j+1},$$

neboť geometrická posloupnost v (8) má kvocient $10 + 3\sqrt{11}$ větší než 1. Pak dvojice celých čísel $(\tilde{k}, \tilde{n})$ určená rovností

$$\tilde{k} + \tilde{n}\sqrt{11} = (k + n\sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11})^{-j} \quad (10)$$

je podle uvedeného lemmatu řešením rovnice (2) v oboru $\mathbb{Z}$, přitom z nerovností určujících index j po dělení číslem $(10 + 3\sqrt{11})^j$ vyplývají odhady

$$11 + \sqrt{11} < \tilde{k} + \tilde{n}\sqrt{11} < 143 + 43\sqrt{11}. \quad (11)$$

Ukažme, že obě celá čísla $\tilde{k}$, $\tilde{n}$ jsou *kladná*. Podle levé nerovnosti z (11) je především kladné číslo $\tilde{k} + \tilde{n}\sqrt{11}$ a rovnost součinů

$$(11 + \sqrt{11})(11 - \sqrt{11}) = 110 = (\tilde{k} + \tilde{n}\sqrt{11})(\tilde{k} - \tilde{n}\sqrt{11})$$

znamená, že naopak platí $11 - \sqrt{11} > \tilde{k} - \tilde{n}\sqrt{11} > 0$, a tudíž

$$2\tilde{n}\sqrt{11} = (\tilde{k} + \tilde{n}\sqrt{11}) - (\tilde{k} - \tilde{n}\sqrt{11}) > (11 + \sqrt{11}) - (11 - \sqrt{11}) = 2\sqrt{11},$$

odkud plyne $\tilde{n} > 0$ a s ohledem na $\tilde{k} - \tilde{n}\sqrt{11} > 0$ rovněž $\tilde{k} > 0$.

Zjistili jsme, že $(\tilde{k}, \tilde{n})$ je řešení rovnice (2) v oboru $\mathbb{N}$, přičemž podle (11) platí $11 < \tilde{k} < 143$. (O zřejmém porovnávání velikostí řešení z oboru $\mathbb{N}$ jsme se dříve zmínili v poznámce 4 pod čarou). Jak víme, takové řešení je jediné, totiž $(\tilde{k}, \tilde{n}) = (77, 23)$. Po dosazení do rovnosti (10) a jejím následném vynásobením číslem $(10 + 3\sqrt{11})^j$ dostaneme

$$k + n\sqrt{11} = (77 + 23\sqrt{11})(10 + 3\sqrt{11})^j,$$

takže potřebný vztah (9) platí a důkaz věty je hotov.

Podle dokázaného výsledku jsou všechna řešení rovnice (2) v oboru $\mathbb{N}$ tvořena členy (k_i, n_i) dvou posloupností určených vztahy

$$k_i + n_i\sqrt{11} = (k_0 + n_0\sqrt{11}) \cdot (10 + 3\sqrt{11})^i,$$

přitom u první posloupnosti je $(k_0, n_0) = (11, 1)$, u druhé posloupnosti pak $(k_0, n_0) = (77, 23)$. Členy obou posloupností můžeme počítat postupně podle stejných rekurentních vzorců, které dostaneme z rovnosti

$$k_{i+1} + n_{i+1}\sqrt{11} = (10 + 3\sqrt{11}) \cdot (k_i + n_i\sqrt{11})$$

po roznásobení pravé strany:

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= 10k_i + 33n_i, \\ n_{i+1} &= 3k_i + 10n_i. \end{aligned} \tag{12}$$

Tyto vzorce umožňují zjišťovat nejrůznější teoreticko-číselné vlastnosti dvojic (k_i, n_i) , například zbytky čísel k_i, n_i při dělení jakýmkoliv zvoleným

číslem. Tak při dělení číslem 66 zbytky čísel ve dvojicích (k_i, n_i) u první posloupnosti tvoří postupně dvojice $(11, 1)$, $(11, 43)$, $(11, 1)$, $(11, 43)$ atd. (opakují se tedy s periodou 2), u druhé posloupnosti jsou dvojice těchto zbytků modulo 66 postupně $(11, 23)$, $(11, 65)$, $(11, 23)$, $(11, 65)$ atd. (opět stejná perioda 2). Vidíme, že všechna čísla k_i dávají u obou posloupností stejný zbytek 11 modulo 66, jak jsme slíbili dokázat v úvodní části článku.

Na závěr dodejme, že pokud bychom chtěli rekurentně počítat pouze první složky k_i všech řešení (k_i, n_i) rovnice (2), tedy prvky množiny K zkoumané v původní úloze, mohli bychom od soustavy rekurentních rovnic (12) přejít k jedné rovnici

$$k_{i+2} + k_i = 20k_{i+1} \quad (13)$$

(odvoďte ji ze soustavy (12) sami) a počítat postupně všechny prvky K jako členy „oboustranně“ nekonečné posloupnosti $\{k_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ určené dvěma sousedními členy $k_0 = 11$, $k_{-1} = 77$ a rovnicí (13), podle které pak vychází $k_1 = 143$, $k_{-2} = 1\,529$, $k_2 = 2\,849$, $k_{-3} = 30\,503$ atd.

L i t e r a t u r a

- [1] *Barbeau, E. J.*: Pell's Equation. Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York 2003.
- [2] *Seibert, J.*: Několik poznámek k Pellově rovnici. MFI, roč. 13 (2003/04), č. 10, s. 583–590.
- [3] *Vít, P.*: Řetězové zlomky. Škola mladých matematiků, sv. 49, Mladá fronta, Praha 1982.

O jedné úloze z oblasti rekreační matematiky

JAROSLAV ŠVRČEK – JOZEF CMAR

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Jistě jste již někdy setkali s úlohou, kdy pomocí daných čísel a povolených matematických operací máme vytvořit číselný výraz vyjadřující hodnotu některého přirozeného čísla. S úlohami podobného typu se můžeme často setkat především v oblasti tzv. rekreační matematiky. Určitou modifikací úlohy uvedeného typu je hledání speciálních číselných rovností, v nichž jsou použity (za daných podmínek) buď všechna, nebo jen některá čísla z dané číselné množiny.

Dále se omezíme na množinu $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Prvky této množiny jsou tedy všechny číslice desítkové soustavy. Cílem tohoto článku bude dokázat následující zajímavé tvrzení:

Věta

Vybereme-li libovolnou šestici čísel z množiny $M = \{0, 1, \dots, 9\}$, v níž se čísla mohou opakovat, můžeme pomocí základních matematických operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení) sestavit aspoň jednu rovnost (identitu), v níž je použito všech šest zvolených čísel z množiny M , každé právě jednou. Výrazy na obou stranách rovnosti lze přitom libovolně uzavřít.

Dříve než přistoupíme k důkazu uvedeného tvrzení, uveďme na ukázkou dvě takové rovnosti:

Pro šestici $\{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$ je takovou rovností např.

$$1 \cdot (7 - 4) = 9 - 8 + 2.$$

Pro šestici $\{2, 2, 3, 3, 7, 9\}$ můžeme vytvořit např. následující rovnost

$$9 \cdot (2 - 2) = 7 \cdot (3 - 3).$$

Celkový počet všech takových šestic čísel z množiny M je poměrně velký. Z pohledu kombinatoriky se jedná o stanovení počtu všech šestiprvkových kombinací s opakováním z dané desetiprvkové množiny M . Těch je, jak známo,

$$\binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6} = 10\,010.$$

Při důkazu uvedené věty využijeme kombinaci tzv. *exhaustivní metody* a *úplné indukce*. Množinu všech 10 010 takových šestic čísel přitom vhodně rozdělíme do několika tříd a důkaz tvrzení provedeme pro jejich reprezentanty.¹⁾

Důkaz věty. S ohledem na povolená opakování čísel z množiny M rozlišíme pro uvažované šestice čísel následujících 11 (základních) případů:

- (i) šestice je tvořena jediným číslem z množiny M , které se v ní opakuje šestkrát, např. $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$,
- (ii) šestice je tvořena dvěma různými čísly z množiny M , z nichž jedno číslo se opakuje pětkrát a druhé číslo je použito právě jednou, např. $\{1, 1, 1, 1, 1, 2\}$,
- (iii) šestice je tvořena dvěma různými čísly z množiny M , z nichž jedno číslo se opakuje čtyřikrát a druhé číslo se opakuje dvakrát, např. $\{1, 1, 1, 1, 2, 2\}$,
- (iv) šestice je tvořena třemi navzájem různými čísly z množiny M , z nichž jedno číslo se opakuje čtyřikrát a zbylá dvě čísla jsou použita každé právě jednou, např. $\{1, 1, 1, 1, 2, 3\}$,
- (v) šestice je vytvořena dvěma různými čísly z množiny M , přičemž obě čísla se vyskytují právě třikrát, např. $\{1, 1, 1, 2, 2, 2\}$,
- (vi) šestice je tvořena třemi navzájem různými čísly z množiny M , z nichž jedno číslo se opakuje třikrát, druhé číslo se opakuje dvakrát a třetí číslo je použito právě jednou, např. $\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$,
- (vii) šestice je tvořena čtyřmi navzájem různými čísly z množiny M , z nichž jedno číslo se opakuje třikrát a zbylá tři čísla jsou použita každé právě jednou, např. $\{1, 1, 1, 2, 3, 4\}$,
- (viii) šestice je tvořena třemi navzájem různými čísly z množiny M , přičemž každé z nich se vyskytuje právě dvakrát, např. $\{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$,

¹⁾ Podobným způsobem postupujeme také např. při některých důkazech o dělitelnosti, kdy uvažujeme zbytkové třídy, nebo při důkazu kosinové věty, kdy odděleně uvažujeme ostroúhlé, pravoúhlé a tupoúhlé trojúhelníky.

- (ix) šestice je tvořena čtyřmi navzájem různými čísly z množiny M , přičemž dvě z nich se opakují každé dvakrát, zbylá dvě čísla jsou použita každé právě jednou, např. $\{1, 1, 2, 2, 3, 4\}$,
- (x) šestice je tvořena pěti navzájem různými čísly z množiny M , z nichž jedno se opakuje dvakrát a zbylá čtyři čísla jsou použita každé právě jednou, např. $\{1, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
- (xi) šestice je tvořena šesti navzájem různými čísly z množiny M , kde každé číslo je použito právě jednou, např. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A) V případech (i), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (viii) a (ix) lze tvrzení dokázat triviálně. Každá šestice čísel z množiny M obsahuje vždy aspoň dvě dvojice stejných čísel (nebo aspoň čtyři stejná čísla). Snadno tak vytvoříme rovnost, v níž jsou obě její strany rovny 0 (a to vždy jako rozdíl stejných čísel v obou dvojicích). Zbývající dvě čísla použijeme tak, aby zůstala zachována rovnost obou stran. To lze zajistit (univerzálně) např. následujícím způsobem.

Pro šestici $\{1, 1, 2, 2, 3, 4\}$ typu (ix) má taková rovnost např. následující tvar:

$$1 - 1 = (2 - 2) \cdot 3 \cdot 4$$

Zbývá tedy ověřit pouze případy (vii), (x) a (xi).

B) Případy (vii) a (x) můžeme zkoumat společně. V každé uvažované šestici (v obou případech) jsou aspoň čtyři navzájem různá čísla a současně aspoň dvě stejná čísla. Nejprve ukážeme, že z každé čtveřice $\{a, b, c, d\}$ navzájem různých čísel z množiny M lze aplikací základních matematických operací obdržet výsledek 0 nebo 1. Skutečnost, že pomocí čtyř čísel a, b, c, d lze získat (za daných podmínek) hodnotu 0, resp. hodnotu 1, budeme dále značit symbolem $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$, resp. $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$.

Nejprve dokážeme, že pro každou čtveřici navzájem různých čísel z množiny M platí buď $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$, nebo $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$. Pokud $0 \in \{a, b, c, d\}$, je důkaz triviální. Součin $a \cdot b \cdot c \cdot d$ na jedné straně rovnosti je tak roven 0 a rozdíl dvou stejných čísel na druhé straně rovnosti dává rovněž 0. Předpokládejme, že číslo 0 se v dané čtveřici nevyskytuje. Dále rozlišíme 5 případů.

1. Nechť $2 \in \{a, b, c, d\}$. Dále rozlišíme následující čtyři případy (podle počtu sudých čísel mezi třemi zbylými čísly čtveřice $\{a, b, c, d\}$).

- a) Všechna tři zbylá čísla jsou sudá, tj. $\{a, b, c, d\} = \{2, 4, 6, 8\}$. Pak ale platí $8 - 6 - 2 = 0$, resp. $4 \cdot (8 - 6 - 2) = 0$.

- b) Kromě čísla 2 jsou v této čtveřici ještě dvě sudá čísla. Zbývajících, liché číslo označíme ℓ . V tomto případě můžeme také vytvořit číselný výraz, jehož hodnota je rovna 0. Pro možné dvojice $\{4, 6\}$, $\{4, 8\}$ a $\{6, 8\}$ sudých čísel a liché číslo ℓ mají takové číselné výrazy po řadě tvar $\ell \cdot (6 - 4 - 2) = 0$, $\ell \cdot (8 - 2 \cdot 4) = 0$ a $\ell \cdot (8 - 6 - 2) = 0$.
- c) Kromě čísla 2 je ve čtveřici $\{a, b, c, d\}$ právě jedno sudé číslo.

Pokud $4 \in \{a, b, c, d\}$, je $6 = 2 + 4$ a $8 = 2 \cdot 4$.

Pokud $6 \in \{a, b, c, d\}$, je $4 = 6 - 2$ a $8 = 6 + 2$.

Pokud $8 \in \{a, b, c, d\}$, je $4 = 8/2$ a $6 = 8 - 2$.

Kromě daných dvou sudých čísel se ve čtveřici $\{a, b, c, d\}$ vyskytují ale také dvě různá lichá čísla z množiny M . Jejich rozdíl je však vždy roven některému číslu z množiny $\{2, 4, 6, 8\}$. Od kterékoliv hodnoty z této množiny můžeme stejnou hodnotu vytvořenou pomocí dvojice sudých čísel odečíst. Obdržíme tak výsledek rovný 0 a dále lze postupovat podobně jako v A).

- d) Kromě čísla 2 jsou všechna čísla lichá. Uvažujeme tedy dále trojici různých lichých čísel z množiny $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Snadno se vidí, že jen v trojici $\{1, 5, 9\}$ není rozdíl některých dvou z těchto tří lichých čísel roven 2. V tomto případě ale platí $2 \cdot 5 - 9 - 1 = 0$. Ve zbývajících případech lze využít výsledku části A).

Z výše uvedené analýzy plyne, že je-li číslo 2 prvkem čtveřice různých čísel $\{a, b, c, d\}$, pak pro tuto čtveřici platí $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$ nebo $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$.

2. Podobným způsobem nyní dokážeme, že pokud $4 \in \{a, b, c, d\}$ a současně číslo 2 není prvkem této čtveřice, pak platí $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$ nebo $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$. Rozlišíme následující případy:

- a) Kromě čísla 4 jsou ve čtveřici dvě sudá čísla $\{6, 8\}$ a jedno číslo liché. Pro všech pět možných případů volby lichého čísla z M lze pouze pomocí součtů a rozdílů nalézt číselné výrazy, jejichž hodnota je 1. Platí totiž

$$6 + 4 - 8 - 1 = 1,$$

$$8 + 3 - 6 - 4 = 1,$$

$$8 + 4 - 6 - 5 = 1,$$

$$7 + 6 - 8 - 4 = 1,$$

$$8 + 6 - 9 - 4 = 1.$$

Tím je dokázáno, že pro uvažované čtveřice čísel z množiny M platí $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$.

- b) Kromě čísla 4 je v uvažované čtveřici jedno číslo sudé a dvě čísla lichá.

Pokud také $6 \in \{a, b, c, d\}$, pak každá dvojice lichých čísel, jejichž rozdíl nebo součet je 2, 4 nebo 6, splňuje spolu s čísly 4 a 6 podmínku $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$. Zbývá tak tedy prověřit pouze dvojici lichých čísel $\{1, 9\}$. Žádnou povolenou aritmetickou operací totiž nedostaneme z těchto čísel některé z čísel 2, 4, nebo 6. Uvažujme proto pouze čtveřici $\{1, 4, 6, 9\}$. Protože $9 - 6 - 4 + 1 = 0$, je $\langle 1, 4, 6, 9; 0 \rangle$. Podobně, pokud dalším sudým číslem (kromě čísla 4) v uvažované čtveřici $\{a, b, c, d\}$ je 8, pak každá dvojice lichých čísel, jejichž rozdíl nebo součet je některé z čísel z množiny $\{2, 4, 8\}$, splňuje spolu s čísly 4 a 8 podmínku $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$. Zbývá tak prozkoumat pouze dvojici lichých čísel $\{3, 9\}$, tj. případ, kdy rozdíl dvou lichých čísel je roven hodnotě 6. Pak ale platí $\langle 3, 4, 8, 9; 0 \rangle$, neboť $3 + 9 - 4 - 8 = 0$.

- c) Kromě čísla 4 jsou v uvažované čtveřici pouze lichá čísla. Zde stačí (z analogických důvodů) prozkoumat pouze trojici $\{1, 7, 9\}$ lichých čísel. Pak ale platí $\langle 1, 4, 7, 9; 1 \rangle$, neboť $4 + 7 - 1 - 9 = 1$.

Dokázali jsme tak, že v tomto (2.) případě vždy platí buď $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$, nebo $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$.

3. Nyní dokážeme, že pokud $6 \in \{a, b, c, d\}$ a současně čísla 2 a 4 nejsou prvky této čtveřice, pak platí $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$ nebo $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$, kde stačí uvažovat dva případy.

- a) Kromě čísla 6 je prvkem uvažované čtveřice rovněž číslo 8 (a $2 = 8 - 6$); zbývající dvě čísla jsou lichá. Zde stačí prozkoumat pouze dvě dvojice lichých čísel z množiny M , a to $\{3, 7\}$ a $\{5, 9\}$. Pro příslušné čtveřice $\{3, 6, 7, 8\}$ a $\{5, 6, 8, 9\}$ platí $\langle 3, 6, 7, 8; 1 \rangle$ a $\langle 5, 6, 8, 9; 0 \rangle$, neboť platí rovnosti $3 - (6 + 8) / 7 = 1$ a $9 - 8 - 6 + 5 = 0$.
- b) Kromě čísla 6 jsou v uvažované čtveřici tři lichá čísla z množiny M . V každé takové trojici (s výjimkou $\{3, 5, 7\}$, $\{5, 7, 9\}$) je součet nebo rozdíl některých dvou čísel roven 6. Pro čtveřice $\{3, 5, 6, 7\}$ a $\{5, 6, 7, 9\}$ přitom platí $\langle 3, 5, 6, 7; 1 \rangle$ a $\langle 5, 6, 7, 9; 1 \rangle$, neboť $5 + 6 - 3 - 7 = 1$ a $5 + 9 - 6 - 7 = 1$.

Dokázali jsme tak, že i v tomto případě vždy platí buď $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$, nebo $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$.

4. Pokud $8 \in \{a, b, c, d\}$ a současně žádné z čísel 2, 4, 6 není prvkem této čtveřice, stačí uvažovat pouze ty trojice lichých čísel neobsahující žádná dvě lichá čísla, jejichž součet nebo rozdíl je roven 8. Tuto podmínku splňují jen trojice $\{3, 7, 9\}$ a $\{5, 7, 9\}$ lichých čísel z množiny M . Vzhledem k tomu, že $3 - (7 + 9)/8 = 1$ a $8 + 7 - 9 - 5 = 1$, platí $\langle 3, 7, 8, 9; 1 \rangle$ a $\langle 5, 7, 8, 9; 1 \rangle$.

I v tomto případě tedy platí buď $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$, nebo $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$.

5. Zbývá prozkoumat případ, kdy uvažovaná čtveřice $\{a, b, c, d\}$ je tvořena výhradně lichými čísly z množiny M . Těchto čtveřic je 5; jsou jimi čtveřice $\{1, 3, 5, 7\}$, $\{1, 3, 5, 9\}$, $\{1, 3, 7, 9\}$, $\{1, 5, 7, 9\}$ a $\{3, 5, 7, 9\}$. Pro všechny tyto čtveřice však existují číselné výrazy sestavené z těchto čtyř čísel, jejichž hodnota je 0 nebo 1. Tím dokážeme, že také pro čtveřice složené výhradně z lichých čísel platí buď $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$, nebo $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$. Pro jednotlivé čtveřice mohou mít odpovídající číselné výrazy např. následující tvary

$$7 - 5 - 3 + 1 = 0,$$

$$9 - 5 - 3 - 1 = 0,$$

$$9 - 7 - 3 + 1 = 0,$$

$$(5 + 9)/7 - 1 = 1,$$

$$9 - 7 - 5 + 3 = 0.$$

Spojením výsledků z 1. – 5. části odstavce B) jsme tak dokázali, že pro každou čtveřici různých čísel $\{a, b, c, d\}$ z množiny M platí buď $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$, nebo $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$.

Pokud je $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$, má hledaná rovnost např. tvar:

$$e - e = \langle a, b, c, d; 0 \rangle$$

kde e je číslo, které se v uvažované šestici (aspoň dvakrát) opakuje.

Pokud platí $\langle a, b, c, d; 1 \rangle$, může mít hledaná rovnost např. tvar:

$$e/e = \langle a, b, c, d; 1 \rangle$$

kde e je číslo, které se v uvažované šestici (aspoň dvakrát) opakuje.

Uvedené tvrzení tedy platí i v případech (vii) a (x).

C) V tomto odstavci se zaměříme na poslední případ, tj. (xi), kdy šestice je tvořena šesti navzájem různými čísly z množiny M . Zde rozlišíme dvě možnosti.

1. Nejprve zkoumejme případ, kdy číslo 0 je prvkem uvažované šestice čísel. Stačí zde ukázat, že pro libovolných pět nenulových čísel a, b, c, d, e z množiny M platí $\langle a, b, c, d, e; 0 \rangle$, kde označení $\langle a, b, c, d, e; 0 \rangle$ má analogický význam jako symbol $\langle a, b, c, d; 0 \rangle$ zavedený v odstavci B).

a) Nejprve předpokládejme, že $2 \in \{a, b, c, d, e\}$. Zde rozlišíme tři možnosti:

Pokud kromě čísla 2 jsou prvky uvažované pětičky ještě aspoň dvě jiná sudá čísla, lze povoleným způsobem snadno vždy z těchto tří sudých čísel vytvořit číselný výraz, jehož hodnota je 0, tudíž platí $\langle a, b, c, d, e; 0 \rangle$.

Pokud kromě čísla 2 je prvkem uvažované pětičky ještě jiné sudé číslo, lze povoleným způsobem opět vytvořit číselné výrazy, jejichž hodnoty jsou rovny zbývajícím dvěma sudým číslům. Uvažovaná pětička ale musí obsahovat ještě tři lichá čísla z množiny M . Součet nebo rozdíl některých dvou z nich je však roven sudému číslu z M . Takže i v tomto případě máme $\langle a, b, c, d, e; 0 \rangle$.

Pokud je číslo 2 jediným sudým číslem v uvažované pětičce, evidentně existují dvě z libovolných čtyř lichých čísel v této čtveřici, jejichž rozdíl je roven číslu 2, proto platí $\langle a, b, c, d, e; 0 \rangle$. Z výše uvedených závěrů plyne, že je-li číslo 2 prvkem pětičky různých čísel $\{a, b, c, d, e\}$ z množiny M , pak pro tuto pětičku platí $\langle a, b, c, d, e; 0 \rangle$.

b) Nyní předpokládejme, že $1 \in \{a, b, c, d, e\}$ a současně číslo 2 není prvkem této pětičky. Pokud se přitom některá dvě ze čtyř zbývajících čísel liší o 1 (jejich rozdíl je 1), platí $\langle a, b, c, d, e; 0 \rangle$. Zbývá tedy prošetřit pouze pětičky $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Protože ale $1 \cdot (9 - 7) - (5 - 3) = 0$, platí i v tomto případě $\langle a, b, c, d, e; 0 \rangle$.

c) Nechť dále $3 \in \{a, b, c, d, e\}$ a současně ani jedno z čísel 1 a 2 není prvkem této čtveřice. Uvažujme nyní všechny čtveřice vytvořené ze zbývajících šesti čísel $\{4, 5, \dots, 9\}$. V každé z nich přitom existují dvě čísla, jejichž rozdíl je roven 3.

d) Konečně stačí uvažovat všech šest pětic čísel z šestiprvkové množiny $\{4, 5, \dots, 9\}$. Vzhledem k tomu, že platí

$$(8 + 4)/6 + 5 - 7 = 0,$$

$$(9 - 4 - 5) \cdot 6 \cdot 7 = 0,$$

$$(9 - 4 - 5) \cdot 6 \cdot 8 = 0,$$

$$(9 - 4 - 5) \cdot 7 \cdot 8 = 0,$$

$$(8 + 4)/6 + 7 - 9 = 0,$$

$$(5 + 9)/7 + 6 - 8 = 0.$$

I v tomto případě tedy platí $\langle a, b, c, d, e; 0 \rangle$.

2. Závěrem dokážeme dané tvrzení také v případě, kdy číslo 0 není prvkem uvažované šestice. Prvky této šestice uspořádáme vzestupně, tj.

$$1 \leq a < b < c < d < e < f \leq 9.$$

Uvažujme nyní uspořádané dvojice (a, b) , (c, d) , (e, f) a zkoumejme rozdíly $b - a$, $d - c$ a $f - e$. Přitom platí

$$3 \leq (b - a) + (d - c) + (f - e) \leq 6.$$

Pro každých šest přirozených čísel z množiny M uspořádaných výše uvedeným způsobem uvažujme hodnoty rozdílů čísel ve dvojicích (a, b) , (c, d) , (e, f) . Možnými hodnotami těchto rozdílů jsou tak trojice přirozených čísel $\{1, 1, 1\}$, $\{2, 1, 1\}$, $\{2, 2, 1\}$, $\{2, 2, 2\}$, $\{3, 2, 1\}$ a $\{4, 1, 1\}$, v nichž nezáleží na pořadí. Trojici rozdílů $\{2, 1, 1\}$ odpovídá např. šestice $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ nebo trojici rozdílů $\{3, 2, 1\}$ odpovídá např. šestice $\{1, 4, 5, 7, 8, 9\}$.

Dále již můžeme pracovat pouze s trojicemi čísel odpovídajícími rozdílům $b - a$, $d - c$ a $f - e$. Pro trojice $\{1, 1, 1\}$, $\{2, 1, 1\}$, $\{2, 2, 1\}$ a $\{3, 2, 1\}$ odpovídající těmto rozdílům lze přitom hledané rovnosti vytvořit snadno. Zbývá tak prošetřit jen trojice rozdílů $\{2, 2, 2\}$ a $\{4, 1, 1\}$. Trojici rozdílů $\{2, 2, 2\}$ odpovídá jediná šestice, a to $\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$. V tomto případě ale hledaná rovnost má tvar

$$(9 \cdot 1)/3 = 6 + 4 - 7.$$

Trojici rozdílů $\{4, 1, 1\}$ odpovídají přitom tři šestice daných vlastností, a to $\{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ a $\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$. Hledané rovnosti mají po řadě následující tvar

$$(9 + 5)/7 = (8 - 6) \cdot 1,$$

$$(9 + 7)/8 = (1 + 3)/2,$$

$$(9 + 1)/5 = (2 + 4)/3.$$

Závěr. Prozkoumáním všech případů jsme tak dokázali platnost daného tvrzení.

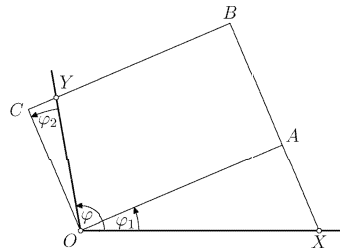
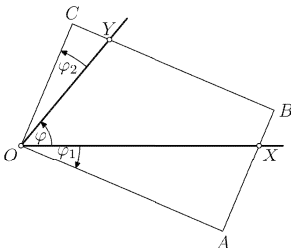
Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 157 a 158, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (18.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 157

Jsou dány body O , X , Y , které neleží na téže přímce. Sestrojte obdélník $OABC$ maximálního obsahu takový, že body X a Y leží po řadě na přímkách AB a BC .

Šárka Gergelitsová



Řešení:

Označme φ velikost orientovaného úhlu XOY . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $0 < \varphi < 180^\circ$. Dále označme φ_1 velikost orientovaného úhlu XOA a φ_2 velikost orientovaného úhlu YOC . Pokud by bod A

byl bodem přímky OX různým od bodu X , ležely by body O, A, B na téže přímce, tedy by netvořily vrcholy obdélníku, proto $-180^\circ < \varphi_1 < 180^\circ$. Navíc, bod A je patou kolmice z bodu O na přímku BX procházející bodem X , proto dokonce $-90^\circ < \varphi_1 < 90^\circ$. Podobně ukážeme, že $-90^\circ < \varphi_2 < 90^\circ$ (viz obrázky).

Vzhledem k tomu, že úhel AOC je pravý, platí $90^\circ = |\varphi + \varphi_2 - \varphi_1|$, tedy nastane jedna z možností

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi - 90^\circ, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi + 90^\circ. \quad (1)$$

Z pravoúhlého trojúhelníku AOX platí $|AO| = |OX| \cdot \cos \varphi_1$, z pravoúhlého trojúhelníku COY máme $|CO| = |OY| \cdot \cos \varphi_2$, obsah S obdélníku $OABC$ je tedy

$$\begin{aligned} S &= |AO| \cdot |CO| = |AX| \cdot |CX| \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 = \\ &= \frac{1}{2} |AX| \cdot |CX| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \end{aligned}$$

Nastane proto jedna z možností

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |AX| \cdot |CX| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi - 90^\circ)), \\ S &= \frac{1}{2} |AX| \cdot |CX| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi + 90^\circ)). \end{aligned}$$

Délky úseček $|OX|$ a $|OY|$ jsou dány. Vzhledem k omezením $-90^\circ < \varphi - 90^\circ < 90^\circ$, $90^\circ < \varphi + 90^\circ < 270^\circ$ platí $\cos(\varphi - 90^\circ) > 0$ a $\cos(\varphi + 90^\circ) < 0$. Obsah obdélníku $OABC$ tedy nabude maxima v prvním případě, kdy $\cos(\varphi - 90^\circ) > 0$, což znamená, že pravý úhel AOC je orientovaný kladně. Dále vidíme, že obsah S bude v tomto případě největší, právě když $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 1$. Vzhledem k omezením φ_1 a φ_2 to nastane, právě když $\varphi_1 + \varphi_2 = 0^\circ$. Odtud a z rovnice (1) plyne, že to nastane, právě když

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{\varphi - 90^\circ}{2}.$$

To znamená, že strany obdélníku $OABC$ svírají s osami úhlu XOY opačně orientované úhly stejné velikosti, kterou umíme vyjádřit pomocí dané odchylky φ .

Vzhledem k faktu, že body A a C leží na Thaletových kružnicích s průměry OX a OY , je konstrukce pravoúhlého obdélníku $OABC$ zřejmá. Tento pravoúhlý obdélník bude obdélník, právě když $|OX| \neq |OY|$. V případě $|OX| = |OY|$ úloha nemá řešení.

Správné řešení zaslali: *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R., *Samuel Říha* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Josef Tkadlec* z G v GJK v Praze 6 a *Jan Vaňhara* z G v Holešově.

Úloha 158

Označme K množinu všech přirozených čísel k , pro něž lze číslo k^2 zapsat jako součet druhých mocnin jedenácti po sobě jdoucích celých čísel.

- a) Dokažte, že každé číslo z množiny K dává při dělení číslem 66 zbytek 11 nebo 55.
- b) Najděte všechna čísla z množiny K , která jsou menší než 2 009 (lze užít kalkulačku).

Aleš Kobza

Řešení:

- a) Pro každé číslo $k \in K$ podle zadání platí

$$k^2 = (n-5)^2 + (n-4)^2 + (n-3)^2 + \dots + (n+5)^2, \quad (2)$$

kde n je vhodné celé číslo. Vztah (1) upravíme na ekvivalentní tvar

$$k^2 = 11(n^2 + 10).$$

Odtud vyplývá, že číslo k^2 musí být dělitelné 11, vzhledem k tomu, že 11 je prvočíslo, musí být dělitelné 11 i číslo k . To znamená, že zbytkem z po dělení čísla k číslem 66 musí být některé z čísel z množiny $\{0, 11, 22, 33, 44, 55\}$.

Předpokládejme, že $z \in \{0, 22, 44\}$. Potom je číslo k sudé, tedy i číslo n musí být sudé. Proto číslo n^2 při dělení čtyřmi dává zbytek 0. Číslo $11(n^2 + 10)$ při dělení čtyřmi tedy dává zbytek 2. Jelikož $k^2 = 11(n^2 + 10)$, znamená to, že číslo k^2 je dělitelné dvěma, ale není dělitelné čtyřmi, což je spor. Tedy zbytek z je některé z čísel z množiny $\{11, 33, 55\}$.

Ukážeme, že $z \neq 33$. Číslo n při dělení třemi dává jeden ze zbytků 0, 1, 2. Číslo $11(n^2 + 10)$ v těchto případech po dělení třemi dává zbytky po řadě 2, 1, 1. Tedy číslo $k^2 = 11(n^2 + 10)$ (tedy i k) není nikdy dělitelné číslem 3. Zbytek po dělení čísla k číslem 66 tedy nemůže být 33, proto může být pouze některé z čísel z množiny $\{11, 55\}$, což jsme chtěli dokázat.

b) S využitím počítače zjistíme, že existují právě čtyři čísla z množiny K , která jsou menší než 2 009, jsou to čísla 11, 77, 143 a 1 529. Platí totiž

$$\begin{aligned}11^2 &= (-4)^2 + (-3)^2 + \dots + 6^2, \\77^2 &= 18^2 + 19^2 + \dots + 28^2, \\143^2 &= 38^2 + 39^2 + \dots + 48^2, \\1\,529^2 &= 456^2 + 457^2 + \dots + 466^2.\end{aligned}$$

Správné řešení zaslali: *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. R. a *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova 8.

Neúplné řešení zaslali: *Samuel Říha* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše a *Jan Vaňhara* z G v Holešově.

Pavel Calábek

Eukleides: ZÁKLADY. Knihy I–IV. Vydala OPS, Nymburk 2008, 154 stran, ISBN: 978–80–903773–7–0

Mezi architektonickými skvosty lidských dějin je málo tak impozantních výtvorů, jakým je stavba geometrie.

Už sám název knihy působí přímo magicky: jakoby se před čtenářem zjevila prapůvodní tvář starověké vědy a současně vystupoval z řádků i obraz jejího tvůrce – člověka, obdařeného přísně logickým myšlením.

Je záslužné, že se po tolika staletích rozhodli autoři této poměrně útlé, ale hutné publikace uctít nehynoucí památku začátků „královské“ vědy a využít ji jako podnětu k novému, současnému zamyšlení nad jejím nestárnoucím obsahem.

Jde o kolektiv autorů, zanícených společně sdíleným zájmem převést původní

překlad antického spisu do mluvy dnešních vyjadřovacích prostředků a dát mu plně srozumitelný a tím i velmi čtivý, aktuální výklad.

Podkladem a vůdčím motivem pro tuto „zprostředkovatelskou“ činnost je zasvěcený komentář profesora Petra Vopěnky, znalce problematiky zajisté povolaneho k tak potřebnému počínu.

Proto po přečtení knížky zůstane v čtenáři nejen hluboký dojem, úcta a obdiv, ale vznikne i nutkavý zájem o další z celkem třinácti knih „Základů“, které má autorský kolektiv v plánu napříští ještě vydat.

Nezbývá tedy, než se těšit, že pokračování na dané téma se bude v co možno nejbližší době realizovat se stejným úspěchem a zapůsobí tak účinně, jako se to podařilo v případě tohoto úvodu do „Základů“.

Vladimír Vlček