

MATEMATIKA

Kružnice na astronomickém ciferníku pražského orloje

MICHAL KRÍŽEK – PAVEL KRÍŽEK

Matematický ústav a Fyzikální ústav AV ČR, Praha – 1. lékařská fakulta UK, Praha

1. Úvod

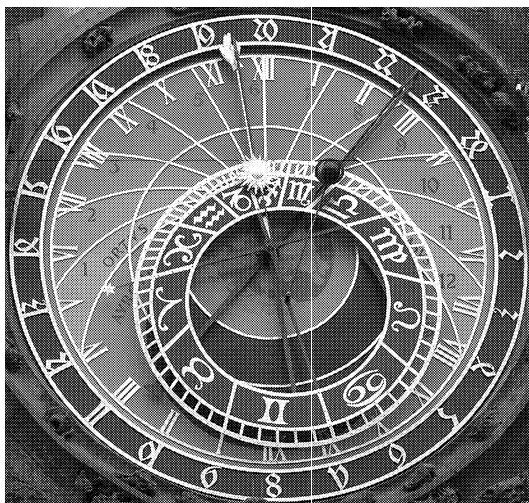
Podle výzkumů *Zdeňka Horského*, *Stanislava Macháčka* a *Emanuela Procházky* [2, s. 32], [3], [6], [8, s. 164] vznikl pražský orloj kolem roku 1410. Tímto pojednáním, které je volným pokračováním článku [5], chceme připomenout 600. výročí jeho vzniku.

Matematický model¹ orloje vytvořil matematik a astronom *Jan Šindel*, který byl r. 1410 rektorem na pražské univerzitě. Při návrhu astronomického ciferníku byla použita již v antice známá stereografická projekce nebeské sféry na rovinu (viz obr. 1). V případě pražského orloje si nebeskou sféru představme jako kulovou plochu o poloměru cca 40 cm. Střed promítání S je umístěn v severním pólu² kulové plochy a projekční rovina je k ní tečná s bodem dotyku v jižním pólu J (viz obr. 2). Střed astronomického ciferníku (viz obr. 1) tedy odpovídá jižnímu pólu nebeské sféry. Nejmenší vnitřní kružnice se středem v jižním pólu znázorňuje obratník Kozoroha

¹Model popisuje idealizovanou situaci, kdy Slunce a Měsíc obíhají Zemi konstantní úhlovou rychlostí v rovině ekliptiky, směr zemské osy je v prostoru neměnný (tj. nedochází k precesi ani nutacím osy) atp.

²Většina orlojů a astrolábů, které vznikly ve druhé polovině 15. století a později, má střed promítání v jižním pólu nebeské sféry, aby bylo možno znázorňovat polohy hvězd v okolí severního pólu. Při tomto způsobu promítání ale sluneční ukazatel vykonává v létě přes den krátké oblouky, zatímco v zimě dlouhé.

na nebeské sféře, zatímco vnější soustředná kružnice obratník Raka.³ Mezi těmito kružnicemi je na ciferníku ještě umístěna další soustředná kružnice představující rovník nebeské sféry. Na astronomickém ciferníku však vidíme další kružnice a oblouky (srov. [4]), o nichž pojednáme dále.



Obr. 1 Astronomický ciferník pražského orloje (v rovině xy)

V článku [5] je dokázána důležitá vlastnost stereografické projekce:

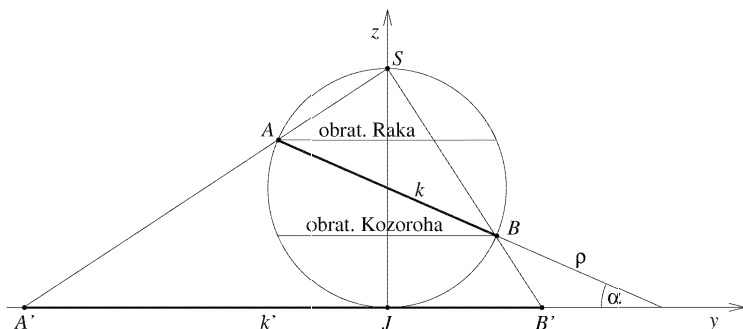
Věta 1 (Ptolemaiova).

Kružnice ležící na kulové ploše a neprocházející středem promítání se při stereografické projekci zobrazí opět jako kružnice.

Díky této větě mohli staří mistři snadno zkonstruovat některé důležité křivky astronomického ciferníku. Je-li sluneční ukazatel v horní modře obarvené oblasti ciferníku, znamená to, že je den. Přechází-li zlatený oblouk označený ORTVS (viz obr. 1), Slunce vychází. Podobně oblouk označený OCCASVS odpovídá západu Slunce. Oba oblouky jsou podle Ptolemaiovy věty částmi jedné kružnice (tzv. *obzorníku*), protože idealizo-

³Část nebeské sféry nad obratníkem Raka se vlastně zobrazuje mimo astronomický ciferník.

vaný pražský horizont je na nebeské sféře *hlavní kružnicí*.⁴ Připomeňme, že hlavní kružnice je kružnice o stejném středu i poloměru, jako má kulová sféra. Kružnice na kulové sféře, která není hlavní, se nazývá *vedlejší kružnice*. Cihlově zbarvená oblast označená AVRORA odpovídá svítání a CREPVSCVLVM stmívání (soumraku). Černě vybarvená oblast v dolní části ciferníku znázorňuje astronomickou noc, kdy se Slunce nachází alespoň 18° pod horizontem. Podle Ptolemaiovy věty je hranicí této oblasti opět kružnice.



Obr. 2 Stereografická projekce hlavní kružnice k se sklonem α k projekční rovině xy

2. Velikosti šesti kružnic na astronomickém ciferníku

Stereografická projekce je silně nelineární⁵ zobrazení. Patrně díky této vlastnosti došlo během několika rekonstrukcí orloje k chybnému určení velikosti některých kružnic na astronomickém ciferníku. Správné polohy středů a velikosti poloměrů 6 základních kružnic (tři hlavních a tři vedlejších) si nyní odvodíme.

Na astronomickém ciferníku zavedme standardní kartézské souřadnice xy se středem v bodě J . Uvažujme nyní rovinu yz kolmou na vodorovnou osu x . Počátek souřadnic v rovině yz je tedy v bodě $J = (0, 0)$ a nechť

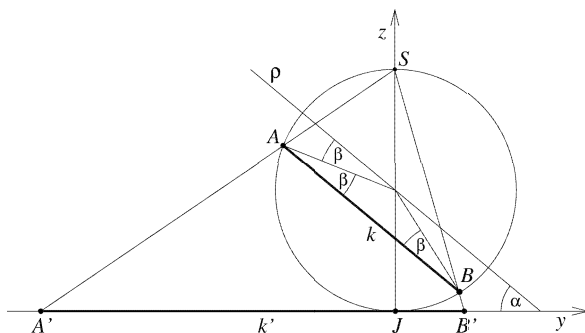
⁴V geocentrickém modelu, který byl v době vzniku orloje jediným oficiálně uznávaným modelem uspořádání světa, je pražský horizont nehybný, zatímco ekliptika se se svými souhvězdími otáčí kolem Země.

⁵Velice malé kružnice v těsné blízkosti severního pólu se totiž zobrazují na nesmírně obrovské kružnice v projekční rovině, zatímco malé kružnice v blízkosti jižního pólu se zobrazují opět na malé kružnice.

$S = (0, 2)$, tj. bez újmy na obecnosti předpokládáme, že kulová plocha má poloměr 1. Podle [5, s. 135] se bod $A = (y, z) \neq S$ na kulové ploše při stereografické projekci zobrazí na bod

$$A' = \left(\frac{2y}{2-z}, 0 \right). \quad (1)$$

Na kulové sféře nyní uvažujme kružnici k v rovině se sklonem α k projekční rovině xy astronomického ciferníku (viz obr. 2 a 3). Pro jednoduchost se omezíme jen na případ $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ)$. Předpokládejme, že osa x je rovnoběžná s rovinou kružnice k . Nechť je tato rovina vzdálena o $|\sin \beta|$ od roviny ρ , která je s ní rovnoběžná a prochází středem koule $(0, 1)$. Je-li k „pod“ rovinou ρ , volíme úhel β kladný (viz obr. 3), v opačném případě nekladný.



Obr. 3 Stereografická projekce vedlejší kružnice k se sklonem α

Nechť úhel $\beta \in (-90^\circ, 90^\circ)$ je takový, že $\alpha - \beta \neq 90^\circ$. Označme

$$A = (-\cos(\alpha - \beta), 1 + \sin(\alpha - \beta))$$

nejvzdálenější bod kružnice k od projekční roviny xy (pro $\alpha = 0^\circ$ není jediný) a předpokládejme, že

$$B = (\cos(\alpha + \beta), 1 - \sin(\alpha + \beta)),$$

tj. B je protější bod na kružnici k vzhledem k A a úsečka AB je tedy průměrem k . Podle (1) dostaneme

$$A' = \left(\frac{-2 \cos(\alpha - \beta)}{1 - \sin(\alpha - \beta)}, 0 \right) \quad \text{a} \quad B' = \left(\frac{2 \cos(\alpha + \beta)}{1 + \sin(\alpha + \beta)}, 0 \right).$$

Odpovídající kružnice k' v projekční rovině má tedy poloměr

$$r' = \frac{1}{2}|A'B'| = \left| \frac{\cos(\alpha + \beta)}{1 + \sin(\alpha + \beta)} + \frac{\cos(\alpha - \beta)}{1 - \sin(\alpha - \beta)} \right|. \quad (2)$$

Střed kružnice k' se nalézá uprostřed úsečky $A'B'$, tj. v bodě $\frac{1}{2}(A' + B')$. Souřadnice středu k' v projekční rovině xy pak jsou $(0, s')$, kde

$$s' = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{1 + \sin(\alpha + \beta)} - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{1 - \sin(\alpha - \beta)}. \quad (3)$$

Rozlišujeme tři případy:

1) Rovina kružnice k je rovnoběžná s projekční rovinou. V tomto případě je $\alpha = 0^\circ$. Pak z (2) plyne, že

$$r' = \frac{\cos \beta}{1 + \sin \beta} + \frac{\cos(-\beta)}{1 - \sin(-\beta)} = \frac{2 \cos \beta}{1 + \sin \beta}. \quad (4)$$

Pro nebeský rovník tak dostaneme $r' = 2$ pro $\beta = 0^\circ$, pro obratník Kozoroha odpovídající úhlu $\beta = 23.45^\circ$ je $r' \doteq 1.313$ a pro obratník Raka s $\beta = -23.45^\circ$ je $r' \doteq 3.048$. Podle (3) mají všechny tři kružnice v projekční rovině střed v bodě $(0, 0)$.

2) Kružnice k je hlavní, tj. $\beta = 0$. Pak z (2) plyne, že

$$r' = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha (1 - \sin \alpha + 1 + \sin \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}. \quad (5)$$

Protože Praha leží na 50 . rovnoběžce severní šířky, má rovina pražského horizontu sklon $\alpha = 40^\circ$ k projekční rovině xy . Pro obzorník tak dostaneme

$$r' = \frac{2}{\cos 40^\circ} \doteq 2.611 \quad (6)$$

a podle (3) je

$$s' = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha (1 - \sin \alpha - 1 - \sin \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{tg} \alpha. \quad (7)$$

Střed obzorníkové kružnice má tedy souřadnice $(0, -2 \operatorname{tg} 40^\circ) \doteq (0, -1.678)$. Z její polohy můžete určit, že Slunce v době letního slunovratu vychází kolem 4. hodiny, v době rovnodennosti v 6 hodin a v době zimního slunovratu vychází až kolem 8. hodiny (viz římské číslice na obr. 1).

Poněkud komplikovanější situace nastává s prstencem ekliptiky, protože se v geocentrickém modelu neustále otáčí. Nachází-li se prstenec na ciferníku ve své nejnižší poloze, pak z (5) plyne, že $r' \doteq 2.180$ pro $\alpha = 23.45^\circ$ (srov. obr. 2). Střed prstence obíhá po kružnici o poloměru $2 \operatorname{tg} 23.45^\circ$ se středem v počátku J .

O chybě při určování poloměru prstence při rekonstrukci orloje v roce 1865 se pojednává v [5, s. 138]. Tehdy musela být dodatečně přinýtována ke zvířetníku zlacená obruč (srov. obr. 1), aby se ekliptika dotýkala obratníku Raka a Kozoroha.

3) Kružnice k není hlavní ani neleží v rovině rovnoběžné s projekční rovinou. V tomto případě je $\alpha \neq 0^\circ \neq \beta$. Pak z (2) a (3) pro černý kruh odpovídající astronomické noci a úhlům $\alpha = 40^\circ$ a $\beta = 18^\circ$ dostaneme (viz obr. 1 a 3)

$$r' = \frac{\cos 58^\circ}{1 + \sin 58^\circ} + \frac{\cos 22^\circ}{1 - \sin 22^\circ} \doteq 1.769 \quad (8)$$

a

$$s' = \frac{\cos 58^\circ}{1 + \sin 58^\circ} - \frac{\cos 22^\circ}{1 - \sin 22^\circ} \doteq -1.196$$

Poznámka 1. Podle nesprávného nákresu v [7, s. 55] je poloměr obzorníkové kružnice (se sklonem α k projekční rovině) roven $\cotg(\alpha/2) = 2.747$, což je hodnota blízká (6). Funkce $f(\alpha) = 2/\cos \alpha$ odvozená v (5) a $g(\alpha) = \cotg(\alpha/2)$ však mají zcela odlišný průběh. Jejich grafy (pokuste se je nakreslit) se protínají pro $\alpha \doteq 41.221^\circ$, což je blízké hodnotě sklonu obzorníkové kružnice v Praze. Pro jiné zeměpisné šířky ($90^\circ - \alpha$) se ale hodnoty f a g obecně dosti liší. Autor [7] proto umístil Prahu na 49. rovnoběžku nebeské sféry (místo středu nebeské sféry), aby dosáhl co největší shody s hodnotou $\alpha \doteq 41.221^\circ \doteq 90^\circ - 49^\circ$.

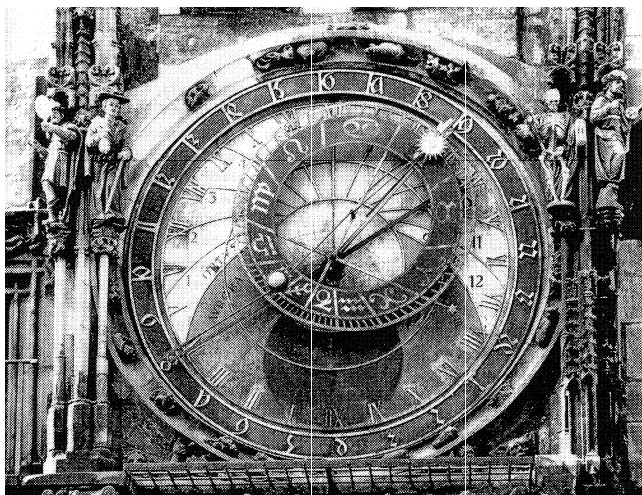
Poznámka 2. Jakub Malina ve své knížce [7, s. 57] dále uvádí: (*Historickou perličkou týkající se desky astrolábu je, že několik desetiletí po poválečné rekonstrukci orloje byla plocha astronomické noci zakreslena nepřesně a napravil ji až zásah Zdeňka Horského a Milana Patky na konci sedmdesátých let minulého století.*⁶ Sám Malina [7, s. 55] však chybně in-

⁶Chyba vznikla při poválečné opravě ciferníku, kdy byl nakreslen mnohem menší černý kruh astronomické noci koncentricky s obzorníkem (viz obr. 4). Jižní pól, který je v Praze asi 50° pod obzorem, se na obr. 4 nenachází uvnitř černého kruhu (viz [10]). Až kolem roku 1979 na chybu upozornil Milan Patka.

terpretuje poloměr kruhu astronomické noci jako

$$\frac{1 + \cos 40^\circ}{\operatorname{tg}(40^\circ + 18^\circ)} + \sin 40^\circ \doteq 1.746.$$

To je opět shodou okolností hodnota velice blízká správné hodnotě uvedené v (8).



Obr. 4 Nesprávně zakreslený černý kruh astronomické noci byl na pražském orloji přibližně 30 let

3. Jsou oblouky planetních hodin části kružnic?

Horský [2, s. 54] o astronomickém ciferníku píše: *Ještě tu je na desce deset zlacených křivek v modré části oblohy nad horizontem, o nichž zatím nevíme, co znamenají. Do jejich sítě patří i obě větve obzorníku i svislice poledníku.*

Zlacené oblouky odpovídají tzv. planetním hodinám.⁷ Slunce vychází v nula hodin a den je rozdělen na 12 stejně dlouhých časových úseků, což je na astronomickém ciferníku (viz obr. 1) vyznačeno černými arabskými

⁷Terminologie je značně nejednotná. Někdy se používá též názvu planetární, nestejné, nerovné, přirozené, babylónské, astrologické, temporální či temporární hodiny (viz např. [1], [2], [6], [7]).

číslicemi. Přechází-li sluneční ukazatel zladený oblouk označený např. číslem 3, pak je třetí planetní hodina. Každé planetní hodině byla kdysi přiřazena nějaká planeta (blíže viz [1, s. 49] a [9, s. 19]). Na 12 stejně dlouhých dílů je rozdělena i noc, což ale na ciferníku není vyznačeno. Pouze v době rovnodennosti je délka planetní hodiny rovna $1\text{ h} = 60\text{ minut}$. V době letního slunovratu trvá 1 planetní hodina přibližně 80 minut a o zimním slunovratu jen asi 40 minut.

Z kapitoly 2 již víme, že obě větve obzorníku jsou části jedné kružnice. Svislice poledníku je úsečka, která je obrazem části hlavní kružnice, jež prochází severním pólem a odpovídá 6. planetní hodině. Nyní si ale ukážeme, že zbývajících deset zladených oblouků nejsou části kružnic, i když jsou jim velice blízké.⁸

Budeme se zabývat tvarem oblouku, který odpovídá např. 9. planetní hodině (viz obr. 1 vpravo nahoře). Předpokládejme, že se sluneční ukazatel pohybuje po kružnici k se středem v bodě J v projekční rovině (čárky u jednotlivých symbolů budeme pro jednoduchost vynechávat). Nechť poloměr $r \in [r_1, r_2]$ kružnice k leží mezi poloměry obratníku Kozoroha $r_1 = 2 \cos \beta / (1 + \sin \beta) \doteq 1.313$ a Raka $r_2 = 2 \cos \beta / (1 - \sin \beta) \doteq 3.048$ pro $\beta = 23.45^\circ$ (viz (4)). Bod $P = (0, r)$ kružnice k odpovídá 6. planetní hodině a nechť $H \in k$ odpovídá 12. planetní hodině, tj. leží zároveň na obzorníkové kružnici o poloměru h a středu $G = (0, -a)$, kde podle (7) je $a = 2 \operatorname{tg} 40^\circ$. Označme $\varphi \in [0^\circ, 180^\circ]$ úhel HJP a nechť $D \in k$ odpovídá 9. planetní hodině, tj. úsečka DJ pólí úhel φ .

Bod o souřadnicích $(2, 0)$, který odpovídá západu Slunce při rovnodennosti, leží na kružnici nebeského rovníku a zároveň na kružnici obzorníku. Podle kosinové věty pro trojúhelník GHJ a Pythagorovy věty tedy platí

$$r^2 + a^2 - 2ar \cos(180^\circ - \varphi) = h^2 = a^2 + 2^2,$$

tj.

$$\cos \varphi = \frac{4 - r^2}{2ar}.$$

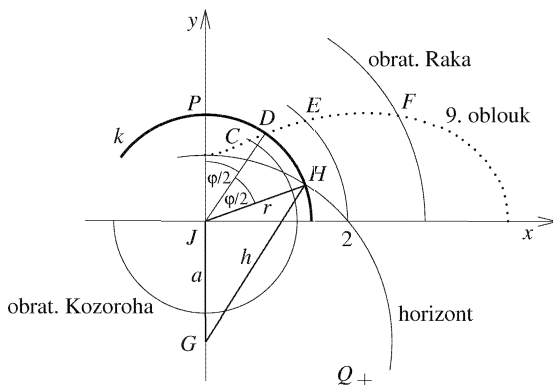
Odtud plyne, že

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} = \sqrt{\frac{2ar - 4 + r^2}{4ar}}.$$

⁸Viz soutěžní úloha O14, Technický magazín, 1979, s. 69.

Pro bod $D = D(r) = (x, y)$ tak dostáváme

$$x = x(r) = r \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2ar^2 - 4r + r^3}{4a}}, \quad y = y(r) = \sqrt{r^2 - x^2(r)}. \quad (9)$$



Obr. 5 Kružnice pražského horizontu (tzv. obzorník) a 9. oblouk planetních hodin

Věta 2

Křivka $(x(r), y(r))$ definovaná v (9) pro $r \in [r_1, r_2]$ není podmnožinou žádné kružnice.

Důkaz. Na 9. oblouku zvolme průsečíky s obratníkem Kozoroha $C = (c, d) = (x(r_1), y(r_1))$, s nebeským rovníkem $E = (x(2), y(2)) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a s obratníkem Raka $F = (f, g) = (x(r_2), y(r_2))$. Těmito třemi body (neležícími v přímce) je jednoznačně určena kružnice, jejíž střed $Q = (q, -q)$ je průsečíkem os úseček CE a EF , kde

$$q = \frac{c + \sqrt{2}}{2} + \frac{d - \sqrt{2}}{2} \frac{(d - g)(g - \sqrt{2}) + (f - c)(\sqrt{2} - f)}{cq - df + \sqrt{2}(d + f - c - g)} = 2.286304 \dots$$

Pomocí Pythagorovy věty se můžete přesvědčit, že vzdálenost středu Q od všech tří bodů C, E, F se rovná $3.801891\dots$, zatímco vzdálenost Q např. od bodu $D = D(\frac{3}{2}) = (x(\frac{3}{2}), y(\frac{3}{2}))$ je $3.796988\dots$

Lze ukázat, že $0.998 \leq |QD(r)|/|QE| \leq 1.003$ pro všechna $r \in [r_1, r_2]$. Odchylka 9. oblouku na tomto intervalu od kruhového oblouku o poloměru

$|QE|$ je tedy nepatrná. Z (9) je možno odvodit, že definiční obor funkce $r \mapsto (x(r), y(r))$ lze rozšířit na interval

$$[r_0, r_3] = [\sqrt{a^2 + 4} - a, \sqrt{a^2 + 4} + a] \doteq [0.933, 4.289].$$

Příslušný graf má překvapivě vodorovnou tečnu v bodě $(0, y(r_0))$, kde $y(r_0) = 2(1 - \sin 40^\circ) / \cos 40^\circ$ a od kruhového oblouku se dosti podstatně liší (srov. obr. 5).

Pro ostatní zladené oblouky lze postupovat analogicky. Kdybychom je prodloužili až ke svislé ose y , budou se všechny protínat v bodě $(0, y(r_0))$, který leží na obzorníkové kružnici, jak plyne ze vztahů (6) a (7).

Poznámka 3. Podoba astronomického ciferníku se mnohokrát dosti podstatně změnila (viz např. obrázky v [1], [2], [9], [11]). Pražský orloj ukazoval po řadu let čas, kterému se někdy také říká babylónský. Slunce vychází v 0 hodin a celý den včetně noci je rozdělen na 24 stejně dlouhých časových úseků. Příslušné hodinové oblouky vzniknou otočením levé větve obzor-níku kolem středu o úhly $h \cdot 15^\circ$, kde $h = 1, 2, \dots, 24$. V tomto případě hodinové oblouky byly částmi kružnic (srov. např. [2, s. 9, 67, 107]).

Poděkování. Autoři děkují Monice Kabelkové a Jakubu a Martinu Šolcovi za inspirující diskuse. Práce byla podpořena grantem č. IAA 100190803.

Literatura

- [1] *Gruss, G.*: Z říše hvězd, Bursík & Kohout, Praha 1894–98.
- [2] *Horský, Z.*: Pražský orloj, Panorama, Praha 1988.
- [3] *Horský, Z. – Procházka, E.*: Pražský orloj, Sborník pro dějiny přírodních věd a techniky 9, 1964, p. 83–146.
- [4] *Křížek, M. – Somer, L. – Šolcová, A.*: Kouzlo čísel, Edice Galileo, sv. 39, Academia, Praha 2009.
- [5] *Křížek, M. – Šolc, J. – Šolcová, A.*: Pražský orloj a stereografická projekce, Matematika-fyzika-informatika 17, 2007/2008, s. 129–139.
- [6] *Macháček, S.*: Nález nové zprávy vzniku orloje na Starém Městě v Praze, Čas. Společnosti přátel starožitností, orgán historické vlastivědy české č. 10, Praha 1962, s. 159–161.
- [7] *Malina, J.*: Staroměstský orloj, Eminent, Praha 2005.
- [8] *Procházka, E.*: Profesor Kadeřávek a staroměstský orloj, sborník konf. Geometrie v technice a umění (ed. K. Drábek), JČSMF, Praha 1985, s. 158–165.
- [9] *Rosický, V.*: Staroměstský orloj v Praze, Nakl. J. Otto, Praha 1923.
- [10] *Šolc, J.*: Omyl na astronomickém ciferníku pražského orloje. Pokroky MFA, roč. 54, 2009.
- [11] *Teige, J.*: Jana Tábořského z Klokotské Hory Zpráva o orloji Staroměstském, Spol. přátel starožitností českých v Praze 1901.

60. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Pan Vlk čekal na zastávce před školou na autobus. Z okna slyšel slova učitele:

„Jaký povrch může mít pravidelný čtyřboký hranol, víte-li, že délky všech jeho hran jsou v centimetrech vyjádřeny celými čísly a že jeho objem je ...“

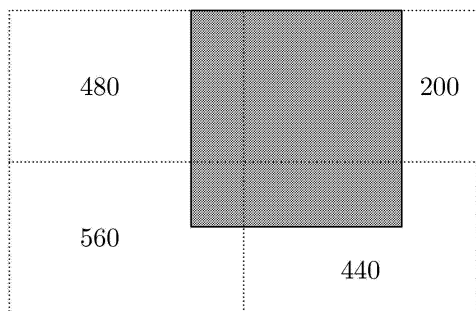
Toto důležité číslo pan Vlk neslyšel, protože zrovna projelo okolo auto. Za chvíli slyšel žáka hlásícího výsledek 918 cm^3 . Učitel na to řekl:

„Ano, ale úloha má celkem čtyři řešení. Hledejte dál.“

Více se pan Vlk už nedozvěděl, neboť nastoupil do svého autobusu. Protože matematika byla vždy jeho hobby, vytáhl si v autobuse tužku a papír a po čase určil i zbylá tři řešení učitelovy úlohy. Spočítejte je i vy.

L. Šimůnek

Z9–I–2



Na obrázku jsou tečkovanou čarou znázorněny hranice čtyř stejně velkých obdélníkových parcel. Šedou barvou je vyznačena zastavěná plocha. Ta má tvar obdélníku, jehož jedna strana tvoří zároveň hranice parcel. Zapsaná čísla vyjadřují obsah nezastavěné plochy na jednotlivých parcelách, a to v m^2 . Vypočítejte obsah celkové zastavěné plochy.

L. Šimůnek

Z9–I–3

Vlčkovi lisovali jablečný mošt. Měli ho ve dvou stejně objemných soudcích, v obou téměř stejné množství. Kdyby z prvního přelili do druhého 1 litr, měli by v obou stejně, ale to by ani jeden soudek nebyl plný. Tak raději přelili 9 litrů z druhého do prvního. Pak byl první soudek úplně plný a mošt v druhém zaplňoval právě třetinu objemu. Kolik litrů moštu vylisovali, jaký byl objem soudků a kolik moštu v nich bylo původně?

M. Volfová

Z9–I–4

Pan Rychlý a pan Louda ve stejnou dobu vyšli na tutéz turistickou túru, jen pan Rychlý ji šel shora z horské chaty a pan Louda naopak od autobusu dole v městečku na chatu nahoru. V 10 hodin se na trase míjeli. Pan Rychlý spěchal a již ve 12 hodin byl v cíli. Naopak pan Louda postupoval pomalu, a tak dorazil k chatě až v 18 hodin. V kolik hodin pánové vyrazili na cestu, víme-li, že každý z nich šel celou dobu svou stálou rychlostí?

M. Volfová

Z9–I–5

Kružnici se středem S a poloměrem 12 cm jsme opsali pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ a vepsali pravidelný šestiúhelník $TUVXYZ$ tak, aby bod T byl středem strany BC . Vypočítejte obsah a obvod čtyřúhelníku $TCUS$.

M. Krejčová

Z9–I–6

Petr a Pavel česali v sadě jablka a hrušky. V pondělí snědl Petr o 2 hrušky více než Pavel a o 2 jablka méně než Pavel. V úterý Petr snědl o 4 hrušky méně než v pondělí. Pavel snědl v úterý o 3 hrušky více než Petr a o 3 jablka méně než Petr. Pavel snědl za oba dny 12 jablek a v úterý snědl stejný počet jablek jako hrušek. V úterý večer oba chlapci zjistili, že počet jablek, které společně za oba dny snědli, je stejně velký jako počet společně snědených hrušek. Kolik jablek snědl Petr v pondělí a kolik hrušek snědl Pavel v úterý?

L. Hozová

KATEGORIE Z8

Z8–I–1

Martin má na papíře napsáno pětímístné číslo s pěti různými číslicemi a následujícími vlastnostmi:

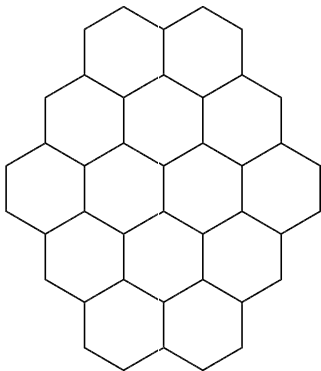
- škrtnutím druhé číslice zleva (tj. číslice na místě tisíců) dostane číslo, které je dělitelné dvěma,
- škrtnutím třetí číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné třemi,
- škrtnutím čtvrté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné čtyřmi,
- škrtnutím páté číslice zleva dostane číslo, které je dělitelné pěti,
- neškrtně-li žádnou číslici, má číslo dělitelné šesti.

Které největší číslo může mít Martin napsáno na papíře?

M. Petrová

Z8–I–2

Karel se snažil do prázdných polí na obrázku vepsat přirozená čísla od 1 do 14 tak, aby žádné číslo nebylo použito víckrát a součet všech čísel v každé přímé linii byl stejný. Po chvíli si uvědomil, že to není možné. Jak byste Karlovo pozorování zdůvodnili vy? (Přímou linií rozumíme skupinu všech sousedících políček, jejichž středy leží na jedné přímce.)



S. Bednářová

Z8–I–3

Cena knížky „Nové hádanky“ byla snížena o 62,5 %. Matěj zjistil, že obě ceny (před snížením i po něm) jsou dvojmístná čísla a dají se vyjádřit stejnými číslicemi, jen v různém pořadí. O kolik Kč byla knížka zlevněna?

M. Volfová

Z8–I–4

Rozdělte krychli o hraně 8 cm na menší shodné krychličky tak, aby součet jejich povrchů byl pětkrát větší než povrch původní krychle. Jaký bude objem malé krychle a kolik centimetrů bude měřit její hrana?

M. Volfová

Z8–I–5

Klára, Lenka a Matěj si procvičovali písemné dělení se zbytkem. Jako dělence měl každý zadáno jiné přirozené číslo, jako dělitele však měli všichni stejné přirozené číslo. Lenčin dělenec byl o 30 větší než Klářin. Matějův dělenec byl o 50 větší než Lenčin. Kláře vyšel ve výsledku zbytek 8, Lence zbytek 2 a Matějovi zbytek 4. Všichni počítali bez chyby. Jaký dělitel byl žákům zadán?

L. Šimůnek

Z8–I–6

V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ jsou úhlopříčky AC a DB na sebe kolmé, jejich délka je 8 cm a délka nejdelší strany AB je také 8 cm. Vypočítejte obsah tohoto lichoběžníku.

M. Krejčová

KATEGORIE Z7

Z7–I–1

Součin číslic libovolného vícemístného čísla je vždy menší než toto číslo. Pokud počítáme součin číslic daného čísla, potom součin číslic tohoto součinu, poté znova součin číslic nového součinu atd., nutně po nějakém počtu kroků dospějeme k jednomístnému číslu. Tento počet kroků nazýváme *perzistence* čísla. Např. číslo 723 má perzistenci 2, neboť $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ (1. krok) a $4 \cdot 2 = 8$ (2. krok).

- Najděte největší liché číslo, které má navzájem různé číslice a perzistenci 1.
- Najděte největší sudé číslo, které má navzájem různé nenulové číslice a perzistenci 1.
- Najděte nejmenší přirozené číslo, které má perzistenci 3.

S. Bednářová

Z7–I–2

Ondra na výletě utratil $\frac{2}{3}$ peněz a ze zbytku dal ještě $\frac{2}{3}$ na školu pro děti z Tibetu. Za $\frac{2}{3}$ nového zbytku ještě koupil malý dárek pro maminku. Z dřeváky kapsy ztratil $\frac{4}{5}$ zbylých peněz, a když ze zbylých dal půlku malé sestřičce, zůstala mu právě jedna koruna. S jakým obnosem šel Ondra na výlet?

M. Volfová

Z7–I–3

Šárka prohlásila:

„Jsme tři sestry, já jsem nejmladší, Líba je starší o tři roky a Eliška o osm. Naše mamka ráda slyší, že nám všem (i s ní) je v průměru 21 let. Přitom když jsem se narodila, bylo mamce už 29.“

Před kolika lety se Šárka narodila?

M. Volfová

Z7–I–4

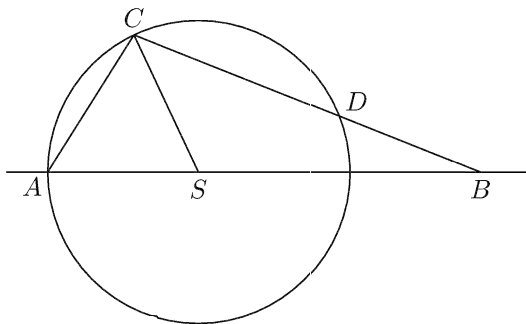
Jindra měl napsáno čtyřmístné číslo. Toto číslo zaokrouhlil na desítky, na stovky a na tisíce a všechny tři výsledky zapsal pod toto číslo. Všechna čtyři čísla správně sečetl a dostal 5 443.

Které číslo měl Jindra napsáno?

M. Petrová

Z7–I–5

Libor narýsoval kružnici se středem S a body A, B, C, D , jak ukazuje obrázek. Zjistil, že úsečky SC a BD jsou stejně dlouhé. V jakém poměru jsou velikosti úhlů ASC a SCD ?



L. Hozová

Z7–I–6

Najděte všechna trojmístná přirozená čísla, která jsou beze zbytku dělitelná číslem 6 a ve kterých můžeme vyškrtnout jakoukoli číslici a vždy dostaneme dvojмístné přirozené číslo, jež je také beze zbytku dělitelné číslem 6.

L. Šimůnek

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 165 a 166, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle tohoto (19.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 165

Připravuje se oslava narozenin, na kterou je pozván lichý počet hostů. V místnosti je pro ně přichystán odpovídající počet židlí rozmístěných u několika stolů. Hostitel si před začátkem oslavy všiml zajímavé věci. Všechny hosty lze ve druhé polovině večera přesadit tak, že žádný z nich nebude sedět u stejného stolu jako před přesazením. Kdyby však hostitel před příchodem hostů spojil k sobě libovolné dva stoly i s jejich židlemi a udělal z nich jeden společný stůl, takové přesazení již nebude možné. Kolik stolů je v místnosti?

Marek Pechal

Řešení: Nechť jsou hosté rozesazeni u stolů označených čísly $1, 2, 3, \dots, n$ ($n \geq 2$). Předpokládejme, že počet hostů h u prvního stolu je největší (tj. počet hostů u zbývajících stolů je nejvýše h). Provedme následující úvahu:

Nechť každý z hostů obdrží kartičku s číslem stolu, u něhož právě sedí. Představme si velký kulatý stůl, kolem kterého je rozmístěno tolik židlí, kolik hostů je v místnosti. Kolem tohoto myšleného stolu usazujeme ve směru hodinových ručiček vedle sebe hosty tak, že usadíme nejprve hosty od prvního stolu, potom hosty od druhého stolu atd., až usadíme všechny hosty. Každý z hostů položí před sebe na stůl kartičku s číslem svého stolu a posune se ve směru hodinových ručiček o h míst. Je zřejmé, že před hosty s čísly stolů většími než 1 bude poté ležet kartička s jiným číslem stolu, než u kterého seděli. Před každým z hostů od prvního stolu bude ležet kartička různá od 1, právě když součet počtu hostů u zbývajících stolů bude alespoň h . V takovém případě hosty posadíme ke stolu, jehož číslo před nimi leží, a každý bude sedět u jiného stolu. Naopak, pokud počet hostů u prvního stolu bude větší než celkový počet hostů u zbývajících stolů, neexistuje zřejmě přesazení takové, že by každý z hostů od stolu číslo 1 seděl u stolu s jiným číslem.

Z této úvahy vyplývá, že hosty můžeme přesadit tak, aby každý z hostů

seděl u jiného stolu, právě když počet hostů u každého stolu je alespoň takový, jako počet hostů u všech zbývajících stolů.

Celkový počet pozvaných hostů je lichý a lze je ve druhé polovině večera usadit tak, aby každý seděl u jiného stolu. V místnosti proto nemohou být ani jeden, ani dva stoly. V místnosti jsou tedy alespoň tři stoly. Předpokládejme dále, že v místnosti jsou alespoň čtyři stoly. Z podmínek úlohy vyplývá, že počet hostů u každého stolu je nejvýše roven celkovému počtu hostů u zbývajících stolů. Pokud hostitel spojí dva stoly, u nichž sedí nejmenší počet hostů, není počet hostů u takto vzniklého stolu větší než počet hostů u zbývajících alespoň dvou stolů, a tedy hosty je možné v tomto případě přesadit. Z podmínek úlohy vyplývá, že v místnosti mohou být právě tři stoly. Pokud by u každého z nich například seděl stejný lichý počet hostů, nastane situace popsaná v zadání.

V místnosti jsou proto právě 3 stoly.

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Jakub Solovský* z GMK v Bílovci.

Neúplné řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Křivonožka* a *Pavel Trutman*, oba z GMK v Bílovci.

Úloha 166

Dvě shodné kružnice k a l se protínají v bodech A, B . Označme Y obraz libovolného bodu $X \notin \{A, B\}$ kružnice k v otočení se středem v bodě A , které převádí kružnici k na kružnici l . Dokažte, že přímka XY prochází bodem B .

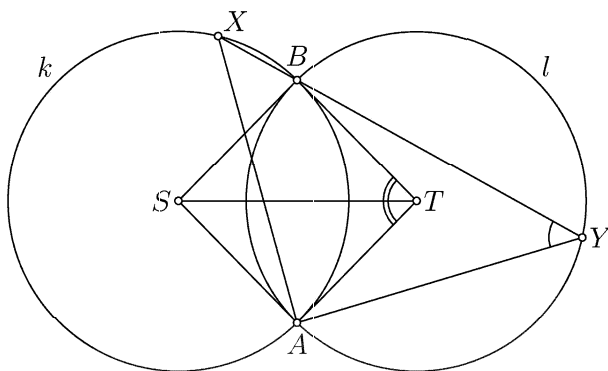
Pavel Leischner

Řešení: Označme S a T po řadě středy kružnic k a l . Bod T je obrazem bodu S v otočení se středem v bodě A , které převádí kružnici k na kružnici l .

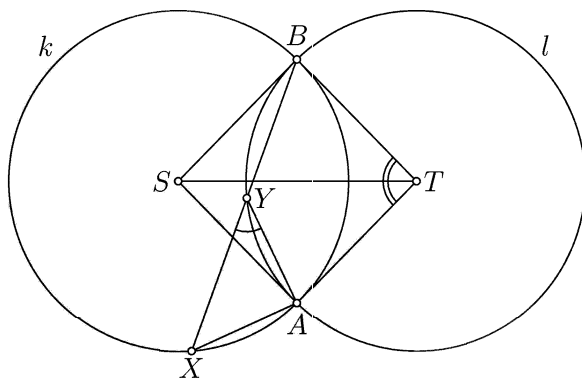
Trojúhelníky YAX a TAS jsou rovnoramenné a mají shodný vnitřní úhel při jejich hlavním vrcholu A . Jsou tedy podobné a úhly XYA a STA jsou shodné. Kružnice k a l jsou souměrně sdružené podle přímky ST , a proto je velikost úhlu BTA dvojnásobkem velikosti úhlu STA a tedy i dvojnásobkem velikosti úhlu XYA .

Pokud bod Y leží na oblouku AB kružnice l vně kružnice k (obr. 1), podle věty o obvodovém a středovém úhlu protíná přímka XY kružnici

l v takovém bodě $C \neq Y$, že velikost středového úhlu CTA je dvojnásobek velikosti úhlu XYA . Takový bod je jediný, bod B , proto přímka XY protíná kružnici l v bodě B .



Obr. 1



Obr. 2

Obdobně můžeme argumentovat, pokud bod Y leží na oblouku AB kružnice l uvnitř kružnice k (obr. 2).

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Petr Boroš* a *Jakub Solovský*, oba z GMK v Bílovci.

Pavel Calábek