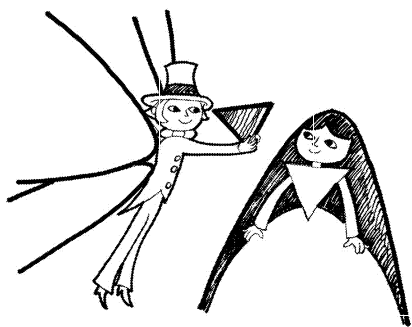


INFORMATIKA

Počítač, trojúhelník a kvadratická funkce

HELENA BINTEROVÁ – EDUARD FUCHS

Pedagogická fakulta JČU České Budějovice,
Přírodovědecká fakulta MU Brno



V práci dokumentujeme možné využití počítačů na základní škole – popisujeme propedeutiku pojmů *kvadratická funkce* a *parabola* s využitím Cabri geometrie. V sedmé třídě jsou v našich učebnicích tyto pojmy zavedeny intuitivně při výuce vlastností průsečíku výšek v trojúhelníku, v deváté třídě se tyto poznatky zužitkují při výuce vlastností

funkcí. Výsledky experimentu ukazují, že použití počítače se stává důležitým nástrojem při motivaci a výstavbě pojmů a při zkoumání matematických vztahů. Počítač tak může sloužit nejen jako demonstrační pomůcka a nástroj k usnadnění výpočtů, ale i k objevování a upevňování pojmů.

1. Úvod

Naše školství se systematicky proměňuje po „obsahové“ i „formální“ stránce. Nemáme nyní vůbec na mysli „reformní“ kampaňovitě změny, jimiž je naše školství periodicky postihováno, většinou bez systematické přípravy, bez zajištění řádného fungování a posléze nezaujatého vyhodnocení výsledků.

V tomto článku se nechceme zabývat ani „obsahovými“ změnami, které se zákonitě projevují v každém, nejenom v našem školském systému. Samozřejmě by bylo zajímavé provést důkladné vyhodnocení trendů, které zkušenější učitelé za své praxe sami pociťují, a zjistit, zda vypouštění některých tradičních učebních celků nebo jejich částí bylo vždy motivováno jejich neúměrnou náročností, „nadbytečností“ získávaných poznatků nebo jen ustoupily novým celkům či dokonce bylo jejich vyřazení pouhým projevem snižování úrovně vzdělání. Stejně tak u celků nově zařazovaných by stálo za rozbor, zda šlo o zdůvodněné kroky nebo jen o módní trendy, které časem odezní. Toto vše se samozřejmě netýká jen matematiky, ale všech školních předmětů.

Podstatným rysem proměny výuky, který máme zejména na mysli, je nástup nových forem, který klade větší důraz na aktivní zapojení žáků do procesu výuky. Důsledkem těchto postupných změn je – mimo jiné – částečný ústup od tzv. frontální výuky, která, jak alespoň doufáme, nemůže ze škol úplně vymizet, ztrácí však své naprosto dominantní postavení, které ještě před nějakou dobou měla.

Pasivní transmise (z pohledu žáka) vytváří poznatkový aparát, který umí žáci často reprodukovat, nejsou však schopni jej použít na řešení úloh (podrobněji a fundovaně o této problematice viz např. v [7]). Výuka by nejen v matematice měla probíhat na základě postupného vytváření jednotlivých pojmů a jejich zařazování do poznatkových struktur (o jejich utváření viz podrobněji např. v [9]), nikoliv formou předávání hotových poznatků a jejich „bezduchého“ algoritmizování.

Vyučující jsou však mnohdy stavěni do nelehké situace, neboť „klasické“ učebnice jsou převážně tvořeny pro frontální způsoby výuky a při tvorbě učebních pomůcek jsou vyučující téměř výhradně odkázáni na „samový-robu“.

Při psaní učebnic pro základní školy a nižší třídy víceletých gymnázií pro nakladatelství Fraus (viz např. [3] a [4]) jsme se proto cíleně snažili učitelům a zejména žákům předložit učebnice v duchu idejí, které považujeme za správné. Pokud bychom měli styl našich učebnic charakterizovat jednou větou, jevil by se jako nejvýstižnější známý citát G. Pólyi (1887-1985): *Nejlepší způsob, jak se něco naučit, je – objevit to.*

Pro žáky v učebnicích připravujeme řadu situací, při nichž dochází k postupnému vytváření pojmů a to zpravidla metodou objevování. Poznotek tak zůstává při správném postupu trvaleji uchován v paměti a žáci ho dokáží dobře zařadit do struktury svých znalostí.

2. Využití počítačů ve výuce

Jednou z věcí, které jsme museli systémově vyřešit, bylo využití počítačů ve výuce. Invaze počítačů do výuky je neoddiskutovatelnou skutečností, na niž musí školství reagovat. Současně si však musíme být vědomi, že obecně dosud nenastala situace, že by měl každý žák k dispozici počítač doma i ve škole a mohl jej používat v každodenní práci.

Od šesté třídy v hodinách geometrie zařazujeme práci s geometrickými programy. Pracujeme s geometrickým náčrtníkem Cabri II+, který je již součástí vybavení mnohých škol v České republice. Pro školy, které Cabri ve svém vybavení nemají, jsou alternativně využitelné volně dostupné geometrické náčrtníky Geonext a GeoGebra, které jsou na úrovni základní školy plnohodnotnou náhradou Cabri. Příklady, které mohou žáci řešit s pomocí počítače, jsou označeny symbolem a pokud je to možné, žáci příklady řeší společně s vyučujícím. Mohou je však samozřejmě řešit i samostatně nebo doma. Abychom předešli situacím, kdy se místo řešení geometrické problematiky věnuje pozornost žáků i učitele samotné konstrukci zadání, jsou v učebnici i v její elektronické verzi přichystané příklady tak, aby žáci mohli jen zkoumat daný problém. Žáci si takto již od šesté třídy zvykají na práci s počítačem.

Učebnice jsou však přitom koncipovány tak, aby počítač ve výuce sice byl pomocníkem, aby však žáci, kteří jej k dispozici nemají, nebyli zásadním způsobem znevýhodněni.

Využití počítačů ve výuce matematiky přitom v minulých letech prošlo složitým vývojem. Standardní je dnes jejich využití jako „demonstračních prostředků“, umožňující vizualizovat procesy, které při standardní výuce nelze „křídou na tabuli“ provádět. Řada i volně dostupných programů dnes vyučujícím poskytuje relativně širokou škálu takového využití.

Komplikovanější je využití počítačů při práci žáků samotných. Jak dosáhnout stavu, aby počítače pomohly žákům při porozumění probírané látce, aby umožnily odstranit zbytečnou náročnost výpočtů, konstrukcí apod., které mohou odvádět pozornost od skutečného porozumění problematice a přitom neodbourat nezbytné (a dnes často podceňované) „řemeslné dovednosti“, to vše se v odborné literatuře řešilo a řeší na nejrůznějších úrovních. Jmenujme za mnohé alespoň Kutzlerovu práci [10] nebo Healyho a Sutherlandovu práci [6].

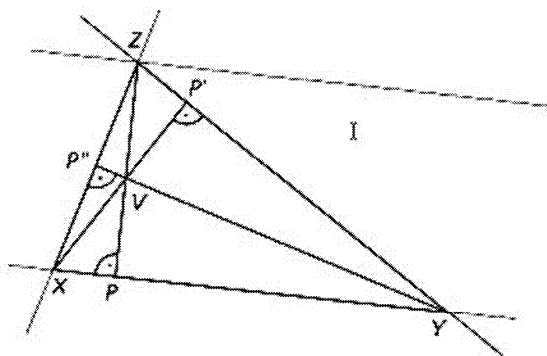
V poslední době se však pozornost začíná věnovat ještě sofistikovanějšímu využití počítačů: lze dosáhnout toho, aby počítače a informační technologie obecně umožnily žákům samostatné objevování a přispěly k rozvoji

jejich tvůrčí invence? A mohou počítače účinně pomoci při faktickém vytváření struktury poznatků? (O této problematice viz např. [1], [2] a [8].)

Jednu z možností, jak jsme počítač zapojili do postupného vytváření pojmů, nyní demonstrujeme na příkladu propedeutiky pojmu *kvadratická funkce a parabola*. Musíme však zdůraznit, že uváděný příklad není hlavní ani jedinou propedeutikou uvedených pojmů. Na druhé straně se však domníváme, že spojení kvadratických funkcí s geometrickou problematikou, která s nimi na první pohled vůbec nesouvisí, může být překvapivé a podnětné.

3. Výuka v 7. třídě

V učebnici geometrie pro 7. třídu po zavedení pojmů *výška* v trojúhelníku, *průsečík výšek* a po probrání základních vlastností uvádíme následující příklad (viz [3], str. 28): *Jakou společnou vlastnost mají úsečky ZP , XP' a YP'' ?* (Viz obr. 1)



Obr. 1

V této podobě jde o „klasický“ školský příklad, v němž žáci ověří, že dané úsečky jsou výšky a bod V je jejich průsečíkem. Příklad je doplněn o další úkol, který je obtížné řešitelný bez počítače, s jehož využitím však žáci získávají novou dynamickou představu o zavedených pojmech. Vytváříme tak předpoklady k pojmu kvadratická funkce.

Na počítači se podívejte, po jaké křivce se bude pohybovat bod V na obrázku, budeme-li pohybovat bodem Z po přímce rovnoběžné s přímkou XY . Co je bod V ? Zkuste odhadnout, jaký tvar bude křivka mít.

V interaktivní formě našich učebnic, které vycházejí prakticky současně s „papírovou“ verzí, je situace samozřejmě připravena. Pokud vyučující tuto interaktivní učebnici k dispozici nemá, je odkázán na to, že si situaci ve vhodném programu – např. v Cabri – připraví. Pokud neprovede ani to, ochudí tím žáky o vhled, který jim jinak těžko připraví.

V *Příručce učitele* [5], která je ke každému ročníku učebnic připravena, se vyučující dočte, jak lze situaci, kdy se daný bod pohybuje po parabole, využít, přestože žáci ještě neznají ani pojem parabola ani kvadratické funkce.

4. Výuka v 9. třídě

V 9. třídě se k popsané úloze vracíme. V připravené úloze se žáci jednak vracejí k vlastnostem trojúhelníků, při samostatné práci však současně mohou samostatně objevovat vlastnosti kvadratických funkcí. Při počítačovém experimentování s kvadratickou funkcí mohou – kromě jiného – pozorovat roli koeficientů i význam absolutního členu v obecném zápisu kvadratické funkce. Samozřejmě jde jen o jednu z podpůrných motivací k výuce kvadratických funkcí, na druhé straně však popisovaná geometrická souvislost může přispět k novému pohledu na problematiku.

Žáci dostanou následující zadání:

1. V některém geometrickém náčrtníku (např. Cabri II+) narýsuj vodorovnou přímku p a vyznač na ní úsečku AB . Narýsuj rovnoběžku q s přímkou p . Na přímce q zvol bod C . Sestroj trojúhelník ABC a narýsuj průsečík V jeho výšek. Pohybuj bodem C po přímce q a pozoruj, jakou křivku bude opisovat bod V . Použij nástroj Stopa **ano/ne**.

Pomocí tlačítka **Množina** s programem Cabri vykresli křivku, která pohyb bodu V při změně polohy bodu C naznačí. Zobraz osy a mřížové body v nákrese monitoru. Použitím tlačítek **Souřadnice** a **Rovnice** získáš rovnici, která popisuje pozorovanou křivku.

Pohybuj bodem C a popiš, jak se mění zápis rovnice křivky. Přemísti trojúhelník ABC v souřadnicovém systému tak, aby se ti podařilo rovnici co nejvíce zjednodušit. Jaký zápis je nejjednodušší a jaké poloze křivky odpovídá?

Možné varianty žákovského řešení jsou na obr. 2 a 3. Záleží samozřejmě na vyučujícím, jaké další poznatky z takto připravené situace vytěží, zda využije situaci k prohloubení dalších geometrických poznatků, k opakování základních vlastností funkcí, k připomenutí mezipředmětových vztahů (na-

kterou opisuje průsečík výšek? Jaký je její zápis rovnicí tentokrát? Změnil se tvar a poloha křivky? Je důležitá podmínka v zadání – přímka p je vodorovná? Jsou křivky grafy funkce? Zdůvodni.

Mohli bychom křivku popsat rovnicí tvaru $y = ax^2 + c$ nebo $y = ax^2 + bx + c$? Zdůvodněte.

Co ovlivňují hodnoty parametrů a , b , c ? Jak se mění tvar křivky při změně těchto parametrů?

Jak bys nazval příslušnou funkci, když vidíš, jaká rovnice ji popisuje? Víš, jak se nazývá křivka, kterou opisuje bod V ?

V učebnicích důsledně dbáme na to, aby žáci výsledky svých experimentů a pozorování nejprve samostatně formulovali. Učitelova role v této fázi výuky spočívá v tom, aby korigoval nesprávné závěry, případně pak nabízel další pohledy, v žádném případě by však žákům neměl „vnucovat“ definitivní poznatky ani nutit děti k rigoróznímu vyjadřování. Smyslem je, aby žáci opravdu samostatně dovedli výsledky svých pozorování shrnout a vystihnout podstatné závěry svých experimentů.

Tyto „žákovské“ popisy uvádíme pod heslem „*Co jsme objevili*“. Teprve v závěru pak učitel s žáky probere terminologii, kterou budou ve výuce nadále užívat. Tuto terminologii uvádíme ve „*Slovníčku*“.

Možný výstup naší úlohy by tedy mohl být následující

CO JSME OBJEVILI?

Průsečík výšek v trojúhelníku ABC opisuje při pohybu bodu C po rovnoběžce s úsečkou AB křivku, kterou můžeme popsat rovnicí $y = ax^2 + bx + c$. Taková rovnice se nazývá **kvadratická rovnice** a proto i funkci můžeme nazývat **kvadratická funkce**. Když bod C přesuneme do druhé poloroviny, změní se hodnota parametru a na opačnou. Zvětší-li se vzdálenost rovnoběžek, zvětší se hodnota parametru c a naopak. Změna velikosti úsečky AB se projeví změnou velikosti parametru a .

SLOVNÍČEK

Grafem **kvadratické funkce** $y = ax^2 + bx + c$ je křivka, které se říká **parabola**.

V popsané souvislosti se však musíme zmínit o zcela samostatném a odlišném problému. Do jaké míry „uvěříme“ tomu, že software nám sdělí, že

popisovaná křivka je parabolou a odpovídající funkce je kvadratická? Důkaz toho, že tomu tak opravdu je, přesahuje rámec tohoto článku. V obecné rovině je to však problém, který se objeví při jakémkoliv použití počítače či kalkulačky. V našich učebnicích ostatně častokrát upozorňujeme na omyly, které mohou vzniknout při nekritickém přejímání takových výsledků. S jistotou dávkou humoru o této problematice pojednává např. Trávníčkův článek [11].

5. Výsledky z vyučovacích hodin

V experimentální výuce, kterou jsme uskutečnili na základní škole, která je klinickým pracovištěm Pedagogické fakulty v Českých Budějovicích, jsme příklad zadali ve třídě patnáctiletých žáků. Ve třídě je 12 dívek a 9 chlapců. Vyučování v této třídě bychom mohli charakterizovat jako frontální s pokusem o problem solving. Učitelka zadala žákům úlohu a oni samostatně objevovali pod jejím citlivým vedením. Samostatnou práci střídala diskuse nad mezivýsledky, které žáci objevili a které postupně vedly k objevení vlastností kvadratické funkce a k jejímu zavedení.

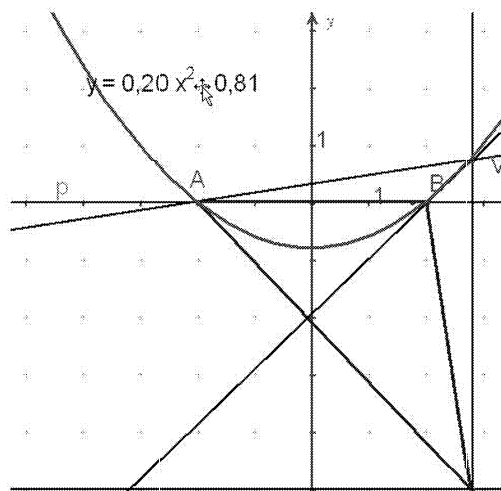
Studenti pracovali s interaktivní učebnicí a na vlastních počítačích kreslili požadované řešení v geometrickém náčrtníku Cabri II+. Přinášíme některá řešení studentů v pořadí, jež v hodině vedlo k diskusi a posléze k celkovému pochopení a vyřešení problému.

Úkol 1:

Martin: Nakreslil obrázek správně, umístil parabolu do souřadnicového systému, na otázku učitele, kde by ležely vrcholy A , B , kdyby parabola měla vrchol v počátku, však nemohl odpovědět. Martin zkoušel problém vyřešit, protože si však předem narýsoval přímku p na osu, zafixoval ji a už s ní nepohnul. Nemohl proto úlohu řešit dál a celé se mu to nechtělo kreslit znovu. Nedostal se tedy ani k řešení úkolu 2. (Viz obr. 4)

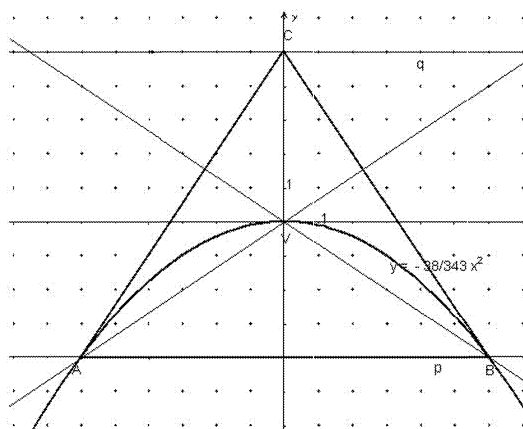
Úkol 2:

Hanka našla výsledek (obr. 5) snadněji, protože nevázala polohu přímky p . Druhou úlohu – úkol 2 vyřešila snadno jen tím, že v náčrtníku překloupila bod C do opačné poloroviny. Zajímavé bylo, že na toto řešení přišli jen 3 žáci (z toho 2 chlapci), ostatní překreslovali celou situaci znovu.



Obr. 4

Následující tabulka ukazuje úspěšnost při řešení jednotlivých úkolů a při vyslovení závěrů:



Obr. 5

	úkol číslo 1	úkol číslo 2	otázky na závěr
Počet žáků, kteří úkol řešili/ z toho dívek	18/11	15/9	11/8

Na otázku „*Mohli bychom křivku popsat rovnicí tvaru $y = ax^2 + bx + c$?*“ odpovídalo jedenáct z 21 žáků. Všichni odpověděli správně. Svá tvrzení opírali o zkušenosti získané prací v geometrickém náčrtníku spojenou s velkým množstvím představ o daném problému.

Na otázku „*Co ovlivňují hodnoty parametrů a , b , c ? Jak se mění tvar křivky při změně těchto parametrů?*“ odpovědělo všech 11 žáků správně, zbytek třídy, který se přes různé potíže (jako Martin) nedostal k výsledku, diskusi jen sledoval.

Na poslední otázku „*Nazvěte takovou křivku.*“ odpověděli pouze dva žáci. Lenka vymyslela název „Údolka a kopcovka“. Jirka vymyslel anglický název „Up and down“.

Závěr

Základní škola, ve které jsme uskutečnili náš experiment, má nadstandardní vybavení. Polovina učeben je vybavena interaktivní tabulí, která je i v učebně výpočetní techniky, kde probíhala naše výuka. Zároveň škola získala z Norského fondu 30 žakovských notebooků. Děti, na které se nedostal počítač školní, mohly pracovat na notebooku. Díky tomu mohl každý žák pracovat samostatně a příklady řešit vlastním tempem. Z našeho experimentu jasně vyplynulo, že práce s počítačem, pokud se stane samozřejmostí, je velkým přínosem i v matematickém vyučování.

Domníváme se, že výuka funkcí objevováním dokáže rozvíjet důležité kompetence žáků, naučí je být v hodině aktivní a učitelé umožní individuální přístup. Vyučující, kteří se experimentu účastnili, z něj byli nadšeni, velmi kladně hodnotili možnosti geometrického náčrtníku, které by se obtížně vysvětlovaly pouhým kreslením na tabuli.

(Autorkou úvodní ilustrace je *Mgr. Jaroslava Čermáková* ze Suchých Lazců.)

Literatura

- [1] *Balacheff, N – Kaput, H.*: Computer-based learning environments in mathematics. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick C. Laborde, (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1996.

- [2] *Balacheff, N. with Chan, T-W., Roschelle, J., His, S., and 17 others: One-to-One Technology – Enhanced Learning: An Opportunity for Global Research Collaboration. Research and Practice in Technology Enhanced Learning.* 1(2006) 3–29.
- [3] *Binterová, H. – Fuchs, E. – Tlustý, P.: Geometrie 7. Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia. Plzeň: Fraus 2008.*
- [4] *Binterová, H. – Fuchs, E. – Tlustý, P.: Geometrie 8. Učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia. Plzeň: Fraus 2009.*
- [5] *Binterová, H. – Fuchs, E. – Tlustý, P.: Matematika 7. Příručka učitele pro základní školy a víceletá gymnázia. Plzeň: Fraus 2008.*
- [6] *Healy, L. – Sutherland, R.: The use of spreadsheets within mathematics classroom. Math. Educ. Sci. Technol.* 21, (1990), 847–862.
- [7] *Hejný, M. – Kuřina, F.: Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování. Praha: Portál 2001.*
- [8] *Juang, Y.-R. – Liu, T.-C. & Chan, T.-W.: Computer-supported teacher development of pedagogical content knowledge through developing lesson plans for school-based curriculum. Educational Technology & Society,* 11(2008), 149–170.
- [9] *Kutzler, B.: Solving Systems of Equations with The TI-92 (Experimental Learning/Visualization/Scaffolding Method). Hagenberge 1998.*
- [10] *Kutzler, B.: CAS jako pedagogické prostředky ve vyučování a učení se matematice. Učitel matematiky,* 12, (2004), s. 101–110.
- [11] *Trávníček, S.: Síla počítačové simulace (zkušenosti). Matematika – fyzika – informatika 7 (1997/98), č. 5, 308–309.*

Maximální palindrom

(Úlohy z MO – kategorie P, 24. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

(Pokračování)

V minulém čísle našeho časopisu jsme vás seznámili s jednou úlohou z domácího kola 36. ročníku MO kategorie P (školní rok 1986/1987). Úkolem je určit délku maximálního palindromu v zadané posloupnosti celých čísel. Předvedli jsme vám několik různých algoritmů, které tuto úlohu řeší s časovou složitostí $O(N^3)$ nebo $O(N^2)$ vzhledem k délce posloupnosti N . Slíbili jsme vám také, že si dnes ukážeme překvapivě rychlé řešení, které pracuje s časovou složitostí $O(N)$.

Řešení s lineární časovou složitostí vzhledem k délce zkoumané posloupnosti čísel získáme důsledným vylepšením našeho prvního kvadratického algoritmu MaxPalindrom3 (viz předchozí část článku). Budeme opět procházet všemi možnými středy palindromu (tzn. procházíme posloupností zleva doprava) a pro každý z nich budeme určovat délku maximálního palindromu ležícího kolem tohoto středu. Položíme si otázku, kde lze v tomto řešení ušetřit provádění nějakých operací. Bude to tam, kde provádíme zbytečná porovnání prvků posloupnosti, které jsme už jednou porovnávali.

Pro zjednodušení dalšího výkladu budeme teď chvíli uvažovat pouze palindromy liché délky. K palindromům sudé délky se vrátíme až v samém závěru článku. Pokusíme se v algoritmu opakovaně využít informace, které jsme už jednou pracně získali. Těmito informacemi jsou již zjištěné délky maximálních palindromů se středem v jednotlivých prvcích posloupnosti. Zavedeme si pro tento účel pomocné pole D indexované od 1 do N . Hodnota prvku $D[k]$ bude udávat „poloměr“ maximálního palindromu se středem v prvku posloupnosti $A[k]$, tzn. tento maximální palindrom bude mít délku $2 \cdot D[k] + 1$. Pole D budeme naplňovat hodnotami postupně zleva doprava souběžně s probíhajícím zkoumáním možných středů palindromů. Ve chvíli, kdy budeme určovat hodnotu $D[k]$ a tedy také velikost maximálního palindromu se středem $A[k]$, budeme už znát hodnoty $D[1], D[2], \dots, D[k-1]$.

Výpočet hodnot pole D zachycuje následující funkce *Palindrom5*.

```
function Palindrom5(var A, D: Pole; N, Stred: integer):
integer;
{délka maximálního palindromu liché délky se středem Stred}
var i: integer;
begin
i:=1;
while (Stred-i>=1) and (Stred+i<=N) and (A[Stred-i]=
A[Stred+i]) do
    i:=i+1;
D[Stred]:=i-1;
Palindrom5:=2*i-1
end; {function Palindrom5}
```

V k -tém kroku výpočtu chceme určit velikost maximálního palindromu se středem $A[k]$, tzn. porovnat „levé okolí“ prvku $A[k]$ s jeho „pravým okolím“. Práci si můžeme ušetřit tehdy, pokud obě tato okolí nebo alespoň část z nich leží uvnitř některého již známého palindromu se středem $A[s]$, $s < k$. To nastává tehdy, když pro nějaké $s < k$ platí nerovnost $k < s + D[s]$. Prvky ležící symetricky kolem bodu $A[k]$ jsme ale v takovém případě již mezi sebou jednou porovnávali! Ne sice přímo tyto prvky, ale jejich identické dvojníky nacházející se v levé polovině palindromu se středem $A[s]$. Stalo se tak při hledání velikosti maximálního palindromu, který má střed ve zkoumané posloupnosti na indexu $s - (k - s)$. Počet takových shodných dvojic prvků máme uložen v poli D jako hodnotu $D[2*s - k]$.

Aktuálně zkoumaný střed $A[k]$ může samozřejmě ležet uvnitř většího počtu z dříve nalezených palindromů. Největší užitek nám přinese ten z nich, který zasahuje v posloupnosti co nejvíce „vpravo“, tzn. který pokrývá co nejširší okolí bodu $A[k]$. Budeme si proto průběžně udržovat také informaci, kde má střed z tohoto hlediska nejlepší dosud nalezený palindrom, tzn. takový, pro nějž je hodnota $s + D[s]$ maximální.

Nyní již nebude těžké popsat výsledný algoritmus. V k -tém kroku výpočtu nejprve otestujeme, zda $k < s + D[s]$. Pokud ne, nemůžeme při zkoumání středu $A[k]$ žádné dřívější informace využít a musíme prozkoumat celé symetrické okolí tohoto bodu jako v předchozím řešení. Jestliže platí $k < s + D[s]$, víme již, že prvky ležící symetricky kolem bodu $A[k]$ jsme mezi sebou již jednou porovnávali při zkoumání palindromu se středem $A[2*s - k]$. Je-li hodnota $D[2*s - k]$ tak malá, že se celý palindrom se středem $A[2*s - k]$ vejde do maximálního palindromu se středem $A[s]$, nemusíme okolí bodu $A[k]$ vůbec zkoumat a rovnou víme, že $D[k] = D[2*s - k]$. Přesněji řečeno, tento případ nastává, pokud $k + D[2*s - k] < s + D[s]$ a uvedená nerovnost musí být skutečně ostrá, tzn. máme jistotu, že maximální palindrom se středem $A[k]$ nepokračuje dále za hranici $s + D[s]$. Zbývá poslední případ, kdy $k + D[2*s - k] \geq s + D[s]$. V takové situaci nemusíme navzájem porovnávat prvky symetricky umístěné kolem bodu $A[k]$ až do hranice $s + D[s]$ (víme, že až tam jsou sobě odpovídající prvky shodné), ale musíme pokračovat v porovnávání shody a zvětšování palindromu od této hranice dále, dokud to bude možné.

Máme navržen algoritmus, který pro každý zvolený střed určí délku maximálního palindromu. Celkový výsledek získáme stejně jako v předchozím řešení výběrem maxima z hodnot nalezených pro všechny možné středy. Zbývá ukázat, že toto řešení úlohy má skutečně lineární časovou

složitost, jak jsme slibovali. Postupně procházíme $O(N)$ možných středů palindromů a pro každý z nich provádíme $O(N)$ porovnání dvojic čísel. To nás vede k hrubému odhadu časové složitosti algoritmu $O(N^2)$. Celkový počet všech provedených porovnání dvojic čísel je ovšem tentokrát díky naší optimalizaci pouze $O(N)$. Dvojici čísel stejně vzdálených od aktuálně zkoumaného středu palindromu totiž nyní porovnáváme pouze tehdy, když „pravé“ z těchto čísel přesahuje pravý okraj nejdále doprava sahajícího už nalezeného palindromu. Každé takové úspěšné porovnání zvýší o 1 hodnotu $s + D[s]$, zatímco neúspěšné porovnání prvků se vykoná pro každý zkoumaný střed nejvýše jedno. Hodnotu $s + D[s]$ lze zvýšit celkově pouze n -krát (nemůže překročit délku posloupnosti), takže celkově se provede $O(N)$ úspěšných porovnání. Neúspěšných porovnání je vykonáno rovněž $O(N)$, jelikož jich nemůže být více než středů. Algoritmus má proto opravdu lineární časovou složitost vzhledem k délce posloupnosti N .

Algoritmus si nyní ještě zapíšeme detailně v programovacím jazyce Pascal ve tvaru funkce *MaxPalindrom6*. K určení délky maximálního palindromu liché délky se zvoleným středem se v ní používá pomocná funkce *Palindrom6*, která je vylepšenou a doplněnou verzí dříve uvedené funkce *Palindrom5*.

```
function Palindrom6(var A, D: Pole; N, Stred: integer; var
s: integer): integer;
{délka maximálního palindromu liché délky se středem Stred}
var i: integer;
begin
if Stred >= s+D[s] then
  i:=1 {nic nevíme}
else if Stred + D[2*s-Stred] < s+D[s] then {známe výsledek}
  begin
    D[Stred]:=D[2*s-Stred];
    Palindrom6:=2*D[Stred]+1;
    exit
  end
else
  i:=s+D[s]+1-Stred; {zkusíme palindrom prodlužovat}
while (Stred-i>=1) and
(Stred+i<=N) and (A[Stred-i]=A[Stred+i]) do
  i:=i+1;
```

```

D[Stred]:=i-1;
Palindrom6:=2*i-1;
if Stred+D[Stred] > s+D[s] then s:=Stred
end; {function Palindrom6}

function MaxPalindrom6(var A: Pole; N: integer): integer;
var Stred, Delka, MaxDelka, s: integer;
    D: Pole;
begin
MaxDelka:=1;
s:=1; D[s]:=0;
for Stred:=1 to N do
    begin
        Delka:=Palindrom6(A, D, N, Stred, s); {pouze lichá délka}
        if Delka>MaxDelka then MaxDelka:=Delka;
    end;
MaxPalindrom6:=MaxDelka
end; {function MaxPalindrom6}

```

Ještě jednou připomínáme, že právě uvedené řešení vyhledává v zadané posloupnosti čísel pouze délku maximálního palindromu liché délky. Budeme-li uvažovat také palindromy sudé délky, musíme do funkcí doplnit poněkud složitější manipulace s indexy. Je to pouze technická úprava, idea algoritmu ani časová složitost se tím nezmění, program se ale stane méně přehledným.

Ukážeme si proto ještě jinou možnost, jak si chytře poradit s palindromy sudé délky. Převědeme je na předchozí, již vyřešený případ palindromů liché délky. Mezi každé dva sousední prvky v zadané posloupnosti (a také na začátek a na konec posloupnosti) vložíme jeden fiktivní prvek navíc. Všechny tyto vložené prvky budou mít stejnou hodnotu, odlišnou od hodnot vyskytujících se v posloupnosti (v programu použijeme například konstantu MAXINT – maximální zobrazitelnou celočíselnou hodnotu). Na takto upravenou posloupnost potom stačí použít předchozí program, který v ní určí maximální palindrom liché délky. Pokud z něj vypustíme všechny vložené fiktivní prvky, získáme maximální palindrom (liché nebo sudé délky) obsažený v původní posloupnosti. Jeho délku určíme tak, že celočíselně vydělíme dvěma výsledek volání předchozí funkce *MaxPalindrom6* na upravenou posloupnost s vloženými prvky. Časová složitost

zůstane zjevně lineární, původně lineární algoritmus zde uplatňujeme na zpracování vstupních dat dvojnásobné délky.

Poslední popsané řešení je tedy hledaným výsledkem naší úlohy. Určuje délku maximálního palindromu obsaženého v zadané posloupnosti, ať je tento palindrom liché či sudé délky, a pracuje s lineární časovou složitostí. Zapišeme si ho opět v jazyce Pascal ve tvaru funkce *MaxPalindrom7*. Funkce využívá dříve popsanou pomocnou funkci *Palindrom6* z předchozího řešení, kterou zde již opakovaně neuvádíme.

```
function MaxPalindrom7(var A: Pole; N: integer): integer;
var Stred, Delka, MaxDelka, s, i: integer;
    B, D: Pole;
const VYPLN=maxint; {hodnota přidanych fiktivních prvků}
begin
  B[1]:=VYPLN;
  for i:=1 to N do
    begin B[2*i]:=A[i]; B[2*i+1]:=VYPLN end;
  MaxDelka:=1;
  s:=1; D[s]:=0;
  for Stred:=1 to 2*N+1 do
    begin
      Delka:=Palindrom6(B, D, 2*N+1, Stred, s);
      if Delka>MaxDelka then MaxDelka:=Delka;
    end;
  MaxPalindrom7:=MaxDelka div 2
end; {function MaxPalindrom7}
```

M. Hejný, F. Kuřina: Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování. Aktualizované vydání knihy. Portál, Praha 2009, s. 232, cena 299 Kč.

Přáli bychom si, aby publikaci četli jak budoucí učitelé, tak i učitelé z praxe, kteří mohou konfrontovat své zkušenosti s našimi názory. Kniha je určena učitelům 1. stupně i učitelům matematiky na druhém stupni základních škol a v odpovídajících ročnících víceletých gymnázií. Snahy po utváření matematických poznatků v mysli dítěte, tedy snahy po uplatnění konstruktivistických přístupů k vyučování by neměly být omezeny věkem poznávajících. Naše kniha vychází z našich zkušeností a praxe, chtěli bychom, aby praxi také sloužila.

Autoři