

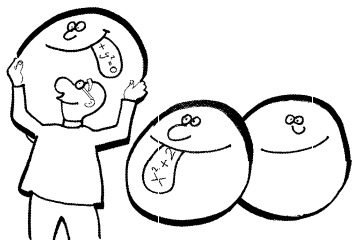
GeoGebra – více než dynamická geometrie

LUKÁŠ HONZÍK – MIROSLAV TICHÝ

Fakulta pedagogická ZČU v Plzni,

Střední škola aplikované kybernetiky Hradec Králové

Úvod



Pojem „dynamická geometrie“^{*)} bývá spojován především s programem „Cabri Geometry“ původně vyvinutým ve Francii v Institutu pro aplikace informatiky a matematiky (IMAG), výzkumném pracovišti Univerzity Josepha Fouriera v Grenoble. Mnoho škol základních i středních vlastní aspoň

jednu licenci pro učitele, mnohé z nich zakoupily multilicenci tak, aby tento program mohli používat i žáci.

V tomto článku chceme představit alternativu ke Cabri, program GeoGebra, a ukázat na jeho zajímavé algebraické vlastnosti, které v jiných prostředích dynamické geometrie nenajdete.

^{*)} Prostředí dynamické geometrie (DGE, dynamical geometry environment), aplikace sloužící k rychlému a přesnému rýsování geometrických figur podle zásad konstrukční geometrie. Obsahují nástroje pro pohyb, umožňují manipulaci s hotovou figurou, měří a výsledky výpočtů opět v konstrukcích používají. Představiteli jsou např. software Cabri [Laborde, 1994], Sketchpad [Jackiw, 1991], Cinderella [Richter-Gebert, 1999], Geonext [Bauch, 2003], Geogebra, Euklides, Cabri 3D [de Cotret, 2006]. (Vaníček [7])

GeoGebra

Autorem a prvním tvůrcem tohoto programu je Rakušan *Markus Hohenwarter*, který jej od počátku vyvíjí jako Open Source program v jazyku Java. Začal ho vyvíjet ještě jako student univerzity v Salzburku v roce 2001, později jako doktorand. Pracuje na něm dále i při svém působení na americké univerzitě, vývojový tým je dnes už pochopitelně širší. Program za dobu své existence získal řadu ocenění a grantů, které napomáhají jeho dalšímu vývoji.

GeoGebra je zajímavou alternativou komerčních programů i proto, že stále rostoucí komunita jejích příznivců vytváří celou řadu materiálů a aplikací pro různé oblasti školské matematiky. Má vlastní webové stránky <http://www.geogebra.org>, odkud je řada těchto materiálů dostupná, mnoho dalších stránek s příklady pro tento program vytváří na Internetu jeho další uživatelé.

Přednosti a nedostatky programu

Prostředí programu má, jak uvidíme, několik výhod. První výhodou ne nepodstatnou pro školské prostředí je jeho dostupnost. Jak bylo uvedeno výše, program je od počátku vyvíjen jako Open Source. Je tedy zdarma dostupný učitelům, žákům i jejich rodičům, komukoli, kdo má o program zájem.

GeoGebra má být, jak vyplývá už z jejího názvu, jakýmsi spojovníkem mezi programy dynamické geometrie a programy typu CAS (Computer Algebra System). Slučuje některé výhody obou typů programů, umožňuje využívat jak grafickou, tak i algebraickou reprezentaci geometrických objektů, kombinovat přístupy k nim, i když samotné algebraické matematické programy (Derive, Mathematica a další) přeci jen nemůže plnohodnotně nahradit.

Výhodné zvláště pro žáky je, že pokud máme zobrazeno algebraické i geometrické okno programu, vidíme jak analytický popis útvarů, se kterými pracujeme, tak i jejich geometrické umístění v rovině, vztahy mezi těmito útvary.

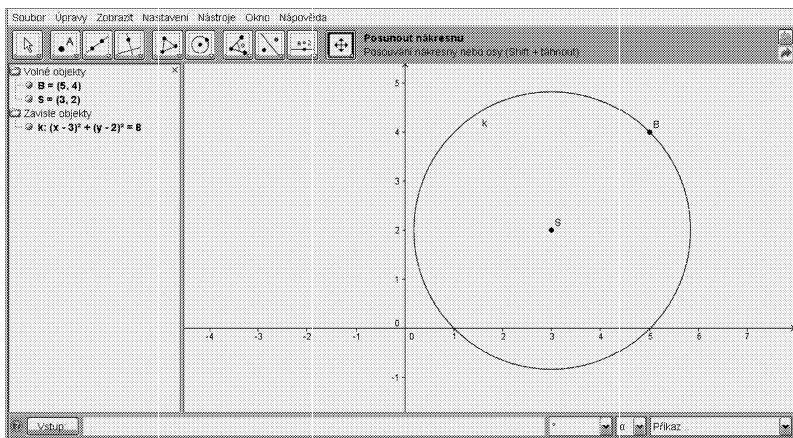
I přes nesporné výhody, které jsme zde vyjmenovali, má GeoGebra i několik nedostatků. Mezi ně můžeme zařadit například méně přesné vykreslování křivek, pomalost objevující se zvláště při větším množství objektů na nákrese či některé chybějící nástroje – kupříkladu nástroj dovolující uživateli uvést jeden nebo i více objektů do pohybu (známý v prostředí Cabri, kde je symbolizovaný „pružinkou“) zde neexistuje. Dalším nedo-

statkem je také nemožnost práce s polorovinami a jejich průniky nebo sjednoceními. Navíc se při práci s jedním souborem na více počítačích může objevit „zmizení“ některých objektů, tento problém se týká hlavně textových polí.

Ukázka prostředí programu

Nejprve ukážeme možnosti práce programem, jeho grafické prostředí. Standardně pracuje s dvěma okny – algebraickým a geometrickým. Ukážeme různé možnosti definování kružnice.

V geometrickém okně lze kružnici definovat pomocí nástroje pro vytvoření kružnice jejím středem a jedním bodem ležícím na jejím obvodu (obráz. 1).



Obr. 1 Kružnice sestavená dynamicky

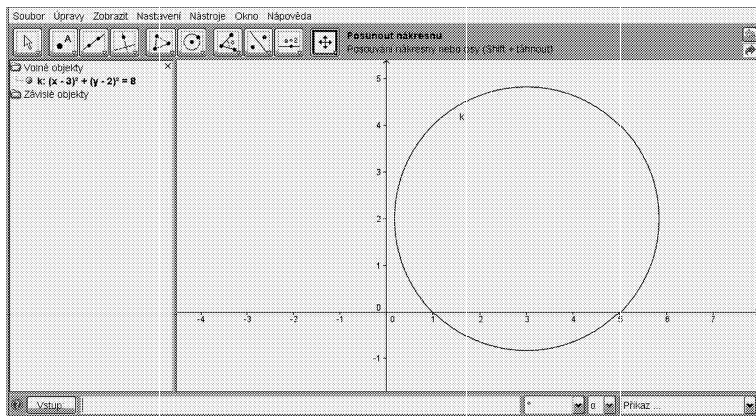
V algebraickém okně vidíme souřadnice bodů a rovnici vzniklé kružnice. Budeme-li pohybovat bodem S nebo bodem B , kružnice, její rovnice i souřadnice bodů se budou dynamicky měnit.

Budeme-li tutéž úlohu řešit algebraickým přístupem, zadáme rovnou v příkazovém řádku programu kružnici její rovnicí:

$$k: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 8.$$

U kružnice se tentokrát nezobrazí její střed (obráz. 2), ale je stále dynamická, tažením bodu na jejím obvodu se posouvá celá kružnice a pochopitelně se v algebraickém okně mění i její rovnice. Kružnici lze měnit

i poklepnáním na její rovnici, tu pak lze upravit a změny se ihned promítnou v geometrickém okně. Střed kružnice je možné získat i (zobrazit) příkazem $S = \text{Stred } [k]$ zadaným na příkazovém řádku programu.



Obr. 2 Kružnice sestrojená algebraicky

Třetím způsobem zadání, který kombinuje oba předešlé, je zadat kružnici takto:

$$S = (3, 2)$$

$$B = (5, 4)$$

k : Kružnice $[S, B]$

Příkaz lze pochopitelně zkrátit, nepotřebujeme-li uvedené body:

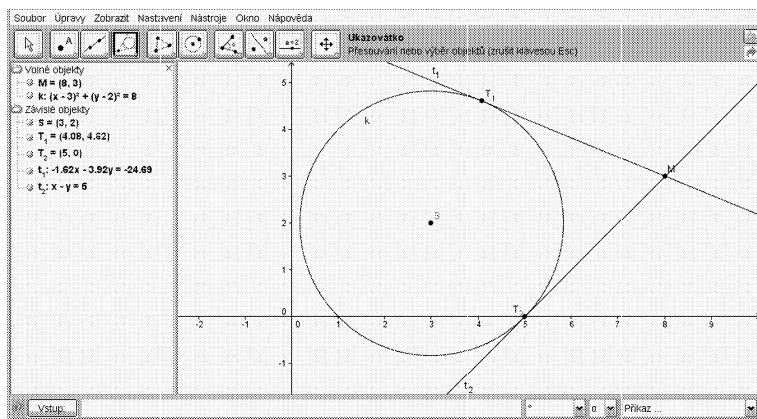
k : Kružnice $[(3, 2), (5, 4)]$.

Ať použijeme kteroukoliv z metod vzniku kružnice, vždy s ní lze snadno dále pracovat. Chceme-li sestavit např. tečny z vnějšího bodu, stačí použít tlačítko zvýrazněné na panelu nástrojů (obr. 3).

Vlastnosti programu GeoGebra

Nyní, po této krátké „ochutnávce“, se podívejme na základní vlastnosti tohoto programu.

- Program je lokalizován, lze v něm nastavit české menu i nápovědu. Klíčová slova příkazů jsou také lokalizována, nepoužíváme tedy např. „OsculatingCircle“, ale „OskulacniKruznice“.



Obr. 3 Kružnice a její tečny

- Při zápisu textů, vzorců, názvů proměnných a funkcí lze používat dolní i horní indexy. Zápis f_{11} zobrazí jako f_{11} , zatímco zápis x^3 zobrazí jako x^3 . To vede k lepší čitelnosti a srozumitelnosti funkčních předpisů. V textu je také povolena syntaxe vzorců jazyka LaTeX, což umožňuje vytvářet popisy včetně znaků pro sumu, integrál apod.
- GeoGebra je vzhledově podobná ostatním programům dynamické geometrie. Má podobnou strukturu menu, práci s (jediným) panelem nástrojů. Co je vzhledově odlišné a pro funkci a použití programu velmi podstatné, je algebraické okno, v němž se objevují souřadnice bodů, předpisy funkcí, hodnoty konstant a proměnných, rovnice křivek. Všechny zde uvedené objekty lze dále editovat, upravovat jejich vlastnosti, měnit barvu, typ čáry, možnosti zobrazení objektu, či nastavovat stopu objektů při jejich pohybu.
- Lze vytvářet vlastní makroinstrukce a doplňovat si tak další vlastní nástroje do panelu nástrojů.
- Objekty lze, pokud je to z jejich charakteru možné, zadávat jak geometricky, jejich vytvořením v geometrickém okně, tak i algebraicky, zápisem jejich rovnice do algebraického okna. Údaje v obou oknech se

neustále dynamicky ovlivňují. Máme-li např. dán bod F a přímkou d , můžeme příkazem **Parabola** [F , d] vytvořit parabolu určenou ohniskem F a řídící přímkou d . Parabola se ihned vykreslí v geometrickém okně a v algebraickém okně se objeví její rovnice. Kružnici lze zadat několika způsoby geometricky (např. středem a jedním bodem, třemi body apod.), lze ji zadat rovnicí ve středovém i obecném tvaru. Její rovnice se objeví v algebraickém okně vždy ve středovém tvaru.

- Pomocí posuvníků lze vytvářet animace, nastavit i velikost jejich kroku. Případně lze pomocí zaškrtávacích políček ovlivňovat zobrazení nebo skrytí vybraných objektů.
- Program umí pracovat s vektory, sčítat je, počítat jejich skalární součin.
- Kromě analytické geometrie umí GeoGebra i mnoho z matematické analýzy, má tak blízko k programům CAS. Umí počítat derivace, hledat primitivní funkce pro všechny běžné funkce. Jak derivace, tak neurčité integrály přitom hledá symbolicky, nikoliv numericky. U polynomických funkcí umí hledat jejich extrémy.
- Podstatnou vlastností prostředí programu je jednoduchost a intuitivnost jeho ovládání a práce s ním. Program se po krátkém seznámení líbí i žákům, slouží jim nejprve k snadnému a přesnému sestrojování grafů funkcí. Využijí ho při planimetrických konstrukcích, při výpočtech v analytické geometrii i v diferenciálním a integrálním počtu.
- Učitel i žák mají široké pole působnosti od vytváření a upravování vlastních dynamických geometrických figur^{*)} až po experimentování s již hotovými demonstračními příklady převzatými z Internetu.

Příklady

Na několika příkladech ukážeme možnosti programu GeoGebra. Nebudeme se až tolik zabývat běžnými příklady, které bývají řešeny klasickými programy pro dynamickou geometrii, ale zvolíme hlavně příklady, které ukážou specifické možnosti využívající jeho algebraických schopností.

Mezi jednoduché příklady, které zvládají i dynamické geometrické software, můžeme zařadit například požadavek nalezení kolmice k dané přímce procházející daným bodem.

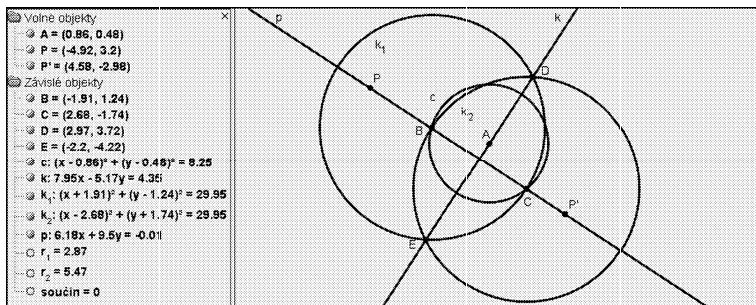
^{*)} Počítačová geometrická figura - množina objektů (geometrických obrazců, čísel, textových polí, ...) zobrazených na nákresně v programu dynamické geometrie mající na rozdíl od statického obrázku možnost dynamické změny vztahů mezi svými jednotlivými částmi.

Příklad 1 – Analytický důkaz kolmosti dvou sestrojených přímk

Zadání: Je dána přímka p a bod A , který na ní neleží. Euklidovsky zkonstruujte kolmici k přímce p , která prochází bodem A . Analyticky (výpočtem) dokažte, že dané dvě přímky jsou skutečně navzájem kolmé.

Řešení: Je zřejmé, že pro takto jednoduchou úlohu bude existovat nástroj dostupný v nabídce nástrojů. Navíc můžeme výhodně využít příkazový řádek, do něhož zadáme příkaz Kolmice $[A, p]$.

Úkolem je však zkonstruovat tuto kolmici euklidovsky, čímž je myšleno pomocí kružnic a přímek, ne jedním předpřipraveným příkazem. Můžeme tedy postupovat například tak, že sestrojíme kružnici c mající za střed bod A protínající přímku p ve dvou bodech (obr. 4). Zde musíme dát pozor, aby poloměr kružnice převyšoval vzdálenost $v(A, p)$, toho však jednoduše dosáhneme třeba zapsáním příkazu $r_1 = \text{Vzdálenost}[A, p] + 2$. Daná kružnice pak na přímce p vytvoří dva průsečíky (body B, C). Oba takto vzniklé body použijeme jako středy pro kružnice se shodným poloměrem (ten musí tentokrát být větší než polovina vzdálenosti $v(B, C)$, vezmeme tedy tuto vzdálenost $v(B, C)$ jako nový poloměr). Průsečíky vzniklých dvou kružnic již určují hledanou kolmici k .



Obr. 4 Euklidovsky zkonstruovaná kolmice k přímce

Posledním úkolem je analytické ověření, že sestrojená přímka k je opravdu kolmá k přímce p . Využijeme příkazu pro získání hodnot normálového (nebo směrového) vektoru přímek a provedeme jejich součin $\text{součin} = \text{NormalovyVektor}[p] * \text{NormalovyVektor}[k]$ (případně můžeme použít příkaz $\text{SmerovyVektor}[]$). Výsledek tohoto součinu vyjde 0 a jelikož skalární součin dvou libovolných nenulových vektorů je roven nule právě

tehdy, když jsou na sebe tyto vektory kolmé, je zřejmé, že získaná přímka k je skutečně kolmá na zadanou přímku p .

Nakonec ještě zmiňme možnost vnoření a řetězení příkazů vkládaných přes příkazový řádek, které je užitečné, chceme-li několik malých kroků vměstnat do kroku jediného. Například na počátku řešení nemusíme nejprve zavádět proměnnou r_1 , pak konstruovat kružnici c a nakonec zjišťovat její průsečíky s přímkou p . Toto vše můžeme zahrnout do jediného příkazu `Prusecik [Kruznice [A, Vzdalenost [A, p] + 2], p]`. Užijeme-li tento postup, zobrazí se pouze výsledný objekt (v tomto případě pouze průsečíky B a C), ne však objekty objevující se v mezikrocích (přijdeme tak o hodnotu r_1 i o kružnici c).

Je zřejmé, že obdobný přístup, kdy bychom zadali jeden složený příkaz a dostali rovnou pouze výsledek, se dá výhodně použít k řešení nejjednější úlohy, ale z hlediska přehlednosti a složitosti takového příkazu (dost často by se totiž jednalo o příkazy poměrně dlouhé a komplikované) je nutné zvážit případná pozitiva i negativa takového přístupu. Například v předchozí úloze šlo především o ukázkou euklidovské konstrukce, ne přímo o výslednou kolmici, kterou bychom dostali daleko jednodušším použitím již výše zmíněného příkazu `Kolmice [A, p]`.

(Pokračování)

Literatura

- [1] *Hohenwarter, M. – Preiner, J.*: GeoGebra Help 3.0 : Official Manual. 2007. 73 s. Dostupný z WWW: <<http://www.geogebra.org/help/docuen.pdf>>.
- [2] *Hohenwarter, M. – Hohenwarter, J.*: Introduction to GeoGebra. 2008. 69 s.
- [3] GeoGebra [online]. [2001–] [cit. 2008-11-02]. Dostupný z WWW: <<http://www.geogebra.org/cms/>>.
- [4] *Vošický, Z.*: Matematika v kostce pro střední školy (Fragment). Havlíčkův Brod 1999.
- [5] *Vejsada, F. – Talafofus, F.*: Sbíрка úloh z matematiky pro gymnázia. SPN, Praha 1969.
- [6] *Burjan, V. – Maxian, M. – Benešová, K.*: Opakování z matematiky pro třídy gymnázií se zaměřením na matematiku. SPN, Praha 1991.
- [7] *Vaníček, J.*: Počítačem podporovaná výuka geometrie (dizertační práce). Pedagogická fakulta UK, Praha 2001.
- [8] *Vaníček, J.*: Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie. 2009. V tisku.
- [9] *Edwards, J. A. – Jones, K.*: Linking Geometry and Algebra with Geogebra. Mathematics Teaching no. 194, 2006.

Prohledávání grafů do šířky: hledání kružnic s danými vlastnostmi

EVA MILKOVÁ

Katedra informatiky a managementu, Univerzita Hradec Králové

Řešíme-li úlohu na grafu a potřebujeme-li systematicky projít a zpracovat (provést požadované operace) všechny vrcholy (resp. hrany) daného grafu jeden po druhém tak, aby každý vrchol (resp. hrana) byl zpracován právě jednou, použijeme k tomu nějaký vhodný algoritmus prohledávání grafu. K těm nejznámějším a nejčastěji používaným algoritmům patří algoritmus prohledávání grafu do hloubky a algoritmus prohledávání grafu do šířky. Zmíněné algoritmy prohledávání lze dále vhodně modifikovat a získávat řešení různých problémů z oblasti teorie grafů. Použití algoritmů prohledávání je skutečně široké.

V článku *Modifikace algoritmů aneb od Jarníka k prohledávání* (viz [1]) jsme formulovali algoritmy prohledávání do hloubky a do šířky jako modifikace algoritmu *Vojtěcha Jarníka* na nalezení minimální kostry grafu, abychom zdůraznili, že při prohledávání do hloubky a do šířky podle takto formulovaných algoritmů tvoříme současně kostru grafu příslušnou danému prohledávání.

V tomto článku se podíváme detailněji na prohledávání grafu do šířky, na vlastnosti stromu prohledávání do šířky a z nich plynoucí tvrzení vhodných pro formulaci algoritmů týkajících se hledání kružnic s danými vlastnostmi.

Nejprve formulujme algoritmus prohledávání do šířky jako proces barvení vrcholů a hran.

Algoritmus prohledávání do šířky

Nechť je dán souvislý graf $G = (V, E)$ s n vrcholy a m hranami a nechť vrchol v je libovolný vrchol množiny V . Úkolem je systematicky zpracovat všechny vrcholy a hrany grafu G .

začátek

na počátku nechť je graf G neobarvený. Zpracuj vrchol v ,

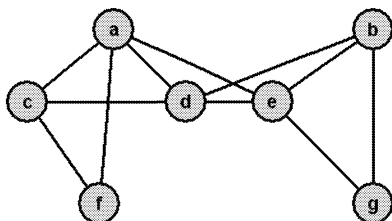
```

    obarvi jej modře (považujeme jej za modrý strom)
    a vlož do fronty FIFO.
dokud není FIFO prázdné opakuj
začátek
    x := vrchol ležící na prvním místě ve frontě FIFO;
    jestliže x je koncovým vrcholem neobarvené hrany {x,y} pak
        jestliže hrana {x,y} se dotýká modrého stromu (tj. y je
            neobarvený) pak
            začátek
                zpracuj vrchol y, obarvi jej modře a vlož do fronty
                    FIFO;
                zpracuj hranu {x,y} a obarvi ji modře;
            konec;
        jinak (tj. vrchol y je již obarven modře)
            zpracuj hranu {x,y} a obarvi ji červeně;
        jinak (tj. x není koncovým vrcholem žádné nezpracované
            (neobarvené) hrany)
            odeber x z fronty FIFO;
    konec;
konec.

```

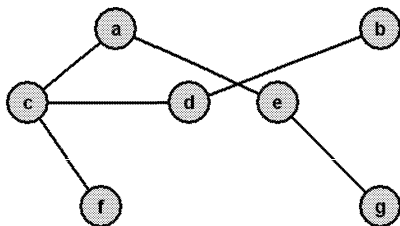
Poznámka: Hrana se dotýká modrého stromu, jestliže má jeden koncový vrchol v modrém stromu a druhý nikoli. Hran, které se dotýkají modrého stromu ve vrcholu x , může být více. V tom případě volbu hrany $\{x, y\}$ k obarvení modře (zařazení do modrého stromu) provedeme podle nějakého předem dohodnutého pravidla, např. lexikograficky (vzhledem k abecednímu pořadí vrcholů).

Ilustrujme uvedený algoritmus na grafu G v obr. 1.

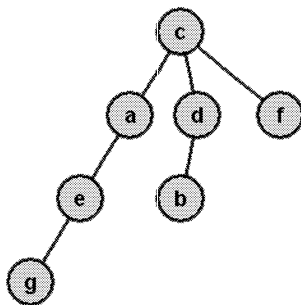


Obr. 1

Začneme-li prohledávání grafu G do šířky ve vrcholu c , budou vrcholy zpracovány v pořadí c, a, d, f, e, b, g , přičemž bude konstruována modrá kostra (obr. 2).



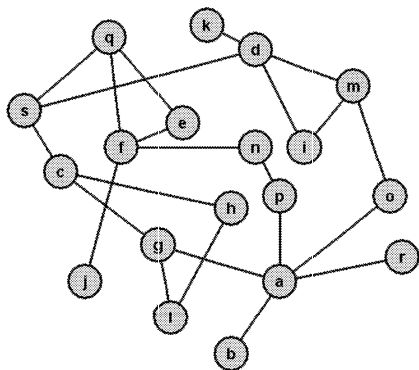
Obr. 2



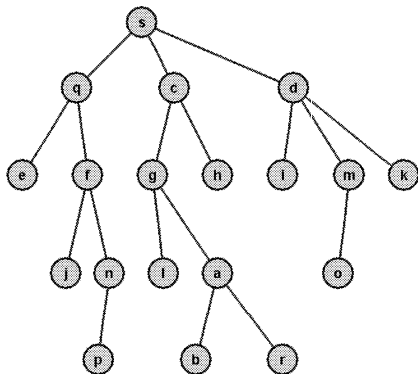
Obr. 3

a když ji zobrazíme (obr. 3) jako kořenový strom s kořenem c , dostaneme *strom prohledávání* do šířky příslušný prohledávání grafu G do šířky s počátkem prohledávání ve vrcholu c . Uvedené ilustrace shrňme do následující definice.

Definice: Necht' $G = (V, E)$ je souvislý graf, T jeho modrá kostra získaná algoritmem prohledávání grafu G do šířky se začátkem prohledávání ve vrcholu v . Kořenový strom (T, v) s kořenem ve vrcholu v nazýváme *strom prohledávání do šířky* příslušný prohledávání grafu G do šířky s počátkem prohledávání ve vrcholu v (dále jen stručně – strom prohledávání do šířky).



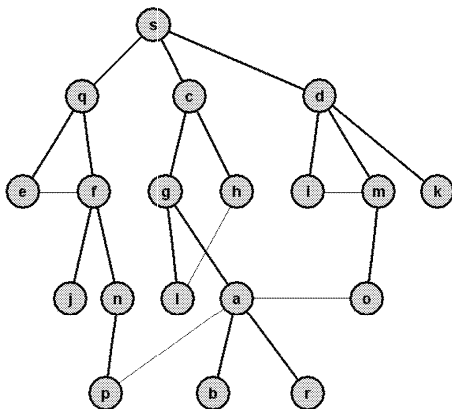
Obr. 4



Obr. 5

Uvažujme nyní následující rozsáhlejší graf na obrázku 4 a aplikujme na něj prohledávání do šířky s počátkem ve vrcholu s .

Jeho strom prohledávání do šířky (T, s) (jeden z možných) je na obr. 5 a po doplnění *červených* hran (vyznačených slabou čarou), které nepatří do stromu (T, s) , dostáváme původní graf z obr. 4 avšak ve tvaru zobrazeném na obr. 6.



Obr. 6

Věta (*vlastnost stromu prohledávání do šířky*): Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf, T jeho modrá kostra získaná algoritmem prohledávání vrcholů grafu G do šířky se začátkem prohledávání ve vrcholu v a (T, v) příslušný strom prohledávání do šířky. Pak *pro koncové vrcholy libovolné červené hrany grafu G platí, že tyto vrcholy leží ve stejné vrstvě nebo v sousedních vrstvách stromu (T, v) .*

Poznámka: sousedními vrstvami stromu (T, v) máme na mysli i -tou a $(i + 1)$ -ní vrstvu, $i \in \{0, 1, \dots, h - 1\}$, kde h je hloubka stromu (T, v) .

Důkaz: Nechť $\{x, y\}$ je libovolná neobarvená hrana grafu G a předpokládejme, že vrchol y byl zařazen do fronty (do kostry T) později než vrchol x (v opačném případě bychom postupovali analogicky). Nechť x leží ve vrstvě i , $i \in \{0, 1, \dots, h - 1\}$, stromu (T, v) . Je zřejmé, že vrcholy zařazené do T později než vrchol x leží ve vrstvě j , kde $j \geq i$, a vrcholy zařazené do T dříve než byl vrchol x odebrán z fronty leží zřejmě ve vrstvě j , kde $j \leq i + 1$. Dle předpokladu, a protože vrchol y je sousedním vrcholem

vrcholu x v grafu G , platí pro něj oba uvedené vztahy, tj. $i \leq j \leq i + 1$, což znamená, že vrchol y leží v i -té nebo $(i + 1)$ -ní vrstvě.

Podívejme se pozorně na obr. 6 a polohu červených hran sledujme jednak vzhledem k *vrstvám stromu* (T, s) a jednak vzhledem k *podstromům stromu* (T, s) určeným přímými následníky vrcholu s , tj. sledujme tři podstromy, podstrom s kořenem ve vrcholu q , podstrom s kořenem ve vrcholu c a podstrom s kořenem ve vrcholu d .

Co lze zjistit?

- 1) Při pohledu na jednotlivé vrstvy vidíme, že žádná červená hrana nemůže zkrátit cestu, která vede ve stromu prohledávání do šířky z kořene, tj. z vrcholu s , do nějakého vrcholu y daného grafu, to znamená, že délka nejkratší cesty mezi vrcholy s a y je rovna délce cesty mezi vrcholy s a y ve stromu prohledávání s kořenem s (cest nejkratší délky mezi vrcholy s a y může být více).
- 2) Dále vidíme, že hrana, která spojuje vrcholy ležící ve stejné vrstvě, určuje kružnici liché délky, což je důležitá informace pro určení, zda daný graf je nebo není bipartitní.

Poznámka: Kružnice délky k v grafu G je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_0)$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, $i = 1, \dots, k - 1$, $e_k = \{v_{k-1}, v_0\}$ a $v_i \neq v_j \forall i \neq j$.

Graf, jehož množinu vrcholů můžeme rozdělit do dvou množin V_1 a V_2 tak, že každá hrana grafu má jeden koncový vrchol v množině V_1 a druhý v množině V_2 , nazýváme bipartitním grafem. A platí věta: Graf G je bipartitní právě tehdy, když v grafu G neexistuje kružnice liché délky.

- 3) Při pohledu na jednotlivé podstromy stromu (T, s) získáme informaci, zda kořen s leží na nějaké kružnici, což při pohledu po vrstvách zjistit nelze. Vidíme, že díky hraně $\{p, a\}$ a též díky hraně $\{a, o\}$, které obě mají koncové vrcholy v různých podstromech, je zřejmé, že v daném grafu kružnice obsahující vrchol s existují, naopak u ostatních červených hran majících oba vrcholy v témže podstromu je vidět, že určují kružnice, které vrchol s neobsahují.
- 4) Spojíme-li v úvahách oba pohledy, pak je zřejmé, že z kružnic obsahujících vrchol s je kružnice (s, c, g, a, o, m, d, s) nejkratší možné délky. Je to dáno tím, že žádná hrana s vrcholy v různých podstromech, která by ležela v i -té vrstvě, kde $i < 3$, neexistuje, přičemž vrcholy hrany $\{a, o\}$

leží oba v 3. vrstvě, kdežto vrcholy hrany $\{p, a\}$ leží v sousedních vrstvách, 3. a 4. vrstvě, a tudíž hrana $\{p, a\}$ určuje kružnici o jednu hranu delší.

- 5) Obdobně můžeme zjistit, zda hrana incidentní s vrcholem s (tj. hrana obsahující vrchol s) leží na kružnici, a pokud ano, jaká je délka nejkratší takové kružnice. Tuto skutečnost však můžeme zjistit i jiným, jednodušším způsobem, který uvedeme v závěru tohoto článku.

Provedená pozorování shrňme do následujících čtyř tvrzení.

Tvrzení 1: Necht G je souvislý graf a (T, v) jeho kořenový strom prohledávání do šířky. Pak *délka nejkratší cesty z vrcholu v do vrcholu y v grafu G je rovna $h(y)$* , kde $h(y)$ značí číslo vrstvy, ve které leží vrchol y .

Poznámka: Nejkratší cestou z vrcholu x do vrcholu y rozumíme tu cestu mezi těmito vrcholy, která má minimální počet hran. Např. délka nejkratší cesty v grafu na obrázku 4 mezi vrcholy s a a je rovna 3 a jednou z takových nejkratších cest je cesta (s, c, g, a) ve stromu prohledávání do šířky na obrázku 5.

Tvrzení 2: Necht G je souvislý graf a (T, v) jeho kořenový strom prohledávání do šířky. Pak *graf G obsahuje kružnici liché délky právě tehdy, když v grafu G existuje červená hrana s koncovými vrcholy ležícími ve stejné vrstvě stromu (T, v) .*

Tvrzení 3: Necht G je souvislý graf a (T, v) jeho kořenový strom prohledávání do šířky. Pak *v grafu G existuje kružnice obsahující vrchol v právě tehdy, když v grafu G existuje červená hrana s koncovými vrcholy ležícími v různých podstromech stromu (T, v) .*

Tvrzení 4: Necht G je souvislý graf a (T, v) jeho kořenový strom prohledávání do šířky. Pak *v grafu G existuje kružnice obsahující hranu $\{v, w\}$ právě tehdy, když v grafu G existuje červená hrana, jejíž jeden koncový vrchol leží v podstromu s kořenem w a druhý v podstromu s kořenem z , kde z je přímý následník vrcholu v a $z \neq w$.*

Na základě vyslovených tvrzení lze již poměrně snadno popsat algoritmy na nalezení kružnice liché délky, nalezení nejkratší kružnice v grafu (tzv. obvodu grafu), zjištění, zda v grafu existuje kružnice obsahující daný vrchol (nalezení nejkratší takové kružnice), zjištění, zda v grafu existuje kružnice obsahující danou hranu (nalezení nejkratší takové kružnice), zjištění, zda

v grafu existuje kružnice liché délky obsahující daný vrchol. Uvedme pro představu alespoň některé z nich. Další algoritmy si jistě čtenář již dokáže na základě uvedených informací sestavit sám.

Ve všech dále popsaných algoritmech předpokládáme, že pracujeme se souvislým grafem.

1. Zjištění, zda v grafu existuje kružnice liché délky

V grafu vybereme libovolný vrchol v a provedeme z něj prohledávání do šířky, přičemž pro každý vrchol y si ukládáme informaci $h(y)$ (tj. číslo vrstvy, ve které vrchol y leží) a u červené hrany zjišťujeme, ve kterých vrstvách leží její koncové vrcholy. Jakmile v grafu najdeme červenou hranu, která má oba vrcholy v téže vrstvě stromu prohledávání do šířky s kořenem v , ukončíme činnost algoritmu se sdělením, že v grafu existuje kružnice liché délky. Pokud žádná červená hrana tuto vlastnost nemá, je zřejmé, že v grafu kružnice liché délky neexistuje (a tudíž daný graf je bipartitní).

2. Zjištění, zda se daný vrchol nachází na kružnici

Provedeme prohledávání do šířky, přičemž prohledávání začneme v zadaném vrcholu v , o kterém máme zjistit, zda leží nebo neleží na nějaké kružnici. Vrcholům, které sousedí s vrcholem v , přiřadíme postupně čísla $1, \dots, p$, kde p je počet těchto sousedních vrcholů, a považujeme je za kořeny podstromů ve stromu prohledávání do šířky s kořenem v . Pak u každého vrcholu y ukládáme číslo podstromu stejné, jako má jeho předchůdce. Pokud v grafu existuje červeně obarvená hrana, pro jejíž koncové vrcholy platí, že leží v různých podstromech stromu prohledávání do šířky s kořenem v , pak kružnice, do níž náleží vrchol v , existuje. V opačném případě nikoli.

3. Zjištění, zda daná hrana leží na kružnici

Postupujeme obdobně jako v předchozím případě. Nechť $\{x, y\}$ je zadaná hrana. Prohledávání vrcholů a hran do šířky začneme ve vrcholu x , a sledujeme, zda v grafu existuje červeně obarvená hrana, pro kterou platí, že jeden její vrchol leží v podstromu s kořenem y a druhý vrchol v nějakém jiném podstromu. Pokud taková hrana existuje, pak kružnice obsahující danou hranu $\{x, y\}$ existuje. V opačném případě nikoli.

Ve všech třech výše uvedených případech platí, že chceme-li navíc nalezené kružnice i vypsát, je nutno ukládat pro každý vrchol y též informaci o tom, který vrchol je jeho předchůdce ve stromu prohledávání do šířky.

Na závěr, jak jsme slíbili, popíšeme jiný způsob určení, zda daná hrana $\{x, y\}$ leží na kružnici a v případě, že ano, jaká je nejkratší taková kružnice.

Opět využijeme prohledávání do šířky a vlastností stromu prohledávání do šířky.

4. Zjištění, zda daná hrana $\{x, y\}$ leží na kružnici – jednodušší způsob

Z daného grafu G odebereme hranu $\{x, y\}$ a v grafu $G - \{x, y\}$ provedeme prohledávání do šířky z vrcholu x do vrcholu y . Pokud v grafu $G - \{x, y\}$ existuje cesta z x do y , pak jsme našli nejkratší cestu, která spolu s hranou $\{x, y\}$ tvoří hledanou kružnici nejkratší délky v grafu G .

Literatura

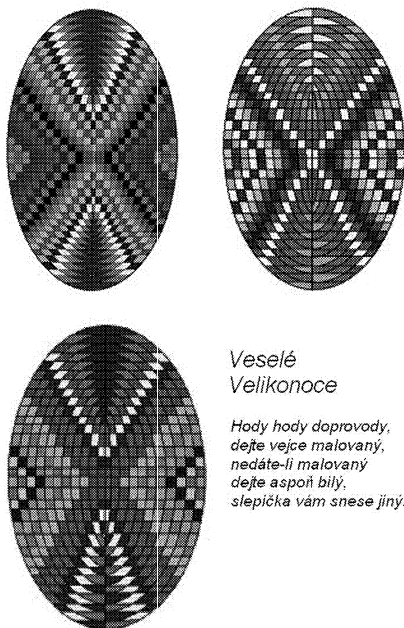
- [1] *Milková, E.*: Modifikace grafových algoritmů (od Jarníka k prohledávání). MFI r. 11 (2001/02), č. 6.

ZKUŠENOSTI

Zkušenosti z Hulína

Výtvarník *Mgr. Petr Stejskal*, učitel matematiky, informatiky a výtvarné výchovy na ZŠ v Hulíně, se nebojí posadit někdy své žáky při hodině výtvarné výchovy k počítači s tím, že mají realizovat nějaké výtvarné projekty. Žáci tak spojují svou výtvarnou fantazii s rozvíjením techniky práce na počítači. Tak třeba před velikonoce zdobili žáci kraslice a posílají nám do MFI tento pozdrav (originály jsou barevné):

Hulínská Základní škola se však může pochlubit i veřejným úspěchem. Mikroregion Jižní Haná vyhlásil v minulém roce soutěž na vytvoření návrhu na své logo. Cílem soutěže bylo zapojit mladou generaci do činnosti v mikroregionu, vybudovat v ní sounáležitost nejen ke své rodné



*Veselé
Velikonoce*

*Hody hody doprovody,
dejte vejce malovaný,
nedáte-li malovaný
dejte aspoň bílý,
slepička vám snese jiný.*

Obr. 1 Kraslice

obci či městu, ale i k ostatním členům svazku – okolnímu regionu. Hlavním smyslem bylo nalezení a zvýraznění prvků regionální identifikace, které by v jednoduchém grafickém vyjádření vytvářely logo svazku – Mikroregionu, a následně tímto logem propagovat Mikroregion jako celek mezi občany – veřejností.

Soutěže se zúčastnili žáci základních škol ze čtyř okolních obcí. Jejich úkolem bylo vytvořit jednoduché a srozumitelné logo s důrazem na vizuální složku, nápaditost a použitelnost. Logo mělo mít nejen dostatečnou informační hodnotu, ale i jeho vizuální podoba měla odpovídat současným moderním trendům. V hulínské ZŠ aktivizovala žáky k účasti v soutěži i výtvarnice *Mgr. Ilona Herodesová*.

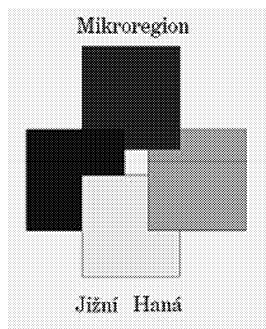
Sešlo se celkem 37 soutěžních návrhů, které hodnotila Rada svazku. Mikroregionu Jižní Haná a na prvních třech místech se umístili žáci pana učitele Stejskala. Uvádíme jejich obrázek v šedém provedení:



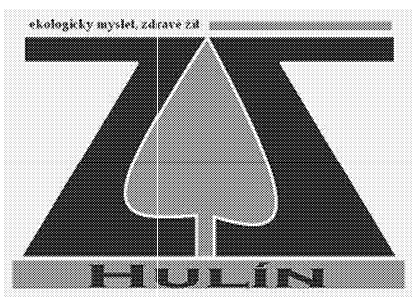
Obr. 2 První cena



Obr. 3 Druhá cena



Obr. 4 Třetí cena



Obr. 5 Logo ZŠ Hulín

Celkový vítěz soutěže *Michal Charvát* (nyní z 9. třídy) navíc zvítězil i v soutěži o logo školy (viz obr. 5).

A co je nového u vás ve škole?

Redakce

Z HISTORIE

Vzpomínka na českého vědce a statečného vlastence – profesora Františka Závíšku



František Závíška

Dnes je jen v úzkých odborných kruzích známo jméno zcela výjimečné osobnosti české vědy *univ. prof. PhDr. Františka Závíšky*, od jehož narození v roce 2009 uplynulo 130 let.

Pocházel z Moravy, kde se narodil ve Velkém Meziříčí 18. listopadu 1879 do nepříliš majetných poměrů. Po základní škole a gymnáziu (v Třebíči a Brně) začal v roce 1898 studovat na Filozofické fakultě české Karlo-Ferdinandovy univerzity v Praze matematiku a fyziku (i když rodiče by z něho bývali raději měli kněze). Po čtvrtém semestru studií (1910) odešel jako asistent svého oblíbeného učitele

prof. F. Kolářka na nově zřízenou českou vysokou školu technickou do Brna. Profesor se po roce vrátil zpět do Prahy, ale Závíška zůstal do konce škol. roku 1902/3, protože Kolářek pro něj neměl při stolici teoretické fyziky volné asistentské místo. Z Brna dokončil v roce 1903 univerzitní studia (obhajobou práce z fyzikální optiky) a nabyl učitelské způsobilosti vyučovat (jazykem českým) matematice a fyzice na vyšších gymnáziích.

V další kariéře však dal přednost nejspíše se rýsující vědecké dráze před existenčními jistotami povolání středoškolského profesora. Koncem roku 1903 se vrátil zpět do Prahy, ačkoliv žádosti o systematizované asistentské místo při stolici teoretické fyziky na pražské české univerzitě zůstávaly stále nevyslyšeny. Pomohl však profesor experimentální fyziky *Č. Strouhal*, který Závíškovi nabídl místo výpomocného asistenta v tamním Fyzikálním ústavu.

Za přetrvávajících provizorních poměrů se Závíška ve škol. roce 1906/7 vydal na zkušenou do zahraničí. Za místo studijního pobytu nakonec zvolil Cavendishovu laboratoř na Univerzitě v Cambridgi, kde se pod vedením čerstvého nositele Nobelovy ceny za fyziku profesora Sira *J. J. Thomsona* zabýval studiem kondenzačních poměrů ve Wilsonově mlžné komoře. Po návratu začal konat docentské přednášky (habilitoval se ještě před odjezdem) a počátkem roku 1908 byl konečně ustanoven asistentem. Po vážném onemocnění a posléze úmrtí prof. Kolářka (1913) byl Závíška pověřen suplováním výuky teoretické fyziky, v roce 1914 byl jmenován mimořádným a v roce 1919 řádným profesorem teoretické fyziky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy, kde byl ředitelem Ústavu pro teoretickou fyziku a ve škol. roce 1926/7 děkanem.

První vědecké práce F. Závíšky spadají do oblasti optiky. Zabývají se z experimentálního i teoretického hlediska totálním odrazem světla na anizotropních látkách, především dvousošých krystalech. Do oblasti optiky přísluší i Závíškova práce o odrazu světla na kovech (1931), dílčí charakter mají jeho práce o vlivu rentgenového záření na kondenzaci vodních par ve Wilsonově mlžné komoře (1909), o Hallově jevu (1912) a dvě z hydrodynamiky o obtékání válců viskózní kapalinou (1929). Stěžejní skupina celkem devíti Závíškových prací z let 1912 až 1939 pojednává o problematice vlnovodů: na základě Maxwellových rovnic řešil problém šíření elektromagnetických vln v prostoru s vodivými, resp. nevodivými válci, trubicemi či jejich kombinacemi. Ačkoli dosáhl řady původních výsledků, jeho publikace, a tím i zásluhy, ve své době zapadly – při publikaci převážně v českých periodikách – a unikly pozornosti světové veřejnosti. Znovuobjeveny a experimentálně potvrzeny byly až později, s rozvojem techniky velmi krátkých elektromagnetických vln.

V letech 1901 až 1914 spolupracoval na vydávání Přehledů pokroku fyziky v publikacích České akademie věd a umění, které upozorňovaly českou fyzikální obec na problémy současné fyziky. Zájem širší odborné veřejnosti upoutala Závíškova populární kniha *Einsteinův princip relativity a teorie gravitační* (1925) a obrana svého relativistického stanoviska proti některým svým kolegům, zejména profesorům *V. Posejpalovi* (tvůrci modelu světového éteru) a *B. Hostinskému*. Roku 1933 vyšla Závíškova učebnice *Mechanika* a roku 1943 *Thermodynamika*. V roce 1951 vydal *prof. M. Brdička* v Přírodovědeckém nakladatelství z pozůstalosti jeho Kinetickou teorii plynů.

Závíška během svého pedagogického působení na Přírodovědecké fakultě zařa-

zoval do fyzikálních přednášek moderní partie – teorii relativity, kvantovou mechaniku, kinetickou teorii plynů aj. Mezi jeho nejznámější žáky patřili např. fyzikální chemik a objevitel polarografické analytické metody *J. Heyrovský* a cukrovarnický odborník, ředitel VÚ cukrovarnického a generální ředitel Masarykovy akademie práce *K. Šandera*.

Stal se řádným členem českých vědeckých společností (České akademie věd a umění, Královské české společnosti nauk), působil jako redaktor Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky a činovník Jednoty českých matematiků a fyziků. Měl také plno soukromých zájmů – byl vášnivý automobilista, rád fotografoval, pěstoval s manželkou a kolegy pěší turistiku, miloval jízdu na kole, tenis, plavání aj.

Počátek druhé světové války zastihnul profesora Závíšku na prahu šestého desetiletí života: oslava jeho narozenin se však již odehrávala v ponuré atmosféře obsazování našich vysokých škol německými okupanty. Přes svoje mezinárodně uznávané vědecké renomé byl vzhledem k dlouhodobě nezastíranému negativnímu postoji k okupantům a pro podezření z účasti v odboji 21. ledna 1944 zatčen gestapem, vězněn nejdříve v Praze a v Kounicových kolejích v Brně, a posléze transportován do koncentračních táborů Mauthausen a Osterode-Harz. Zemřel na samém sklonku války vysílen úplavicí, několik dní po osvobození 17. dubna 1945 v Gifhornu u Braunschweigu. Tak zůstává pouze vzpomínka na zbytečně zmařený život a předčasně ukončené dílo statečného vlastence, významného vědce a vysokoškolského učitele, který pomáhal budovat mezinárodní věhlas české fyziky v první polovině minulého století.

Bohumil Tesařík

ZPRÁVY

Praemium Bohemiae 2008 – 2009 studentům



Dne 4. prosince 2009 byly v divadle státního zámku Sychrov uděleny studentům prestižní ceny PRAEMIUM BOHEMIAE. Jak byli čtenáři našeho časopisu informováni v minulých ročnících, ceny uděluje *Nadace Bohuslava Jana Horáčka Českému národu* z úroků finančních prostředků, které pocházejí z celoživotního podnikání jejího zakladatele, mecenáše Bohuslava Jana Horáčka. Ceny se udělují v den výročí narození mecenáše – na letošní rok připadly 85. První ceny PRAEMIUM BOHEMIAE byly uděleny v roce 2001 ještě za účasti zakladatele. V loňském roce ceny nemohly být z procesních důvodů uděleny, neboť vrcholilo dědické řízení po smrti donátora v roce 2002, a to arbitrážním soudem v Londýně. Nadace se rozhodla letos ceny udělit rovněž zpětně, a proto byly ceny uděleny za roky 2008 a 2009.

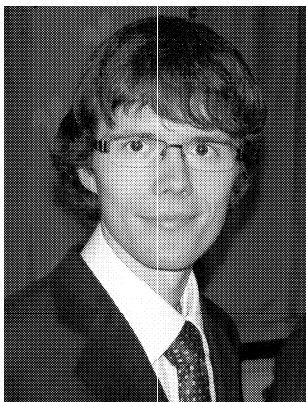
V úvodu slavnosti promluvili ke studentům, jejich rodičům a učitelům a ostatním hostům předseda Nadace *Mgr. František Horáček* a představitelé vědy v České

republice: předsedkyně Učené společnosti ČR *prof. RNDr. Helena Ilnerová, DrSc.*, místopředseda této společnosti *RNDr. Jiří Grygar, CSc.*, předseda Rady vědeckých společností ČR *prof. MUDr. Ivo Hána, CSc.* a předseda JČMF *doc. RNDr. Štefan Zajac, CSc.* Světové přírodovědné olympiády ve fyzice, chemii, biologii, matematice a informatice a evropskou soutěž EUSO představil *prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc.* z Univerzity Hradec Králové. Kvalitní hudební program zajišťovali žáci ZUŠ v Turnově pod vedením *Mgr. Jaroslavy Nývltové*, která rovněž slavnost udílení cen řídila.

Kritériem pro udělení cen PRAEMIUM BOHEMIAE 2008 a 2009 studentům byly jejich medailové úspěchy na světových olympiádách v letech 2008 a 2009. Mezinárodní fyzikální olympiáda 2008, v pořadí již 39., se konala v Hanoji ve Vietnamu a účastnilo se jí 376 studentů z 81 států všech kontinentů. Našich 5 studentů dosáhlo vynikajícího úspěchu získáním 2 zlatých a 1 stříbrné medaile. Nejlepší náš soutěžní fyzik Dalimil Mazáč získal cenu PRAEMIUM BOHEMIAE již r. 2007, a to rovněž za zlatou medaili – tehdy v Íránu. V roce 2009 se konala v Mexiku, ve státě Yucatán, jubilejní 40. Mezinárodní fyzikální olympiáda, které se zúčastnilo 316 soutěžících z 68 států (menší počet států a soutěžících byl ovlivněn obavou z prasečí chřipky, kterou tam však nikdo z asi 600 účastníků nezemocněl). Našich 5 studentů dovezlo z Mexika 5 medailí: 2 stříbrné a 3 bronzové.

Chemie měla r. 2008 již 40. ročník mezinárodní olympiády; soutěž se konala v Maďarsku za účasti 261 studentů z 67 států, přičemž 4 čeští studenti vybojovali 3 medaile: 2 stříbrné a 1 bronzovou. Roku 2009 se v Cambridge ve Velké Británii konala 41. Mezinárodní chemická olympiáda. Naši 4 studenti tentokrát získali 4 me-

daile: 1 stříbrnou a 3 bronzové. **Biologie** měla r. 2008 v Indii 19. mezinárodní olympiádu, kterou hostilo město Mumbai. Olympiády se zúčastnilo 220 studentů z 55 států. Naši 4 reprezentanti přivezli 4 medaile: 3 stříbrné a 1 bronzovou. Jubilejní 20. ročník Mezinárodní biologické olympiády 2009 pořádalo Japonsko ve městě Tsukuba. Zúčastnilo se jí 221 soutěžících z 56 států a čeští 4 studenti opět přivezli 4 medaile: tentokrát 3 stříbrné a 1 bronzovou.



Nejúspěšnější český soutěžící Dalimil Mazáč (dvě zlaté medaile: na MFO v Íránu a v Vietnamu)

Nejstarší a nejrozsáhlejší mezinárodní olympiáda – **matematická** – měla v r. 2008 již 49. ročník. Konala se ve španělském Madridu za účasti 535 soutěžících z 97 států všech kontinentů. Šestičlenné české družstvo bylo úspěšné. Naši matematici přivezli 2 medaile: 1 stříbrnou a 1 bronzovou. Jubilejní 50. mezinárodní MO zorganizovalo Německo v Brémách. Zúčastnil se jí rekordní počet 565 soutěžících ze 104 zemí. Naši přivezli 3 medaile: 1 stříbrnou a 2 bronzové. Mezinárodní olympiáda v **informatice** měla roku 2008

20. ročník a hostil ji Egypt v Káhiře. Olympiády se zúčastnilo 283 soutěžících ze 78 států; 4 čeští reprezentanti přivezli 2 stříbrné medaile. 21. Mezinárodní olympiádu v informatice v r. 2009 mělo na starosti Bulharsko, které ji uspořádalo v Plovdivu. Zúčastnilo se jí 312 studentů z 82 zemí. Naši 4 studenti přivezli 3 medaile: 2 stříbrné a 1 bronzovou.

Roku 2009 Nadace udělila rovněž 3 mimořádné ceny PRAEMIUM BOHEMIAE, a to tříčlennému českému týmu za excelentní výkon, který v evropské soutěži EUSO dosáhl absolutního vítězství. Tato soutěž integrovaně zahrnuje fyziku, chemii a biologii a mohou se jí zúčastnit studenti do 17 let věku. Jeden ze dvou českých týmů v konkurenci 40 týmů z EU dosáhl r. 2009 v Madridu absolutního vítězství a získal zlaté medaile.

Cen PRAEMIUM BOHEMIAE v kategorii pro studenty bylo v roce 2009 uděleno celkem 36 v celkové výši 470 tisíc Kč (podle úspěchu – kovu medaile vybojované na soutěži – byly ceny 30 tisíc Kč za zlatou, 15 tisíc Kč za stříbrnou a 10 tisíc Kč za bronzovou medaili; mimořádné ceny byly 10 tisíc Kč). Oceněných studentů bylo méně, 31, protože tři vybojovali medaile jak v roce 2008, tak 2009 a dva se úspěšně zúčastnili dvou různých olympiád v témže roce. Kromě finanční ceny studenti dostali rovněž medaili Bohuslava Jana Horáčka (rovněž z kovu, který odpovídal získané medaili) a k tomu diplom. Nadace udělila od počátku v roce 2001 celkem 187 cen PRAEMIUM BOHEMIAE v kategorii pro studenty v celkové výši 3,5 milionů Kč. Cena PRAEMIUM BOHEMIAE v kategorii pro vědce v roce 2009 udělena nebyla.

Z uvedeného přehledu je zřejmé, že česká reprezentace na poli vědy je tradičně výrazně efektivnější než ve sportu, i když ji stát ve srovnání se sportem podporuje velmi málo a příprava a rozvoj těchto vý-

razných talentů, budoucích poslů vědy, se děje jenom na bázi dobrovolnosti jejich učitelů a organizátorů soutěží. O to větší dík patří Horáckově nadaci, která za tuto aktivitu materiálně oceňuje alespoň úspěšné studenty, kteří dělají dobré jméno České republiky ve světě.



Zlatý Jan Hermann při děkovném projevu

Laureáti cen Praemium Bohemiae 2008 – 2009 pro studenty v oborech fyzika, matematika a programování a za úspěch na EUSO:

- (1) *Dalimil Mazáček*, zlatá medaile na 39. Mezinárodní fyzikální olympiádě ve Vietnamu 2008. Absolvent Gymnázia J. Keplera v Praze, student University of Cambridge, Trinity College, Anglie.
- (2) *Jan Hermann*, zlatá medaile na 39. Mezinárodní fyzikální olympiádě ve Vietnamu 2008. Absolvent Gymnázia v Českém Krumlově, student Přírodovědecké fakulty a MFF Univerzity Karlovy.
- (3) *Lukáš Ledvina*, stříbrná medaile na 39. Mezinárodní fyzikální olympiádě ve Vietnamu 2008. Absolvent Prvního českého gymnázia v Karlových Varech, student MFF Univerzity Karlovy.
- (4) *Jan Humplík*, stříbrná medaile na 40. Mezinárodní fyzikální olympiádě v Mexiku 2009. Absolvent Prvního českého gymnázia v Karlových Varech, student MFF Univerzity Karlovy.
- (5) *Michal Koutný*, stříbrná medaile na 40. Mezinárodní fyzikální olympiádě v Mexiku 2009. Absolvent Gymnázia v Třebíči, student MFF Univerzity Karlovy.
- (6) *Miroslav Klímoš*, stříbrná medaile na 49. Mezinárodní matematické olympiádě ve Španělsku 2008 a stříbrná medaile na 20. Mezinárodní olympiádě v informatice v Egyptě 2008. Absolvent Gymnázia Mikuláše Koperníka v Bílovci, student Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně.
- (7) *Josef Tkadlec*, stříbrná medaile na 50. Mezinárodní matematické olympiádě v Německu 2009 a bronzová medaile na 49. Mezinárodní matematické olympiádě ve Španělsku 2008. Absolvent Gymnázia J. Keplera v Praze, student MFF Univerzity Karlovy.
- (8) *Roman Smrž*, stříbrná medaile na 20. Mezinárodní olympiádě v informatice v Egyptě 2008. Absolvent Gymnázia E. Krásnohorského v Praze, student MFF Univerzity Karlovy.
- (9) *David Kláška*, stříbrná medaile na 21. Mezinárodní olympiádě v informatice v Bulharsku 2009. Student Gymnázia, t.ř. Kpt. Jaroše v Brně.
- (10) *Richard Polma*, bronzová medaile na 40. Mezinárodní fyzikální olympiádě v Mexiku 2009. Absolvent Gymnázia Mladá Boleslav, student Lékařské fakulty Univerzity Karlovy v Hradci Králové.
- (11) *Jáchym Sýkora*, bronzová medaile na 40. Mezinárodní fyzikální olympiádě v Mexiku 2009. Student Gymnázia Ch. Dopplera v Praze.
- (12) *Petr Ryšavý*, bronzová medaile na 40. Mezinárodní fyzikální olympiádě v Mexi-

ku 2009. Student Gymnázia Jaroslava Heyrovského v Praze.

(13) *Jan Matějka*, bronzová medaile na 50. Mezinárodní matematické olympiádě v Německu 2009. Absolvent Gymnázia, Jírovцова ul. v Českých Budějovicích, student MFF Univerzity Karlovy.

(14) *Jan Vaňhara*, bronzová medaile na 50. Mezinárodní matematické olympiádě v Německu 2009. Absolvent Gymnázia v Holešově, student MFF Univerzity Karlovy.

(15) *Hynek Jemelík*, bronzová medaile na 21. Mezinárodní olympiádě v informatice v Bulharsku 2009. Student Gymnázia, tř. Kpt. Jaroše v Brně.

(16) *Vlastimil Dort*, bronzová medaile na

21. Mezinárodní olympiádě v informatice v Bulharsku 2009. Student Gymnázia, Špitálská ul. v Praze.

Mimořádné ceny PRAEMIUM BOHEMIAE 2009 za zisk zlaté medaile a poháru absolutního vítěze na EUSO 2009 ve Španělsku pro český tým ve složení:

(17) *Lenka Čurnová*, studentka Gymnázia, Jírovцова ul. v Českých Budějovicích.

(18) *Ondřej Hák*, student Gymnázia a SOŠPg v Hořicích v Podkrkonoší.

(19) *Tomáš Zeman*, student Gymnázia J. Keplera v Praze.

Bohumil Vybíral



Část studentů oceněných cenami PRAEMIUM BOHEMIAE v roce 2009