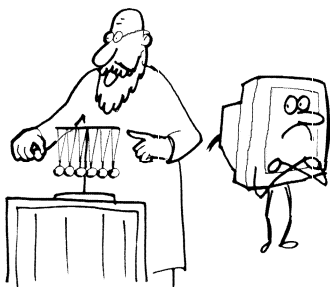


Využití software MAPLE při výuce fyziky 1

JAN HRDÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

1. Úvod



Tento příspěvek podrobně popisuje možné využití moderního software *Maple* při názorném a srozumitelném řešení některých fyzikálních úloh ve výuce fyziky na SŠ, při jejichž exaktním řešení (viz např. základní kurz fyziky na VŠ) je třeba využít byť tu nejjednodušší, ale přece jenom diferenciální rovnici. Z matematického hlediska jde vlastně o numerické řešení příslušné diferenciální rovnice, pro

které zavedl již v roce 1966 *Richard P. Feynman* označení **dynamické modelování** [1]. Tento článek jednak obsahuje stručnou informaci o software *Maple*, doplněnou třemi krátkými praktickými ukázkami, jednak popis a rozbor několika fyzikálních problémů, jejichž exaktní řešení vede v tomto nejjednodušším případě na *obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu se separovanými proměnnými* [2]. Dále je uvedeno několik variant řešení takovéto skupiny problémů metodou dynamického modelování v uspořádání vhodném do výuky fyziky na SŠ s využitím *Maple*, a to i v srovnání s dříve hojně rozšířeným *Famulem*.

2. Proč právě program MAPLE?

Dlouhá léta (bráno z pohledu PC) se ve výuce fyziky používal dnes již legendární program *Famulus*, který byl nejen značně univerzální, ale také byl velmi dobře přizpůsoben právě třeba k dynamickému modelování [3]. Protože však tento program není k dispozici pro platformu Windows, je třeba hledat vhodnou náhradu. Modelovat fyzikální děje můžeme snadno např. pomocí programu *Interactive Physics*, který má sice kvalitně zpracované intuitivní ovládání a dovede velmi názorně simulovat modelované fyzikální děje, ale protože pracuje s předem definovanými objekty a parametry fyzikálních situací, vytrácí se do určité míry podstata modelovaného děje a nejde tedy o dynamické modelování v pravém slova smyslu. Na druhém pólu jsou zase obecné programovací jazyky typu C^{++} , $C\#$, *Visual Basic* nebo *Delphi*, které jsou sice velmi univerzální i výkonné, ale k zamýšlenému použití příliš vhodné nejsou, protože jsou programátorsky náročné. Programový balík *Maple* patří do stejné skupiny s programy *Mathematica* a *Matlab*. Ze všech těchto tří typů programů je *Maple* asi nejvíce didakticky zaměřen a rozhodně je cenově nejprístupnější. Málo se ví, že program *Maple* vznikl jako důsledek odtržení a osamostatnění se části vývojářů z řešitelského kolektivu *Matlabu* [4]. Od té doby pokračují oba programy vlastní cestou, ale protože vycházejí ze společného základu, dokáží spolu velmi dobře spolupracovat.

3. Exkurze do programu MAPLE

Pro ty čtenáře MFI, kteří se s tímto programem doposud nesetkali, alespoň několik krátkých ilustračních příkladů. Program *Maple* má kromě obecně velké univerzálnosti také značně rozvinutou **počítačovou algebru**, takže zvládá snadno pro PC doposud nezvyklé úkoly, jako je třeba zjednodušování algebraických výrazů (výraz zadáme v počítačové notaci, program jej sám přepíše do běžného matematického zápisu, což je z didaktického hlediska velmi důležité, a potom výraz zjednoduší, takže dostaneme

```
>x^3+9*x^2*y+6*x^2*z+27*x*y^2+36*x*y*z+12*x*z^2+27*y^3  
+54*y^2*z+36*y*z^2+8*z^3;
```

```
x^3 + 9x^2y + 6x^2z + 27xy^2 + 36xyz + 12xz^2 + 27y^3 + 54y^2z + 36yz^2 + 8z^3
```

```
> factor(%);
```

$$(x + 2z + y)^3$$

nebo naopak ovládá i rozvoj obecných algebraických výrazů

```
> expand((x+y)^33);
```

$$\begin{aligned} & x^{33} + 33x^{32}y + 528x^{31}y^2 + 5456x^{30}y^3 + 40920x^{29}y^4 + 237336x^{28}y^5 + 1107568x^{27}y^6 \\ & + 4272048x^{26}y^7 + 13884156x^{25}y^8 + 38567100x^{24}y^9 + 92561040x^{23}y^{10} \\ & + 193536720x^{22}y^{11} + 354817320x^{21}y^{12} + 573166440x^{20}y^{13} + 818809200x^{19}y^{14} \\ & + 1037158320x^{18}y^{15} + 1166803110x^{17}y^{16} + 1166803110x^{16}y^{17} \\ & + 1037158320x^{15}y^{18} + 818809200x^{14}y^{19} + 573166440x^{13}y^{20} + 354817320x^{12}y^{21} \\ & + 193536720x^{11}y^{22} + 92561040x^{10}y^{23} + 38567100x^9y^{24} + 13884156x^8y^{25} \\ & + 4272048x^7y^{26} + 1107568x^6y^{27} + 237336x^5y^{28} + 40920x^4y^{29} + 5456x^3y^{30} \\ & + 528x^2y^{31} + 33xy^{32} + y^{33} \end{aligned}$$

nebo rozklad zadaného (v tomto případě vypočítaného) čísla na prvočinitele

```
> 1*2*3*4*5*6*7*8*9*10*11*12*13*14*15*16*17*18*19*20;
```

2432902008176640000

```
> ifactor(%);
```

$$(2)^{18} (3)^8 (5)^4 (7)^2 (11) (13) (17) (19)$$

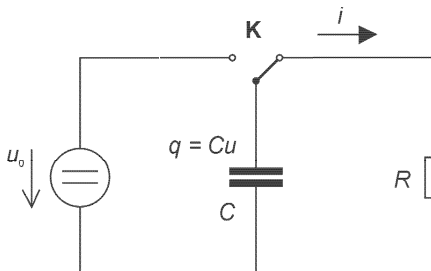
nebo derivování, integrování, řešení algebraických rovnic a nerovnic, obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic nebo počítání s maticemi, vše samozřejmě nejen s číselnými hodnotami, ale také s obecnými algebraickými výrazy (počítačová algebra). Příklady zde uvedené jsou pouze ilustrativní a jsou pouze nepatrným zlomkem toho, co programový balík *Maple* nabízí. Kvůli omezenému rozsahu příspěvku nejsou tyto příklady již dále podrobněji komentovány, v případě potřeby je třeba nahlédnout do manuálu.

4. Popis řešených fyzikálních problémů

V této kapitole je zařazen podrobný popis řešení vhodných fyzikálních problémů [5, 6, 7, 8] pro dynamické modelování včetně odvození příslušné diferenciální rovnice a jejího řešení, které slouží pro srovnání s výsledky, dosaženými metodou dynamického modelování s využitím software *Maple*.

Příklad 1

Kondenzátor o kapacitě C je nabit nábojem q_0 a potom připojen přes klíč **K** k rezistoru o odporu R v zapojení podle obr. 1. Zjistěte časový průběh procházejícího proudu $i = i(t)$.



Obr. 1 Vybíjení kondenzátoru přes odpor

Okamžitá hodnota napětí na kondenzátoru je $u = q/C$, pro počáteční hodnotu napětí u_0 obdobně platí $u_0 = q_0/C$, kde q_0 je počáteční náboj kondenzátoru. Protože jediným zdrojem napětí v obvodu je nabitý kondenzátor, platí podle II. Kirchhoffova zákona

$$u = Ri \quad (1)$$

neboli

$$\frac{1}{C}q = Ri \quad (2)$$

a po další úpravě

$$i = \frac{1}{RC}q. \quad (3)$$

Protože nás zajímají vztahy mezi diferenciály obou funkcí, rovnici derivujeme podle času

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{RC} \frac{dq}{dt} \quad (4)$$

a jelikož platí, že protékající proud je číselně roven úbytku náboje za 1 sekundu, tj.

$$i = -\frac{dq}{dt}, \quad (5)$$

dostaneme po dosazení za dq/dt z (5) do (4) a po úpravě

$$\frac{1}{i} di = -\frac{1}{RC} dt. \quad (6)$$

Rovnici již nyní můžeme přímo integrovat, a to levou i pravou stranu samostatně, protože jednotlivé proměnné jsou **separovány**. Tedy

$$\int \frac{1}{i} di = -\frac{1}{RC} \int dt \quad (7)$$

neboli

$$\ln i = -\frac{t}{RC} + i_0, \quad (8)$$

kde integrační konstanta i_0 má význam počáteční hodnoty proudu. Platí pro ni

$$i_0 = \frac{u_0}{R} = \frac{q_0}{RC}. \quad (9)$$

Ze vztahů (8) a (9) potom pro výsledný proud i platí

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{u_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (10)$$

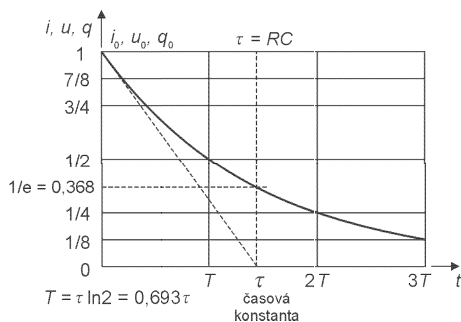
Protože veličiny q , u a i jsou si v tomto jednoduchém případě přímo úměrné (jsou vzájemně pevně svázány číselnými konstantami), dostaneme po vynásobení vztahu (10) velikostí odporu R vztah

$$Ri = Ri_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{neboli} \quad u = u_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{q_0}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (11)$$

a po vynásobení ještě dále kapacitou kondenzátoru C další vztah

$$Cu = Cu_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{neboli} \quad q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (12)$$

Časový interval $\tau = RC$ obvykle nazýváme **časovou konstantou obvodu** a má takový význam, že během této doby poklesne okamžitý proud i (nebo okamžité napětí u nebo okamžitý náboj kondenzátoru q) na $e^{-1} = 1/e = 0,36787944 \approx 36,8$ % své počáteční hodnoty. Rovněž ji můžeme interpretovat tak, že je to doba potřebná k úplnému vybití kondenzátoru za předpokladu, že je vybíjen **konstantním proudem** o velikosti i_0 , což lze snadno v praxi zajistit v případě potřeby použitím moderních elektronických prvků.



Obr. 2 Časový průběh proudu při vybíjení kondenzátoru přes odpor

Důležitá je také doba T , za kterou poklesne proud procházející obvodem (nebo napětí nebo náboj kondenzátoru) na jednu polovinu

$$i = i_0 e^{-\frac{T}{RC}} = \frac{i_0}{2}, \quad (13)$$

z čehož plyne, že $T/RC = \ln 2$ a tedy

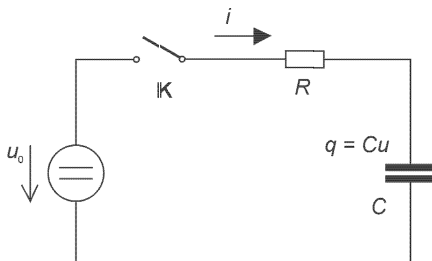
$$T = RC \ln 2 = \tau \ln 2 \quad (14)$$

$$T \approx 0,693 RC = 0,693 \tau. \quad (15)$$

Je zřejmé, že za dvojnásobek této doby $2T$ poklesne proud v obvodu na jednu čtvrtinu, za trojnásobek $3T$ na jednu osminu atd.

Příklad 2

Nenabitý kondenzátor o kapacitě C se po sepnutí klíče **K** začíná nabíjet ze zdroje o konstantním napětí u_0 přes rezistor o odporu R v zapojení podle obr. 3. Zjistěte časový průběh procházejícího proudu $i = i(t)$ v obvodu (časový průběh napětí u a náboje q).



Obr. 3 Nabíjení kondenzátoru přes odpor ze zdroje konstantního napětí

Obdobně jako v předcházejícím příkladě aplikujeme na obvod II. Kirchhoffův zákon:

$$u_0 = Ri + u, \quad (16)$$

kde $u = q/C$ je okamžité napětí a q je okamžitý náboj nabíjeného kondenzátoru. Po úpravě dostaneme

$$i = \frac{Cu_0 - q}{RC}. \quad (17)$$

Rovnici opět derivujeme podle času a po úpravě dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{1}{i} di = -\frac{1}{RC} dt, \quad (18)$$

kteřá má stejný tvar jako v předcházejícím příkladě (6). Proto také její řešení pro časový průběh okamžitého proudu i je stejného tvaru jako (10), poněvadž konstantu i_0 (počáteční proud) můžeme vyjádřit stejným způsobem $i_0 = u_0/R$, takže platí

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{u_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (19)$$

Vztah pro časový průběh okamžitého napětí u na kondenzátoru dostaneme tak, že do rovnice (16) dosadíme za okamžitou velikost procházejícího proudu i vypočítanou hodnotu ze vztahu (19). Pak platí

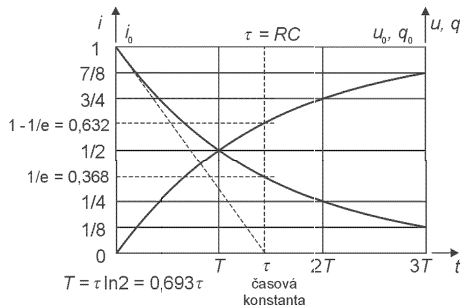
$$u = u_0 - Ri = u_0 - Ri_0 e^{-\frac{t}{RC}} = u_0 - u_0 e^{-\frac{t}{RC}} = u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \quad (20)$$

Obdobné vztahy platí i pro okamžitý náboj $q = Cu$ nabíjeného kondenzátoru i pro jeho konečný náboj $q_0 = Cu_0$ na konci sledovaného děje, takže dostaneme

$$q = Cu = Cu_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right). \quad (21)$$

Časová konstanta obvodu $\tau = RC$ má obdobný význam jako v předcházejícím příkladě, a to, že během této doby poklesne okamžitý proud i v uvažovaném obvodu na $e^{-1} = 1/e \approx 36,8$ % své počáteční hodnoty i_0 . Nebo okamžité napětí na kondenzátoru u dosáhne $1 - e^{-1} = 1 - 1/e \approx 63,2$ %

napětí zdroje u_0 (nebo okamžitý náboj na kondenzátoru q dosáhne 63,2 % náboje q_0 plně nabitého kondenzátoru). Rovněž ji můžeme interpretovat tak, že je to doba potřebná k úplnému nabití kondenzátoru za předpokladu, že je nabíjen **konstantním proudem**, který je roven již zmíněné (9) počáteční velikosti proudu $i_0 = u_0/R$.



Obr. 4 Časový průběh proudu při nabíjení kondenzátoru přes odpor

Důležitá je také doba T , za kterou poklesne proud procházející obvodem i na jednu polovinu výchozí hodnoty i_0

$$i = i_0 e^{-\frac{T}{RC}} = \frac{i_0}{2}, \quad (22)$$

z čehož plyne obdobně jako v předcházejícím příkladu, že $T/RC = 2$ a tedy platí opět vztahy (14) a (15). Je zřejmé, že za dvojnásobek této doby $2T$ poklesne proud v obvodu na jednu čtvrtinu, za trojnásobek $3T$ na jednu osminu své výchozí hodnoty atd., viz obr. 4. Za tuto dobu T se kondenzátor nabije na poloviční napětí zdroje $u = u_0/2$ (nebo získá poloviční náboj $q = q_0/2$), za dvojnásobek této doby $2T$ se nabije na napětí $u = 3u_0/4$ (nebo získá náboj $q = 3q_0/4$), za trojnásobek této doby $3T$ se nabije na napětí $u = 7u_0/8$ (nebo získá náboj $q = 7q_0/8$) atd. Pro např. $t = 3T$ ze vztahu (20) ověříme

$$\begin{aligned} u &= u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = u_0 \left(1 - e^{-\frac{3T}{RC}}\right) = u_0 \left(1 - e^{-\frac{3RC \ln 2}{RC}}\right) = \\ &= u_0 \left(1 - e^{-3 \ln 2}\right) = u_0 \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) = 7u_0/8. \end{aligned} \quad (23)$$

(Pokračování)

(Autorkou úvodní ilustrace je Mgr. Jaroslava Čermáková ze Suchých Lazců.)

Literatura

- [1] *Feynman, R. P. – Leighton, R. B. – Sands, M.*: The Feynman lectures on physics. Addison–Wesley Publ. Comp., Reading, MA, 1966.
- [2] *Bartsch, H. J.*: Matematické vzorce. Mladá fronta, Praha 2002.
- [3] *Lepil, O.*: Dynamické modelování (učební text). UP, Olomouc 2001.
- [4] *Gander, W. – Hřebíček, J.*: Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and MATLAB. Springer-Verlag, Berlín 1997.
- [5] *Horák, Z. – Krupka, F.*: Fyzika. SNTL/ALFA, Praha 1981.
- [6] *Fuka, J. – Havelka, B.*: Elektřina a magnetismus. SPN, Praha 1979.
- [7] *Hajko, V. a kol.*: Fyzika v příkladech. ALFA, Bratislava 1971.
- [8] *Syrový, A.*: Sběrka příkladů z fyziky. SNTL, Praha 1971.
- [9] *Dvořák, L. – Ledvinka, T. – Sobotka, M.*: Famulus 3.5 (referenční příručka). Famulus Etc., Praha 1993.
- [10] *Lepil, O. – Richterek, L.*: Dynamické modelování. Repronis, Ostrava 2007.
- [11] *Hřebíček, J. – Kohout, J.*: Úvod do systému Maple (učební text). FI MU, Brno 2004.
- [12] *Hrdý, J. – Hrdý, J., jr.*: Použití systému počítačové algebry Maple ve výuce fyziky (učební text, v tisku).
- [13] *Hrdý, J.*: Optimalizace průběhu počítačové animace fyzikálního děje v programu Maple. In.: Sborník konference Pedagogický software 2008. Ed. Řehout, V. a kol. Scientific Pedagogical Publishing, České Budějovice 2008, s. 139–141.
- [14] *Hrdý, J.*: Fyzikální animace na PC. In.: Sborník konference Veletrh nápadů učitelů fyziky 13. Ed.: Rauner, K. ZČU, Plzeň 2008, s. 240–244.

Derivace v Excelu

STANISLAV TRÁVNÍČEK – VÁCLAV MATYÁŠ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc Purkyňovo gymnázium, Strážnice

1. Úvod

Excel je na školách velmi rozšířený tabulkový editor a mnoho studentů a žáků s ním dnes umí pracovat. Proto má smysl zkoušet, čím by mohl přispět při výuce matematiky. Podíváme se na derivace. Excel nemá zabudován výpočet derivací funkcí, ale přesto můžeme hodnoty derivací s určitou přesností počítat a zobrazovat grafy derivací různých funkcí. Hlavním

přínosem ovšem není ono kreslení grafů derivace (k tomu jsou vhodnější jiné prostředky, než je Excel), ale to, že si při pokusech o výpočet hodnot derivací a jejich zobrazení žáci uvědomí, upevní a procvičí znalost pojmu derivace a naučí se kriticky posuzovat možnosti Excelu. Grafy funkcí a jejich derivací zobrazované v Excelu jsou ovšem jen přibližné, ale na druhé straně postačují k tomu, aby si o grafech funkcí a jejich derivacích udělali žáci představu.

Víme, že derivace funkce $f(x)$ v bodě a je definována jako vlastní (koněčná) limita podílu přírůstku funkce $y = f(a + h) - f(a)$ a přírůstku nezávisle proměnné $\Delta x = h$, tj.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \quad (1)$$

Podstata zjištění derivace v Excelu spočívá v tom, že derivaci v bodě nahradíme přímo podílem přírůstků pro dostatečně malý přírůstek h .

2. Typy diferencí

Přírůstek h nezávisle proměnné můžeme nazývat též *diference nezávisle proměnné*, čítec ve zlomku v (1) je pak *diference funkce*. Jelikož *poměrnou diferencí* ($k_1 = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$) vztahujeme v tabulkách pro kreslení grafů funkcí k bodu a , můžeme ji nazvat *dopřednou* (poměrnou) diferencí [3], jestliže k bodu a vztahujeme poměrnou diferencí ($k_2 = \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$), jde o *zpětnou* (poměrnou) diferencí. Lepší výsledky však dává pro bod a aritmetický průměr obou jednostranných poměrných diferencí

$$\begin{aligned} (k_3) &= \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{h} \right). \end{aligned}$$

Zde je jmenovatel $2h$; jestliže ovšem chceme setrvat u hodnoty $\Delta x = h$, definujeme středovou (poměrnou) *diferenci* ($k_4 = \frac{f(a+0,5h)-f(a-0,5h)}{h}$). Vidíme, že k_3 je vlastně také středová diference, ale s dvojnásobnou hodnotou přírůstku nezávisle proměnné. Středová diference dává nejlepší výsledky, ale v levém a pravém koncovém bodu intervalu nezávisle proměnných ji někdy nemůžeme užít, jak uvidíme v příkladech, což můžeme částečně napravit tak, že v prvním bodě použijeme dopřednou diferencí a v koncovém bodě diferencí zpětnou.

Na obr. 1 je ukázán odhad derivace funkce $\sin x$ v bodě $a = 1,2$ rad tak, že v tabulce počítáme poměrné difference: dopřednou diferenci $k_1 = \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$, zpětnou diferenci $k_2 = \frac{\sin a - \sin(a-h)}{h}$, jejich aritmetický průměr, tj. středovou diferenci $k_3 = \frac{k_1 + k_2}{2}$ a středovou diferenci $k_4 = \frac{\sin(a+0,5h) - \sin(a-0,5h)}{h}$ pro různé hodnoty h .

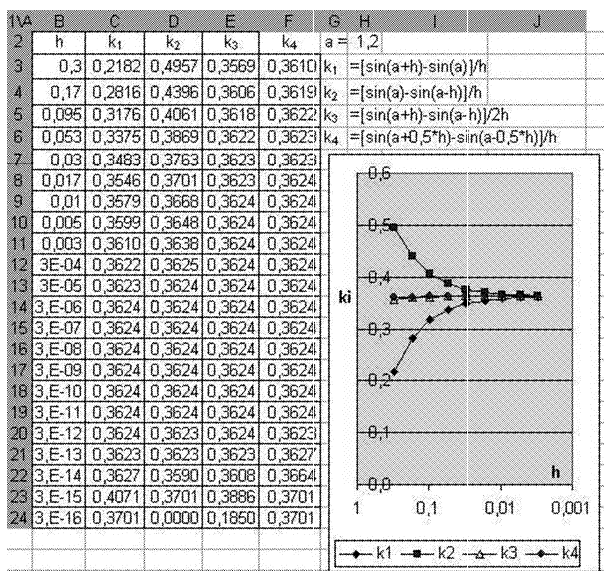
Do buňky C3 je tedy vložen vzorec $=(\text{SIN}(\$H\$2+B3)-\text{SIN}(\$H\$2))/B3$ (při značení podle obr. 1) a tažením dostaneme další hodnoty ve sloupci C. Podobně jsou vypočteny hodnoty ve sloupcích D, E, F. Vidíme, že všechny typy diferencí se pro klesající h blíží jediné hodnotě odpovídající derivaci funkce $\sin x$ v bodě a . Vzhledem k charakteru volby vybraných hodnot h jsou souřadnice bodů na ose x vynášeny v logaritmickém měřítku.

3. Přesnost výpočtu

V grafu obr. 1 jsou vyneseny body jen pro prvních devět hodnot h ($h = 0,3; 0,17; \text{až } 0,003$). Z dalších řádků tabulky obrázku vidíme, že od hodnoty $h = 3 \cdot 10^{-6}$ nabývají (s přesností na 4 desetinná místa) všechny poměrné difference stejné hodnoty 0,3624, přičemž skutečně nejlepší a navzájem srovnatelné výsledky dávají k_3 a k_4 . Pro hodnoty $h \leq 3 \cdot 10^{-12}$ se numerické hodnoty poměrných diferencí opět začínají lišit (s přesností na 4 desetinná místa) a zjevně se začínají stále více odchýlovat od správné hodnoty. Příčina spočívá v tom, že pro relativně velká h se odhadují difference derivaci příliš hrubě a odhady jsou ovlivněny „ořezávací“ [3] chybou, zatímco pro hodně malá h vzniká chyba odhadu tím, že dáváme do poměru rozdíly dvojic hodně blízkých čísel. Jejich rozdíl je však už tak malý, že se uplatní vliv zaokrouhlování na posledních místech reprezentace čísla v Excelu. Těmto chybám se říká „zaokrouhlovací“. U některých funkcí mohou tyto chyby způsobit překvapivé a zbloudilé výsledky. V našem případě podle tabulky v obr. 1 se jeví interval hodnot, při nichž odhadneme derivaci dobře, dosti široký. Při volbě hodnoty h musíme ovšem uvažovat nejen přesnost výpočtu derivace, ale také rozsah tabulky funkcí; např. orientačně vidíme, že stačí-li nám např. u funkce sinus přesnost na 3 desetinná místa, budeme volit $h = 0,01$. I tak bychom pro zobrazení této funkce na celém intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ měli tabulku s $200\pi \doteq 630$ řádky.

4. Geometrická interpretace derivace

Víme, že geometrickým významem derivace funkce f v bodě x_0 je směrnice tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0; f(x_0)]$. Jestliže tedy derivaci



Obr. 1

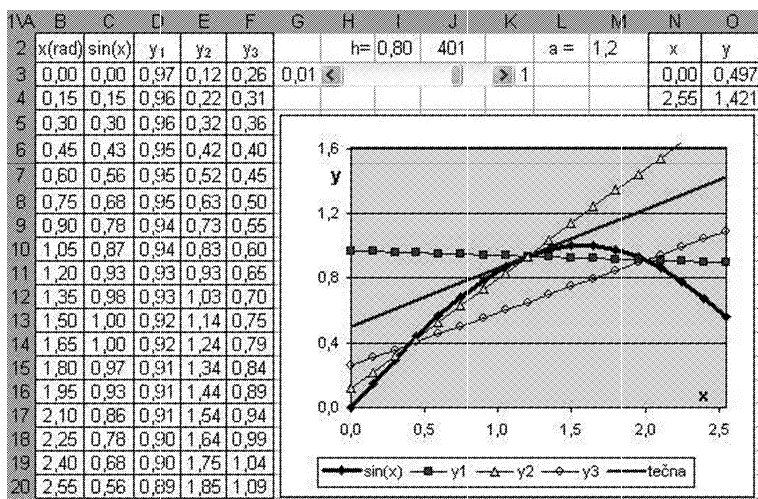
nahrazujeme poměrnou diferencí, nahradíme tečnu ke křivce příslušnou sečnou podle typu difference.

Na obr. 2 je vykreslena část grafu funkce $y = \sin x$, sečny $y_i = k_i(x - a) + \sin a$ při $i = 1, 2$, kde $k_1 = \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$, $k_2 = \frac{\sin a - \sin(a-h)}{h}$, a sečna $y_3 = k_3[x - (a+h)] + \sin(a+h)$, kde $k_3 = \frac{\sin(a+h) - \sin(a-h)}{h}$ (případ k_4 dále vynecháváme). Všechny tři přímky jsou kresleny pro $a = (x_0 =) 1, 2$; parametr h můžeme měnit posuvníkem v intervalu $\langle 0, 01; 1 \rangle$. Body všech čtyř závislostí jsou pro větší názornost kresleny s krokem 0,15 na ose x . Z téhož důvodu je v obrázku vyznačena tečna grafu v bodě $[1,2; \sin 1,2]$. Rovnice tečny je

$$y - \sin a = \cos a (x - a)$$

a graf tečny byl pořízen užitím vypočtených souřadnic krajních bodů zobrazeného intervalu $\langle 0; 2,55 \rangle$, viz sloupce N, O ...

Přímka y_1 je sečnou procházející body $[a; \sin a]$, $[a + h; \sin(a + h)]$ a její směrnice odpovídá dopředné poměrné diferencí k_1 . Podobně přímka y_2 je sečnou procházející body $[a - h; \sin(a - h)]$, $[a; \sin a]$ a její směrnice k_2 odpovídá poměrné zpětné diferencí. Přímka y_3 prochází body $[a - h; \sin(a - h)]$,



Obr. 2

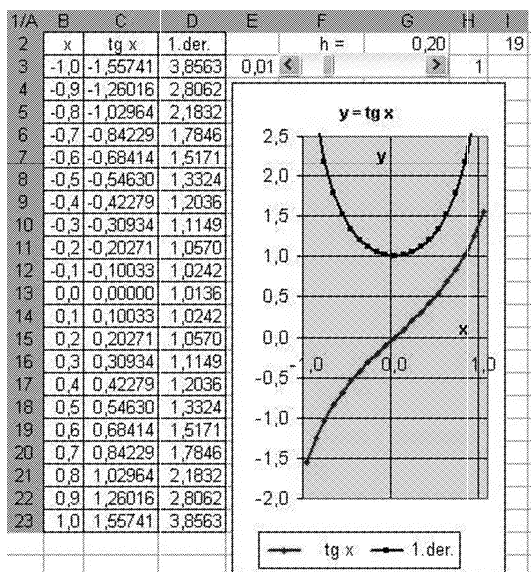
$[a + h; \sin(a + h)]$ a její směrnice k_3 , jak víme, odpovídá aritmetickému průměru obou předchozích poměrných diferencí. Při posunu ukazatele posuvníku (podrobněji viz [4]) zaujímají tyto tři sečny různé polohy. Na obr. 2 vidíme, že hodnota směrnice k_3 je nejbližší hodnotě derivace funkce $\sin x$ v bodě a , tj. že příslušná sečna je téměř rovnoběžná s vyznačenou tečnou. Pro $h \rightarrow 0$ se zmenšuje rozevření sečen a všechny tři přímky se blíží k poloze tečny grafu funkce.

5. Ukázky derivací

Na několika příkladech si nyní ukážeme praktické použití Excelu při sestrojování grafu derivace funkce.

Příklad 1. Sestrojíme graf funkce tangens, $y = \tan x$, a její derivace na intervalu $\langle 1; -1 \rangle$ (viz obr. 3).

Ve sloupci B jsme vytvořili řadu hodnot x od -1 s krokem $0,1$ do 1 . V C3 je uloženo $=\text{TG}(\text{B3})$ a tažením dolů naplníme sloupec C. Zařadili jsme tu možnost zkoušet, jak se mění nebo nemění graf derivace, když měníme přírůstek h . V řádku 3 je vytvořen posuvník pro hodnoty h od $0,01$ do 1 . Formát ovládacího prvku volíme od 1 do 99 , přičemž hodnoty posuvníku jsou v I2, do G2 jsme pak uložili $=0,01+0,01*\text{\$I\$2}$,

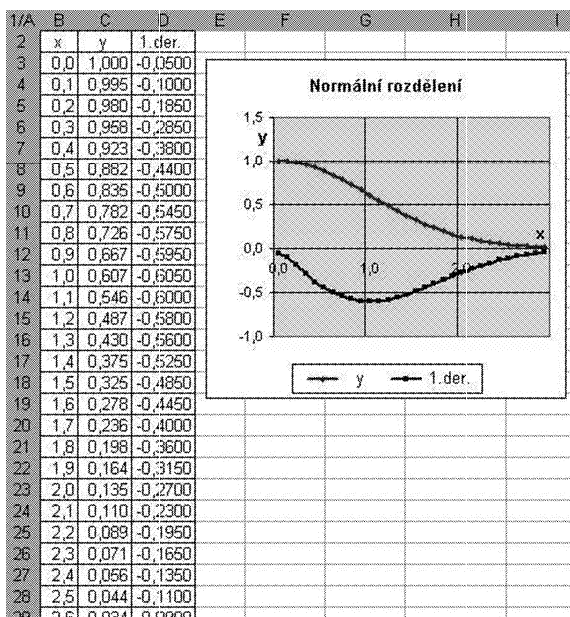


Obr. 3

takže je zde právě nastavená hodnota přírůstku. Do D3 je vloženo $= (TG(B3 + \$G\$2) - TG(B3 - \$G\$2)) / (2 * \$G\$2)$ a tento vzorec je zkopírován do celého sloupce D. Sestavení obrázku bylo dostatečně popsáno v [4]. Nalezený graf derivace odpovídá rovnici $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Zvolený rozsah přírůstku umožňuje se přesvědčit, že při h blízkém 1 (a to je pro přírůstek u funkce tangens opravdu velmi hrubá hodnota) dostáváme jako „graf derivace“ zcela nesmyslné křivky.

Příklad 2. Funkce $y = f(x)$ je dána tabulkou, je třeba ji znázornit a také její derivaci. Tabulka je dána v rozsahu od 1 do 3 s krokem 0,1 (jde o část statistické funkce, popisující teoretickou hustotu normálního rozdělení).

Ve sloupci B vytvoříme řadu hodnot x dle zadání tabulky, do sloupce C vepíšeme zadané tabulkové hodnoty funkce f . Přírůstek h volíme roven tabulkovému kroku, tj. 0,1. Nyní je však zřejmé, že při výpočtu derivací v tabulkových bodech nelze volit středovou diferenci už v 1. bodu tabulky (ani v posledním). Výpočet derivace je proto vložen až do D4, a to $= (C5 - C3) / 0,2$ a tento vzorec je zkopírován až do D32, což je v předposledním řádku tabulky. Začátek a konec tabulky derivací bude chy-

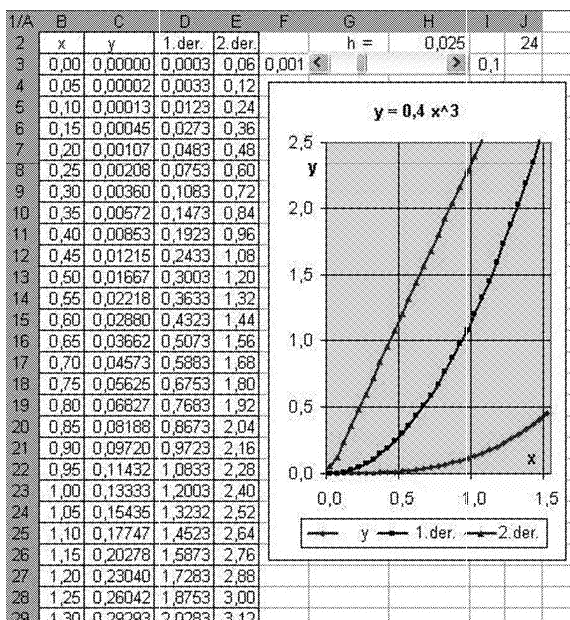


Obr. 4

bět nebo bude zdeformován. Volímeli tuto možnost, snažíme se o minimální deformaci např. tak, že do D3 dáme dopřednou poměrnou diferenci vzorcem $= (C4 - C3) / 0,1$ a do D33 zpětnou poměrnou diferenci vzorcem $= (C33 - C32) / 0,1$. Dostáváme tak část Gaussovy křivky a graf příslušné derivace.

Příklad 3. Je dána funkce $y = 0,4x^3$ a má se znázornit graf funkce a její první i druhé derivace na intervalu $\langle 0; 1,5 \rangle$.

Samozřejmě nejjednodušší by bylo derivace vypočítat a obdržené funkce pak graficky znázornit. Zde nám však jde o nácvik výpočtu derivací pomocí poměrných diferencí. Krok proměnné x je volen 0,05, takže řada proměnné x sahá od B3 až po B33. Do C3 je vložen vzorec $= 0,4 * B3^3$, který je zkopírován do buněk sloupce C až po C33. Opět jako v příkladu 1 byla tu vložena možnost zkoušet, jak se mění nebo nemění graf derivace, když měníme přírůstek h . Posuvník je uspořádán podobně a byl volen rozsah h od 0,001 do 0,1. Formát ovládacího prvku je volen také od 1 do 99, do H2 jsme uložili $= 0,001 + 0,001 * \$J\2 , takže v této buňce je právě nastavená hodnota přírůst-



Obr. 5

ku. Do D3 byl vložen vzorec $=((B3+H\$2)^3(B3-H\$2)^3)*0,4/(2*H\$2)$ a byl zkopírován do všech buněk ve sloupci D.

Druhá derivace se zde počítala metodou uvedenou k příkladu 2. Za přírůstek h se vezme tabulkový krok proměnné x s tím, že je třeba vynechat nebo upravit první a poslední hodnotu Do E4 je vloženo $=(D5-D3)/0,1$ a to se zkopírovalo do sloupce E až po E32. V E3 je umístěna dopředná poměrná difference $=(D4-D3)/0,05$ a podobně v E33 je zpětná poměrná difference, tj. $=(D33-D32)/0,05$. Na obrázku pak vidíme části kubické paraboly, kvadratické paraboly a přímky (s mírně deformovaným začátkem).

Literatura

- [1] *Rektorys, K. a kol.*: Přehled užité matematiky. Praha, Prometheus 2003.
- [2] *Hrubý, D. – Kubát J.*: Matematika pro gymnázia. (Diferenciální a integrální počet.) Praha, Prometheus 1997.
- [3] *Orvis, W. J.*: Microsoft Excel pro vědce a inženýry, český překlad z anglické edice, Computer Press, Praha, 1996.
- [4] *Matyáš, V.*: Graf funkce s parametry v Excelu .MFI, r. 17 (2007/08), č. 2.