

MATEMATIKA

Vizuální gramotnost jako složka kultury

FRANTIŠEK KUŘINA

Pedagogická fakulta UHK, Hradec Králové

1. Úvod

Komenského *Orbis pictus*, poprvé vydaný r. 1658 v Norimberku, můžeme patrně považovat za počátek pěstování vizuální kultury ve vzdělávání.



Boys play either a game of marbles¹ or they play bowls trying to throw the bowl² so as to hit the nine-pins³, or they guide a little ball through a ring⁴ with a stick⁵, or spin a top (cone)⁶ with a whip⁷, or shoot with a blow-tube or a crossbow⁸, or walk upon stilts⁹, or stamp their feet swinging on a merry-trotter¹⁰.

Мальчики обычно играют или глиняными шарами¹, или катая шар² на кегли³, или же с помощью дубинки⁴ они мечут через кольцо⁵, приводят во вращение кубарь⁶ посредством бича⁷, стреляют из полой тростинки⁸ или из лука⁹, ходят на ходулях¹⁰ или качаются на качелях¹¹.

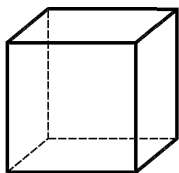
Obr. 1

V předmluvě k tomuto dílu autor píše: *Vzdělání bude jasné, a tím i pevné a trvalé, jestliže všechno, čemu vyučujeme a jsme vyučováni, nebude temné nebo zmatené, nýbrž zřetelné, přesné a účelové jak pět prstů na ruce. Hlavní věc při tom jest, předváděti správně smyslům věci vnímatelné tak, aby nebylo možno nepochopiti jich. Pravím a hlasitě opakuji, že tato zásada je základem všech ostatních. Neboť nemůžeme ani jednati ani mluvit moudře, jestliže dříve neporozumíme řádně všemu, co máme konati nebo o čem máme mluvit. V rozumu není nic, leč co bylo dříve ve smyslu. Pilně cvičiti smysly ve správném chápání rozdílů věcí znamená tedy tolik, jako klásti základy veškeré moudrosti, veškeré moudré výmluvnosti a všem moudrým úkonům životním. Hle zde je nová pomůcka pro školy: zobrazení a pojmenování všech hlavních věcí ve světě a všeho hlavního jednání v životě* ([1], s. 16).

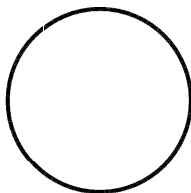
Doložme hned v úvodu, že obrazová forma sdělení nejen pomáhá pochopit věci, ale je i neobyčejně úspěšná.

Na obr. 1 je ukázka zpracování tématu *Hry dětské* z prvního vydání knihy *Orbis pictus*, s anglickým a ruským textem podle vydání z r. 1991 ([3], s. 149). Čtenář, který jako já, nezná anglické či ruské termíny např. pro *chůďy* a *houpačku*, se z obrázků snadno a rychle orientuje, patrně efektivněji, než z případného verbálního popisu.

Obraťme se konečně k matematice.



Obr. 2



Obr. 3

Je zcela samozřejmé, že ilustrace přinášejí obrazy věcí (chůď, houpačky, kuliček, ...), zmíněné věci na obrázcích nejsou. Podobně na obr. 2 a 3 jsou nakresleny krychle a kružnice, avšak tyto geometrické útvary na obrázku rovněž nejsou. I když ve škole říkáme *Narýsuj úsečku*, je výsledkem rýsování pouze hmotný obraz úsečky, ne však abstraktní geometrická úsečka sama. Tato skutečnost má pro pochopení charakteru matematických pojmů zásadní význam. *Petr Vopěnka* v této souvislosti píše: *Geometrie má před sebou list papíru pokreslený čarami rozmanitých tvarů, rovnými,*

i křivými, vzájemně propletenými a protínajícími se v různých bodech. Jeho zrak spočinul na obrázku, jeho pohled však pronikl skrze obrázek, ven z reálného světa do světa geometrického. Tak například za rovnou čarou uviděl geometrickou úsečku, uviděl ji v její úplné čistotě a spolu s ní uviděl dokonalou přímou. Od okamžiku tohoto prohlédnutí je pro něj navždy úsečka úsečkou geometrickou, a ne čarou narýsovanou podle pravítka.

Byly doby, kdy jsme geometrický svět neznali. Děti, které se dosud neučily geometrii, ho neznají. Učitel jim tento svět otevře. Jeho úkol je zdánlivě nesplnitelný, neboť ho nemůže ani ukázat, ani nenalezne dostatek slov, jimiž by ho popsal. Může tento svět pouze různě navozovat, například narýsovat čáry pomocí pravítka a kružítko a říci, že se kružnicím a přímkám podobají, avšak ukázat na nich může jen to, čím se jim nepochodají. Do geometrického světa můžeme někoho vést jen na kus cesty, můžeme ho přivést jen před jeho bránu, rozhodující krok však musí učinit každý sám . . .

A abychom mohli do geometrického světa nahlédnout, musíme k němu obrátit pozornost. Jednou z nejúčinnějších prostředků k usměrnění naší pozornosti jsou obrázky. Geometr rýsuje obrázky ne proto, aby je studoval, ale proto, aby skrze ně nahlížel do geometrického světa ([4], s. 16, 17).

Neverbální vyjadřování má ovšem význam i v dikci vědecké. I k tomu se Vopěnka vyslovuje: *Neuznávání obrázků a náčrtků za plnohodnotný způsob sdělování matematických poznatků, to je důsledné trvání na úplných slovních popisech sdělovaných poznatků, výrazně umrtvuje dynamiku matematického poznávání ([5], s. 569).*

Přínos k porozumění pojmům, odstranění jazykových bariér, přehlednost a bezprostřednost sdělení jsou snad hlavní výhody vizuálního vyjadřování, jímž se budeme v tomto článku zabývat.

Komenský se nerozpakuje vizuálně přiblížit formou jakýchsi alegorií či symbolů řadu „abstraktních“ pojmů, jako např. opatrnost, pilnost, lidskost, střidmost, . . . , v matematice mají obrázky charakter morfismů; jsou to zobrazení, která „respektují“ aspoň některé relace mezi zobrazovanými objekty, např. incidenci, uspořádání, . . .

2. Kultura a vizualizace

Aniž bych se snažil formulovat nějaké pseudodefinice, pokusím se popsat pojmové prostředí, v němž se nyní budeme pohybovat.

Latinské slovo „cultura“ – pěstování, vzdělávání – značí . . . to, co nevzniká přirozeně a samozřejmě, ale co vyžaduje péči a čeho si je třeba vážit jako nesamozřejmého vysvětluje Stanislav Komárek v knize Příroda

a kultura ([6], s. 235) a dále píše: *Kultura je pokračováním přírody jinými prostředky* ([6], s. 240). V kultuře mají nepochybně svůj význam i estetické zřetel. *Soulad účelu a estetické dokonalosti se pokládá za vrcholný výkon architektury, užitého umění; podobně jako se ladnost koně vnímá v kontextu jeho schopnosti běžet* ([9], s. 193). *Matematikovy vzorce, stejně jako vzorce malíře nebo básníka musí být krásné; ideje, jako barvy nebo slova, do sebe musí harmonicky zapadat. Krása je prvním předpokladem: ošklivá matematika nemá na světě trvalého místa* ([10], s. 78).

Základem vizuální kultury je *vizuální gramotnost*, která nám pomáhá *uvidět, na co se díváme a poznat to, co poznáváme* ([7], s. 19). Z pojetí kultury vyplývá nutnost vizuální gramotnost pěstovat, kultivovat. Pro vzdělávání je přitom mimořádně důležité, že *myšlení v pojmech vyvěrá z myšlení v obrazech postupnou abstrakcí a symbolizací* ([7], s. 8), základem vědění je vidění.

Univerzum obrazů (a imaginace) je dvourozměrné, je to univerzum ploch. Zaujímá ústřední místo v dimenzionální pyramidě, kterou obýváme. Tato pyramida je složena z pěti následujících úrovní:

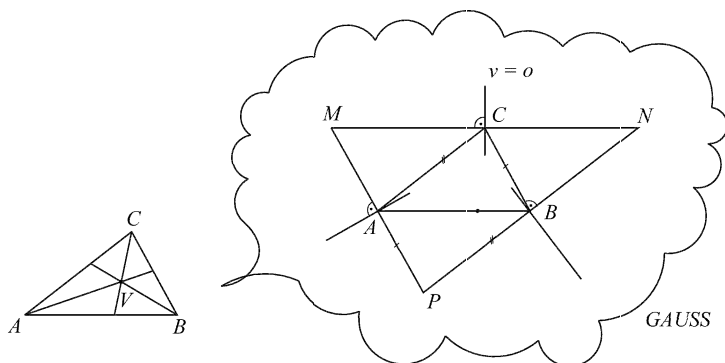
*nulrozměrná úroveň bodů, v níž počítáme
jednorozměrná úroveň pojmů, v níž diskursivně myslíme
dvojrůzměrná úroveň obrazů, v níž pracuje naše imaginace
trojrozměrná úroveň objemů, v níž manipulujeme
čtyřrozměrná úroveň časoprostoru, v níž se pohybuje.*

Univerzum obrazů je tudíž místem průchodu. Procházíme jím, postupujeme-li od počítání a myšlení k praxi. Tehdy imaginace slouží jako přechod od myšlení k činu ... A procházíme jím, sestupujeme-li od manipulace k myšlení ([11], s. 181).

Existují dva protikladné druhy obrazů. První druh znázorňuje scény z vnějšího nebo vnitřního světa tvůrce obrazu, druhý zviditelňuje abstraktní myšlení, například matematické proporce nebo struktury poznání. Prehistorickým příkladem prvního typu obrazu jsou jeskynní malby, prehistorickým příkladem druhého jsou mezopotámské desky s kresbami projektů pro zavodňování řek. Oba druhy jsou protikladné, protože první abstrahuje (je výsledkem návratu) a druhý se do světa promítá (konkretizuje abstrakci). Zjednodušeně řečeno, první druh je „znázorněním“ (Abbild), druhý „modelem“ (Vorbild) ([11], s. 159).

K problematice vizualizace se ovšem můžeme dostat i z jiných pozic. Švýcarský biolog *Adolf Portmann* (1897 – 1982) a náš *Stanislav Komárek*

zdůrazňují, že *nejdůležitějšími znaky živého jsou vztahování se ke světu prostřednictvím niternosti a sebereprezentace svým zjevem* ([8], s. 53), přičemž *mezi niterností a zjevem organismu panuje velmi úzký vztah, mohou se vzájemně ovlivňovat* ([19], s. 156).



Obr. 4

Dovolím si zde formulovat jistou paralelu s matematikou. Obrázek v matematice je jev (paralela zjevu v biologii), který je přístupný našim smyslům, zejména zraku, a niternost pak je matematická podstata, která s tímto jevem souvisí. Např. na obr. 4 vidíme, že výšky nakresleného trojúhelníku procházejí jedním bodem, „niterný“ důvod této skutečnosti tkví v důkazu, např. podle známé myšlenky Gaussovy.

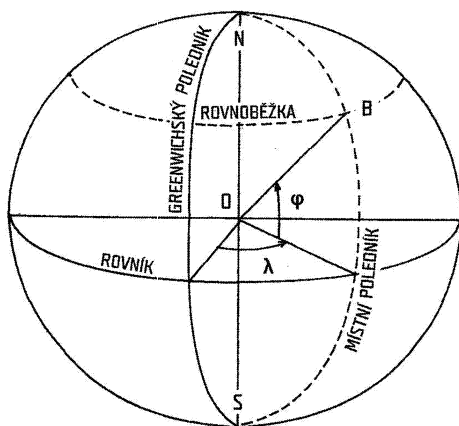
Skutečnost, že obrázek navozuje poznání hlubších vztahů, že obrázek poukazuje na „niternost“ zobrazovaného jevu, je neobyčejně podnětná. V posledních letech se uplatňuje tato idea např. v pracích amerického matematika *Rogera B. Nelsena* ([13], [14], [15]), v podobném duchu jsou psány články [16] a kniha [17].

Tyto názory podivuhodně souznějí s myšlenkami *Stanislava Komárka*. *Naše primární orientace ve světě je orientace vzhledem: kouknu a vidím. I podoby svých bližních poznáváme na této bázi, nikoli porovnáváním znaků, ať už všech se všemi jako počítač, nebo dichotomicky jako určovací klíč. Už z tohoto důvodu není jevová stránka světa zanedbatelná či méněcenná, ale představuje cosi pro lidskou (a samozřejmě i zvířecí) orientaci ve světě zcela bazálního a cenného* ([6], s. 94).

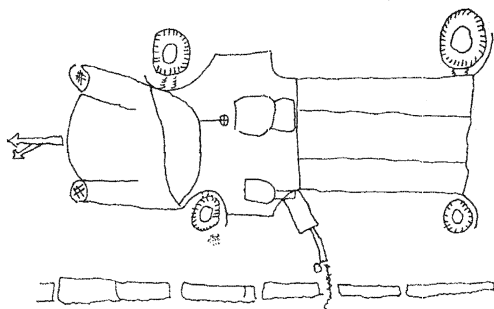
V podobném duchu se vyjádřil např. i polský publicista *Witold Gombrowicz*: *Vzezření je zrcadlem, v němž se zrcadlí nitro* ([18], s. 199).

3. Příběh několika obrázků

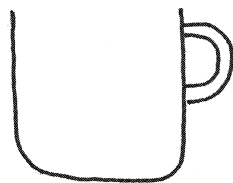
V publikaci [24] o dějinách zeměměřictví vydané r. 2007 je obrázek zeměkoule, který nelze považovat za průmět globu (obr. 5). Záměr autorů lze přirozeně pochopit: chtěli vyjádřit, že na globu se svislou osou rotace je severní pól nejvýše, jižní nejnižší a rovník se bude v názorném pohledu jevit jako elipsa. To je ovšem směřování dvou způsobů promítání, které by se snad v odborné publikaci nemělo vyskytovat. Přitom i dítě vytuší „princip“ třetí průmětny známé z deskriptivní geometrie a využívá ho. Dokumentujme to na obr. 6, který nakreslil šestiletý Jenda. Auto zobrazil v půdorysu, ale protože nebyla vidět kola, přidal ještě pohled z jednoho a druhého boku. Z obrázku není rovněž patrné, že výfuk má kruhový průřez. Autor tedy pohotově přidá další pohled. Takovýto tvůrčí přístup ke kreslení obrazů prostorových útvarů je nutno uvítat, dítě kreslí to, co o útvaru ví, ne to, co vidí z jednoho pohledu. Kreslí někdy dokonce i takový obrázek, který vůbec vidět nemůže, např. shora otevřený obrázek hrnku (obr. 7): hrnek by jinak nebyl „funkční“. To, co je přijatelné na dětské kresbě, bychom patrně neměli tolerovat na technickém výkresu nebo geometrickém obrázku. Takovéto obrazy musí být kresleny buď v jediném způsobu zobrazování, nebo může být použito způsobů více, musí to však být zřetelně vyznačeno. Osoba, která by neměla o autu žádnou představu, by byla z obr. 6 zcela zmatena.



Obr. 5



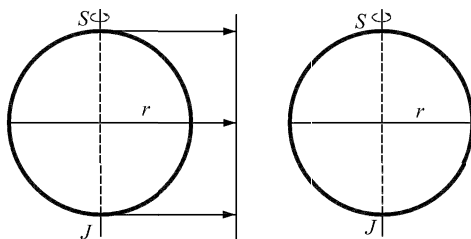
Obr. 6



Obr. 7

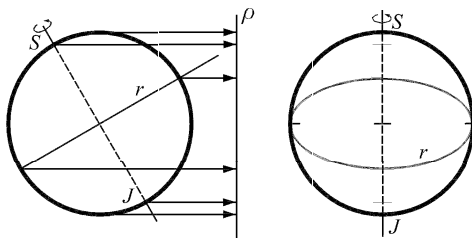
Připomeňme při této příležitosti známé výsledky o průmětu koule.

V pravoúhlém promítání je průmětem koule kruh. Je-li průmětna rovnoběžná s osou rotace globu (spojnicí severního a jižního pólu), je průmětem rovníku úsečka (obr. 8).



Obr. 8

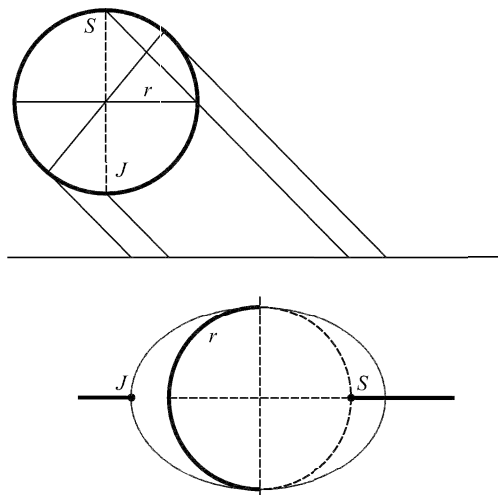
Není-li osa rotace globu rovnoběžná s průmětnou, je průmětem rovníku elipsa a průměty pólů leží uvnitř průmětu globu (obr. 9).



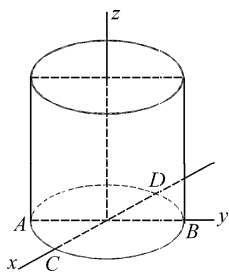
Obr. 9

Podle obr. 5 by osa rotace globu nebyla kolmá k rovině rovníku.

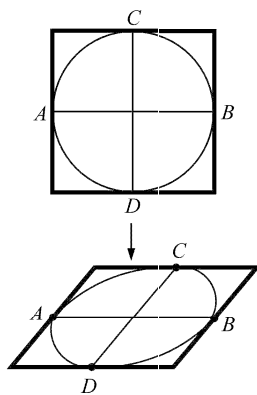
Kosoúhlým průmětem koule je, jak známo, elipsa. To si dokáží představit i děti (stín míče nebo kuličky je obvykle protáhlý) (obr. 10).



Obr. 10



Obr. 11



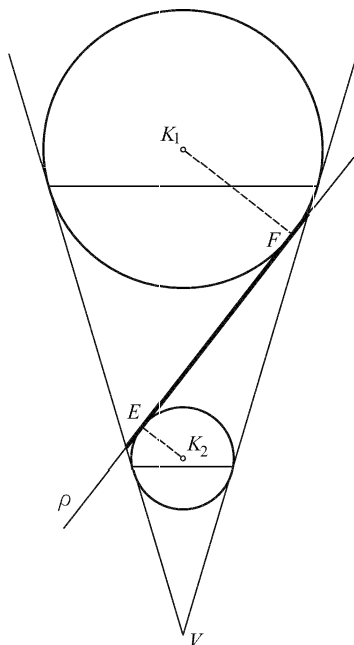
Obr. 12

Dost často se můžeme setkat s obr. 11, na němž má být zobrazen rotační válec v kartézské soustavě souřadnic. Tato ilustrace není správná,

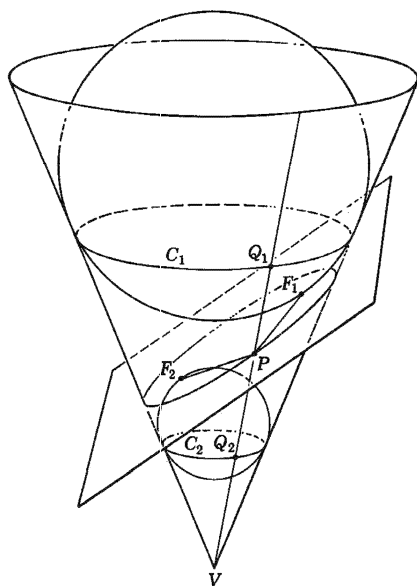
neboť čtverec opsaný kružnici se v rovnoběžném promítání zobrazí do rovnoběžníku opsaného elipse (průmětu kružnice) (obr. 12). Tečny v bodech A, B podstavy válce na obr. 11 mají tedy být rovnoběžné s přímkou x a ne s přímkou z . Průměty k sobě kolmých průměrů AB, CD kružnice na obr. 12 nejsou osy průmětu kružnice, ale pouze tzv. sdružené průměry. Osy elipsy lze sestavit *Rytzovou konstrukcí*, která je dokázána např. v knize ([20], s. 173).

Ve druhém století před naším letopočtem zavedl řecký matematik *Apolónios* kuželosečky jako rovinné řezy na rotační kuželové ploše, avšak teprve v 19. století odvodili belgičtí matematici *Quetelete* a *Dandeline* ohniskové vlastnosti těchto křivek. Příslušná věta o eliptickém řezu, jejíž důkaz lze nalézt např. v knize [17], zní takto:

Je dána rotační kuželová plocha a rovina ρ , která neprochází jejím vrcholem, není kolmá k ose kuželové plochy a protíná všechny její povrchové přímky. Vepíšme kuželové ploše plochu kulové, které se dotýkají roviny ρ v bodech E, F . Pak průnikem kuželové plochy s rovinou ρ je elipsa s ohnisky E, F .



Obr. 13

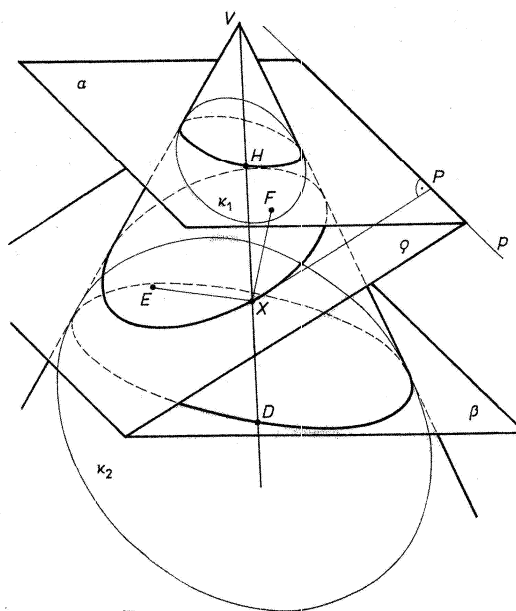


Obr. 14

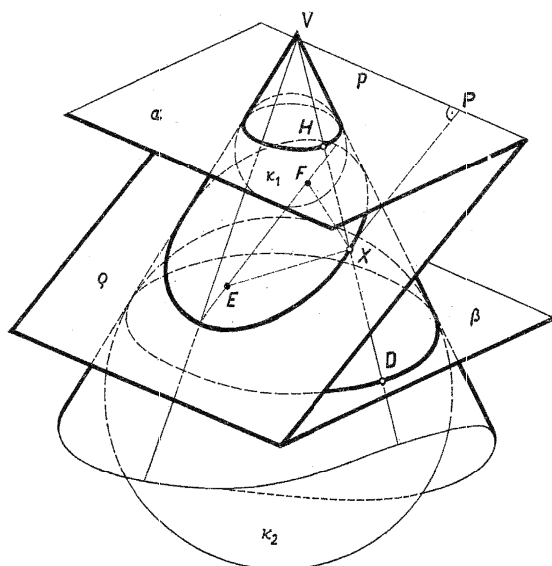
My si zde všimneme pouze obrázků sloužících k ilustraci jejího důkazu.

Nejjednodušší znázornění na obr. 13 je poněkud málo názorné, neboť elipsa řezu se zde zobrazí jako úsečka. Názornější obr. 14 je reprodukován z knihy ([21], s. 80), není však geometricky správný, neboť body dotyku kulových ploch s rovinou řezu, zde označené F_1 , F_2 , leží na obrysu kulových ploch, což ovšem znamená, že průmětem řezu má být úsečka, nikoliv elipsa. Ilustrace k mé knize *Umění vidět* kreslil zkušený deskriptivář Jiří Mikulčák, který zobrazil celou situaci v kosoúhlém promítání (obr. 15), v němž se kulové plochy zobrazí jako elipsy. Ačkoliv je tato ilustrace geometricky správná, dal jsem nakonec v knize přednost axonometrickému průmětu (obr. 16).

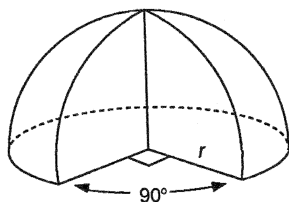
Několik příkladů, které jsme uvedli, dokládá nízkou vizuální gramotnost některých autorů, způsobenou patrně podceňováním zobrazovacích metod. Je zajímavé, že např. ani ve Spojených státech nevyužívají výpočetní techniku ke konstrukci geometricky správných ilustrací, což dokládají dvě nesprávné ilustrace z nedávno vydaných knih (obr. 17 z knihy ([22], s. 463) a obr. 18 z knihy ([23], s. 170).



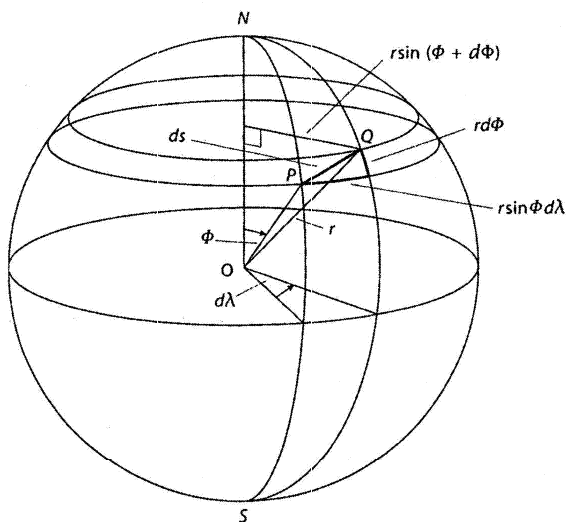
Obr. 15



Obr. 16



Obr. 17



Obr. 18

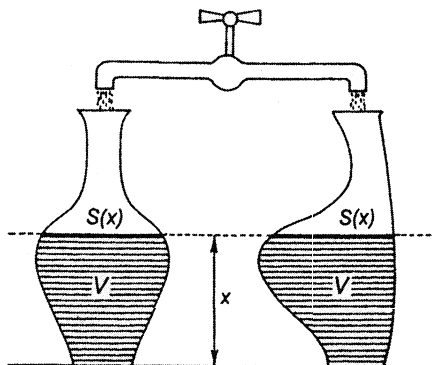
4. Cavalieriho princip

Na příkladu *Cavalieriho principu* chci dokumentovat, že

- geniální nápad opřený o názornou představu může téměř o 2000 let předběhnout dobu,
- obrazné pojetí má neobyčejnou váhu při prosazování nových myšlenek.

Připomeneme-li si aforismus *Nápad je jako sníh, musí napadnout* (Z. Tyc), chce se mi dodat a *jako sníh může i roztát, zmizet na dlouhý čas ze světa*.

Geniální nápad, který zde mám na mysli, pochází od řeckého matematika a fyzika *Archimeda ze Syrakus* (−287, −212) (obr. 19):



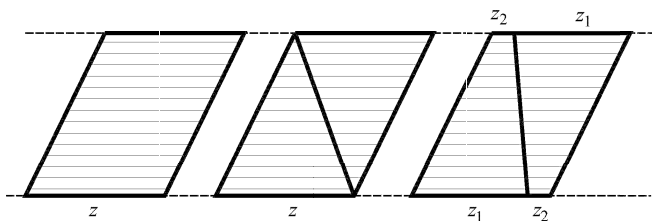
Obr. 19

Plníme-li dvě nádoby vodou a v každém okamžiku mají hladiny v obou nádobách stejně velký povrch, mají nádoby stejný objem (citováno podle knihy [25], s. 91).

To je názorná fyzikálně-geometrická formulace principu, který dnes nese jméno italského matematika *Bonaventury Cavalieriho* (1598 – 1647):

Existuje-li taková rovina, že každá rovina s ní rovnoběžná protíná dvě tělesa v útvarech téhož obsahu, mají tělesa sobě rovné objemy.

Tento princip se dnes studuje na střední škole (viz např. učebnici [2]) a je škoda, že se málokdy připomene jeho rovinná modifikace. Z obr. 20 je „vidět“ vzorce pro obsah rovnoběžníku, trojúhelníku i lichoběžníku.

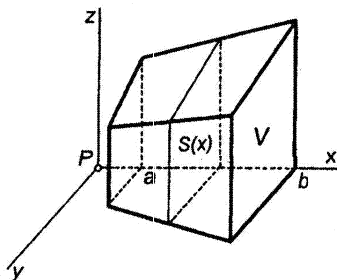


Obr. 20

Archimedovu formulaci Cavalieriho principu lze právem pokládat za vůdčí ideu výpočtu objemů (a obsahů) pomocí integrálního počtu:

Je-li obsah rovinného řezu tělesa umístěného v souřadnicovém systému podle obr. 21 spojitou funkcí $S(x)$ proměnné x v intervalu $\langle a, b \rangle$, pak pro objem tohoto tělesa platí

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$



Obr. 21

5. Závěry

Kultivace vizuální kultury je důležitý úkol všeobecně vzdělávací školy. Není-li reálně zařadit do učiva gymnázia deskriptivní geometrii, měly by být základy zobrazovacích metod a pěstování geometrické představivosti zařazeno do učiva matematiky. Např. americká učebnice [22] obsahuje 40 samostatných vstupů s tematikou *Improving Visual Thinking Skills*.

Literatura

- [1] *Komenský, J. A.*: Orbis pictus. Fr. Borový, Praha 1941.
- [2] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia. Stereometrie. Prométheus, Praha.
- [3] *Komenský, J. A.*: Orbis sensualium pictus. Trizonia, Praha 1991.
- [4] *Vopěnka, P.*: Rozpravy s geometrií. Panorama, Praha 1989.
- [5] *Vopěnka, P.*: Vyprávění o kráse novobaročské matematiky. Práh, Praha 2004.
- [6] *Komárek, S.*: Příroda a kultura. Academia, Praha 2008.
- [7] *Dondis, D. A.*: A Primer of Visual Literacy. MIT Press, Cambridge 1983.
- [8] *Kleisner, K.*: Biologie ve službách zjevu. Pavel Mervart, Červený Kostelec 2008.
- [9] *Čebanov, S. V.*: O stylu živých bytostí. In [8].
- [10] *Hardy, G. H.*: Obrana matematikova. Prostor, Praha 1998.
- [11] *Flusser, V.*: Moc obrazů. Publisher, Praha 1996.
- [12] *Portmann, A.*: Hodnocení zjevu organismů. In [8].
- [13] *Nelsen, R. B.*: Proofs without words. MAA, Washington 1993.
- [14] *Nelsen, R. B.*: Proofs without words II. MAA, Washington 2000.

- [15] *Alsina, C., Nelsen, R. B.*: Math made visual. MAA, Washington 2006.
- [16] *Kuřina, F.*: Matematika v obrazech 1, 2, 3, 4. Učitel matematiky, roč. 1997 – 1998.
- [17] *Kuřina, F.*: Umění vidět v matematice. SPN, Praha 1989.
- [18] *Gombrowicz, W.*: Bakalaj. Academia, Praha 2004.
- [19] *Stella, M.*: Domus a podoba. In [8].
- [20] *Kuřina, F.*: Deset geometrických transformací. Prometheus, Praha 2002.
- [21] *Ogilvy, C. S.*: Excursion in Geometry. Dover Publications, New York 1990.
- [22] *Serra, M.*: Discovering Geometry. Key Curriculum Press, Berkeley 1995.
- [23] *Maor, E.*: The Pythagorean Theorem. Princeton University Press, Princeton 2007.
- [24] *Maršíková, M., Maršík, Z.*: Dějiny zeměměřictví a pozemkových úprav v Čechách a na Moravě v kontextu světového vývoje. Libri, Praha 2007.
- [25] *Kordos, M.*: Wykłady z historii matematyki. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1994.

Příspěvek byl vypracován v rámci řešení grantu GAČR 406/08/0710.

59. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Jeníček s Mařenkou chodí k babičce, která má cukrárnu a prodává perníky. Oba dva jí samozřejmě pomáhají, hlavně se zdobením. Za dobu, kdy babička ozdobí pět perníků, ozdobí Mařenka tři a Jeníček dva. Při poslední návštěvě ozdobili všichni tři dohromady pět plných táců. Mařenka s babičkou zdobily po celou dobu, Jeníček kromě zdobení rovnal perníky po dvanácti na jeden táce a odnášel je do spíže. Všichni tři ve stejnou dobu začali i skončili.

1. Kolik perníků ozdobil Jeníček?
2. Jak dlouho jim celá práce trvala, když babička ozdobí jeden perníček za 4 minuty?
3. Jak dlouho pomáhal Jeníček zdobit?

M. Petrová

Z6–I–2

Čtyřmístný PIN kód Rostislavova mobilu je zajímavý:

- jednotlivé číslice tvoří prvočísla,
- 1. a 2. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslu,
- 2. a 3. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslu,
- 3. a 4. číslice v tomto pořadí vytvoří prvočíslu.

Rostislav zapomněl svůj PIN kód, ale pamatuje si všechny výše uvedené vlastnosti a snaží se zaktivovat vypnutý mobil.

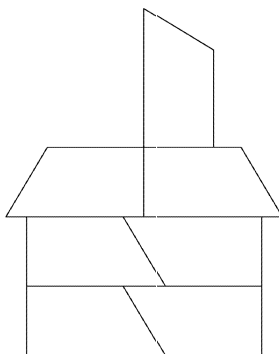
Která čísla by měl vyzkoušet?

M. Petrová

Z6–I–3

Na následujícím obrázku je útvar složený ze sedmi stejných čtyřúhelníkových dílků stavebnice.

Jaký je obvod tohoto útvaru, jestliže obvod jednoho čtyřúhelníkového dílku je 17 cm?



K. Pazourek

Z6–I–4

Tatínek se rozhodl, že bude dávat svému synovi Mojžírovi vždy jedenkrát za měsíc kapesné. První kapesné dostal Mojžír v lednu. Tatínek každý měsíc kapesné zvyšoval vždy o 4 Kč. Kdyby Mojžír neutrácel, měl by po dvanáctém kapesném před Vánocemi 900 Kč. Kolik Kč dostal Mojžír při prvním kapesném v lednu?

L. Hozová

Z6–I–5

Doplňte místo hvězdiček číslice tak, aby součet výsledků následujících dvou příkladů byl 5842:

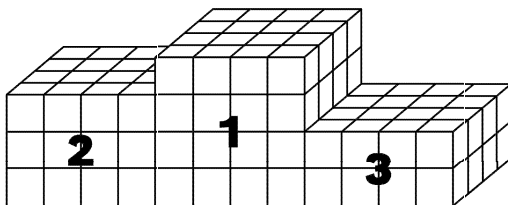
$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3*4* \\ \hline 4*00 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2*9* \\ -*2*4 \\ \hline *54* \end{array}$$

M. Dillingerová

Z6–I–6

Na školní olympiádu vytvořili žáci 6.B stupně vítězů z dřevěných krychlí, viz obrázek. Kolik krychlí celkem použili?

Sestavené stupně natřeli po celém povrchu (kromě podstavy) na bílo a po vyhlášení výsledků svůj výtvar rozebrali. Kolik krychlí mělo 6, kolik 5, 4, 3, 2, 1 či žádnou stěnu bílou?



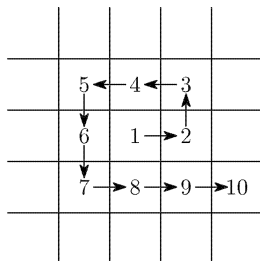
M. Dillingerová, M. Volfová

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Housenka Leona spadla doprostřed čtvercové sítě. Rozhodla se, že poleze „do spirály“ tak, jak je naznačeno na obrázku; na žádném čtverečku nebude dvakrát a žádný čtvereček nevynechá.

Z prvního čtverečku na druhý lezla směrem na východ, z druhého na třetí směrem na sever, ze třetího na čtvrtý směrem na západ, ze čtvrtého na pátý rovněž na západ, z pátého na šestý na jih ... Kterým směrem lezla z 81. na 82. čtvereček?



M. Petrová

Z5–I–2

Míša si z papíru vystřihla dva stejné čtverce, jeden obdélník o rozměrech 10 cm×24 cm a ještě jeden obdélník. Jaké rozměry mohl mít tento obdélník, pokud šlo ze všech čtyř útvarů složit čtverec, aniž by se jednotlivé díly překrývaly? Takových obdélníků lze nalézt několik, uveď alespoň čtyři.

L. Šimůnek

Z5–I–3

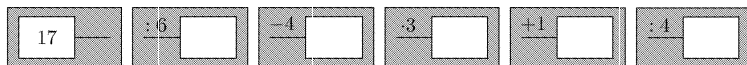
Vyřeš následující algebrogram a najdi všechna řešení. Stejná písmena nahraď stejnými číslicemi, různá různými.

$$\begin{array}{r}
 OSEL \\
 SEL \\
 EL \\
 L \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 3\ 4
 \end{array}$$

M. Volfová

Z5–I–4

Nina dostala od paní učitelky následující kartičky:



Má z nich všech sestavit příklad pro své spolužáky. Pomož Nině a sestav jeden takový příklad tak, aby každé dělení vyšlo beze zbytku. Jaký bude výsledek?

M. Petrová

Z5–I–5

Naše tři třídy, celkem 84 žáků, šly do kina. Lístek sice stál 50 Kč, ale každý 12. žák měl poloviční slevu a každý 35. vstup zdarma. Kolik stálo vstupné pro všechny žáky?

M. Volfová

Z5–I–6

Kluci našli starý plán minového pole (obrázek). Čísla jsou na polích, kde žádné miny nejsou, a udávají počet zaminovaných sousedících polí. Urči, kolik je v poli celkem min a kde jsou. (Pole sousedí tehdy, mají-li společný vrchol nebo stranu.)

1		2		2
	3		3	
3				3
	2			
			2	

M. Volfová

Zajímavé matematické úlohy

Otevíráme již 17. ročník naší pravidelné řešitelské rubriky „Zajímavé matematické úlohy“. V každém ročníku bylo dosud publikováno vždy deset úloh. V předchozích číslech našeho časopisu tak najdete již 160 zajímavých úloh. Upozorňujeme současně naše čtenáře, že kompletní soubor prvních 130 úloh této rubriky (včetně jejich úplných řešení) je možno nalézt v publikaci nakladatelství Prometheus „Sbírka netradičních matematických úloh“ autorů J. Švrčka a P. Calábka.

Řešení první dvojice úloh nového ročníku můžete zaslat nejpozději do 20. 10. 2009 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 161

Přirozené číslo n nazveme *pozoruhodným*, právě když existují nezáporná celá čísla x a y taková, že $n = 7x^2 + 287y^2$. Dokažte, že pro každé pozoruhodné číslo n jsou rovněž čísla $2009n$ a $2010n$ pozoruhodná.

Gottfried Perz (Graz)

Úloha 162

Nechť M je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC . Označme T_a , T_b , T_c po řadě středy stran BC , CA , AB . Vrcholy A , B , C vedme přímky rovnoběžné po řadě s přímkami MT_a , MT_b , MT_c . Rozhodněte, zda tyto přímky procházejí jedním společným bodem. Svou odpověď zdůvodněte.

Jaroslav Švrček

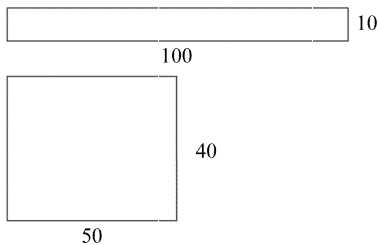
Lidé byli při rozdělování půdy klamáni odjakživa

Talmud, obsáhlý hebrejský soubor diskusí, výkladů a komentářů občanského a kanonického práva, obsahuje příběh, jak byla na jednu hlavu židovské komunity v Babylonii uvalena nebyvale tvrdá pokuta. Musel zaplnit pšenici sýpku o základně 40×40 čtverečních jednotek.

Postižený „podnikatel“ zašel pro radu za tehdy proslulým rabbim Hunou (asi 212–297 n. l.), hlavou surské akademie v babylonské říši. Učenec mu pravil: „Přesvědč je, aby od tebe vzali napřed pšenici na výměře 20×20 a po krátkém čase aby přijali druhou splátku rovněž 20×20 , a vyděláš polovinu.“ Samozřejmě, obsah čtverce o straně 40 jednotek je $40 \times 40 = 1600$ čtverečních jednotek, zatímco sečtený obsah dvou čtverců 20×20 činí pouze 800 jednotek.

Rabbi Huna zde využil ve starověku běžného omylu, totiž že obsah určité plochy závisí jen na jejím obvodu. Náš obrazek jednoduše ilustruje, jak může mít obrazec s menším obvodem mnohem větší obsah. Dlouhý obdélník má obvod

$2 \times (100 + 10) = 220$ jednotek a obsah $100 \times 10 = 1000$ čtverečních jednotek. Kratší obdélník má sice menší obvod, tj. $2 \times (50 + 40) = 180$ jednotek, avšak dvojnásobnou plochu $50 \times 40 = 2000$ čtverečních jednotek.



Historické prameny uvádějí, že ještě po řadu století i v období novověku bohatí lidé v některých oblastech podváděli svoje spoluobčany tak, že jim poskytovali zemědělskou či lesní půdu o větším obvodu, ale menším obsahu, než jaký si ponechali pro sebe. A jak jinak, navíc prý tento podvod ještě vydávali za projev vlastní štedrosti a velkorysosti.

Bohumil Tesařík