

FYZIKA

Hezká optika s LCD a LED^{*)}

JOSEF HUBEŇÁK

Pedagogická fakulta UHK, Hradec Králové

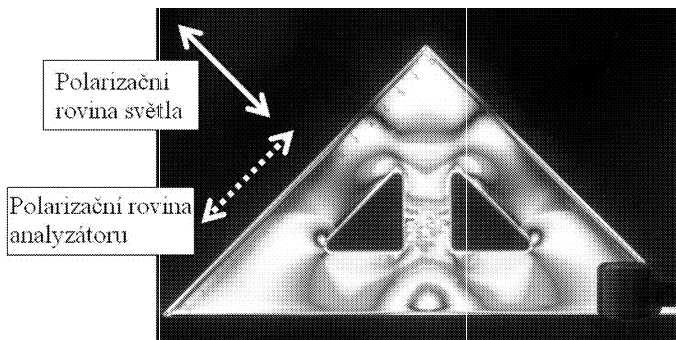
Jednou z posledních částí fyziky, kterou se na střední škole pokoušíme zaujmout naše studenty, je optika. Velmi propracovaná učebnice [1] je určena pro gymnázia a zahrnuje jak klasické, tak novější poznatky z optiky. Současná hodinová dotace na většině gymnázií vede k omezenému výběru povinného učiva a celá řada témat končí sportovně řečeno „voutu“ jako doporučené rozšiřující učivo. Převážně jde o aplikace a pokud se s nimi student zabývá jen letmo nebo vůbec ne, zaniká i důvod ke studiu fyziky. Jen stručný výčet témat „za čarou“ z této učebnice:

Odrazný hranol, optická vlákna, vláknová optika; Hranolový spektroskop; Barva světla, míšení barev; Použití rovinných zrcadel; Zvětšení optického zobrazení, zobrazovací rovnice kulového zrcadla; Optické vady zobrazení čočkou; Podmínky dobrého vidění, setrvačnost zrakového vjemu; Mikroskop, dalekohledy, snímací a projekční přístroje, dataprojektor; Michelsonův interferometr, interference na tenké vrstvě, Newtonova skla; Rozdělení ohybových jevů, omezení rozlišovací schopnosti optických přístrojů; Ohyb na optické mřížce; Holografie; Praktické využití polarizovaného světla; Přenos energie zářením; Luminiscence; Záření černého tělesa, kvantum záření a Planckův zákon; Historie objevu rentgenového záření a laueogram, rentgenová diagnostika; Rentgenová strukturní analýza, Braggova rovnice

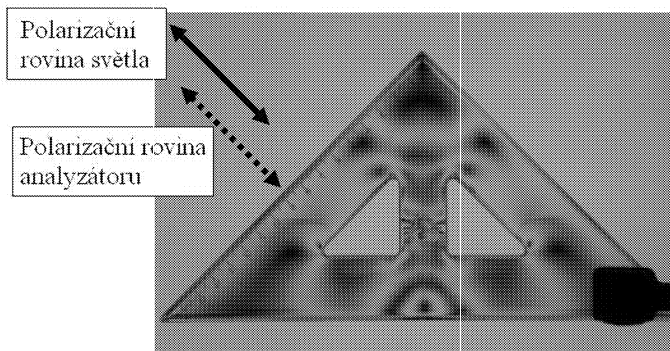
Základní vztahy a poznatky zůstávají ve hře, tvoří ale jen nezbytnou kostru optiky. I když je student zvládne, řadu zajímavých a každodenních

^{*)} Časopis MFI neumožňuje barevnou reprodukci vyobrazení v tomto příspěvku. Proto jsou všechny obrázky současně k nahlédnutí také na webových stránkách časopisu: <http://www.mfi.upol.cz>

setkání s optikou nespojí s fyzikou. Jako by navštívil krásnou zemi a projel ji po dálnici, nezastavil, než u čerpací stanice a MacDonalda. V této situaci může učitel žákům nabídnout alespoň pohled na technické využití optiky, jak ho dokládá učebnice [1] v barevné příloze na příkladu užití fotoelasticimetrie (obr. P-16).



Obr. 1

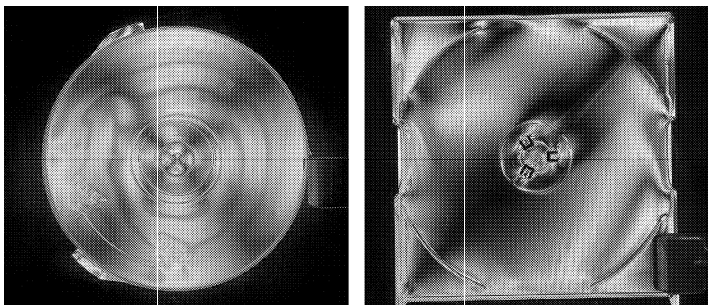


Obr. 2

Pro fyzika je takový obraz potěšením, ale pro studenta může být jen jedním z mnoha zrakových vjemů, které denně zachytí a pak zapomene. Dnes však máme skvělou možnost pozorovat podobné světelné „zázraky“ přímo. Zdrojem polarizovaného světla je LCD monitor počítače, pak potřebujeme jen vhodný polaroid jako analyzátor nebo digitální fotoaparát s polarizačním filtrem. Obr. 1 ukazuje trojúhelník mezi monitorem a analyzátořem,

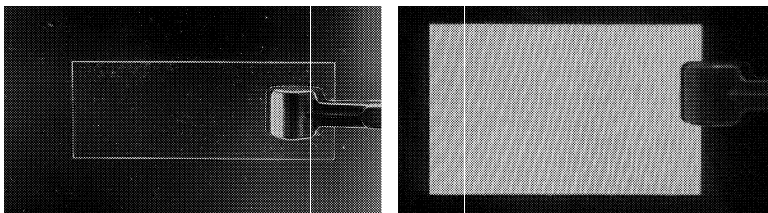
příčměž polarizační rovina polaroidu je kolmá k polarizační rovině světla. Pohled na trojúhelník v případě rovnoběžných polarizačních rovin světla a analyzátoru je na obr. 2.

Barevná pole se objeví i na víčku od krabice s cedéčkou (obr. 3 vlevo) nebo na obalu od CD (obr. 3 vpravo).



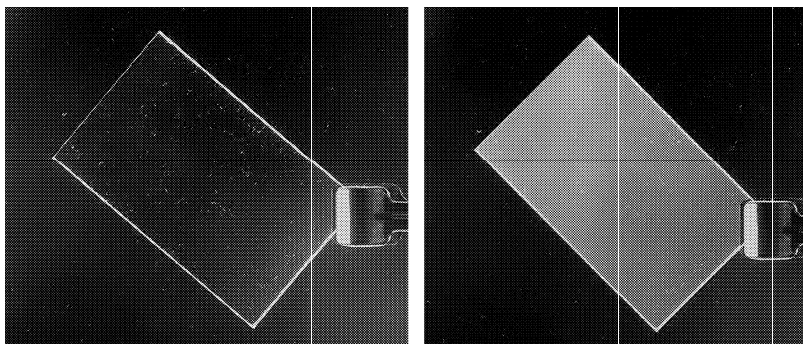
Obr. 3

Vysvětlit podstatu takových jevů není tak snadné a máme-li možnost a čas v hodinách fyzikálního semináře, můžeme nejprve sledovat průchod lineárně polarizovaného světla planoparalelní skleněnou deskou a deskou z organického skla – polymethylmetakrylátu (obr. 4). Vlevo je skleněná deska, která může být natočena libovolně a světlo neprojde. Organické sklo vpravo se chová jinak a výsledkem je purpurové zbarvení (na černobílém snímku se však plocha jeví jen jako šedivá).



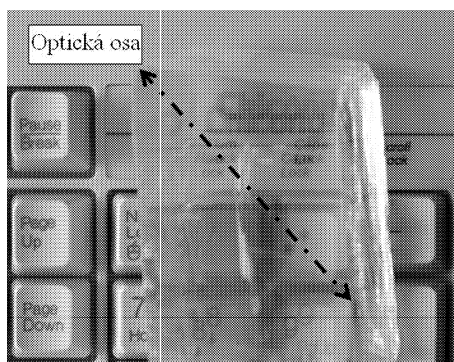
Obr. 4

I pro organické sklo najdeme polohu, kdy pole zůstane tmavé. Na obr. 5 je vlevo organické sklo skloněné o 45° , kdežto vpravo je vzorek otočen o něco více než 45° a opět se objeví zbarvení plochy.



Obr. 5

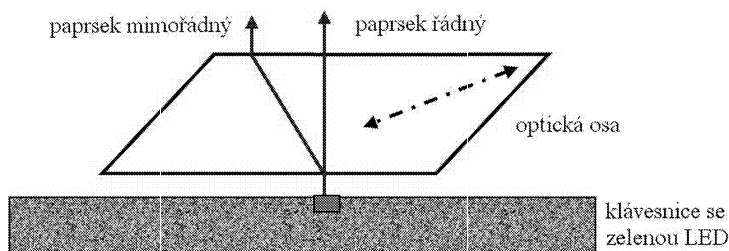
LCD monitor skládá své lineárně polarizované světlo ze tří složek – červené, zelené a modré. Purpurová barva je dokladem absence zelené složky. Jak k tomu došlo? Na úrovni střední školy nemůžeme použít teorii, kterou zájemce najde v učebnicích optiky pro vysoké školy [2], [3]. Experimentem ale můžeme dokázat, že existují opticky anizotropní látky a v nich se paprsek světla rozdělí na paprsek řádný, splňující zákon lomu a paprsek mimořádný, který směřuje jinak, dokonce i při kolmém dopadu na rozhraní. Obr. 6 ukazuje pohled na klávesnici počítače přes krystal islandského vápence.



Obr. 6

Tlačítko s hvězdičkou umožní rozhodnout, který obraz vznikl díky řádnému paprsku – hvězdička v úrovni znaménka mínus je řádná. Všechny

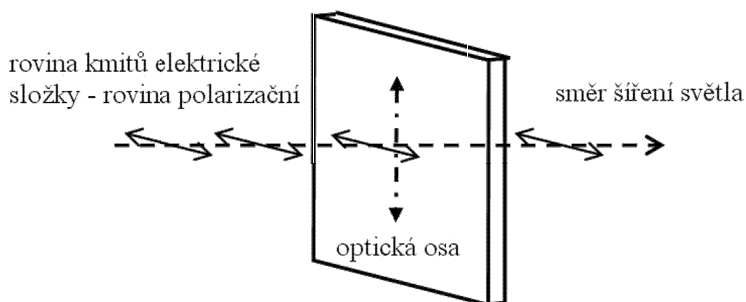
obrazy posunuté vlevo dolů pod úhlem asi 45° vznikly ve světle mimořádného paprsku. Polaroidem snadno zjistíme, že v „řádném obraze“ má světlo polarizační rovinu kolmou k rovině určené optickou osou a směrem šíření světla (rovinu hlavního řezu). Otočením polaroidu o 90° řádný obraz mizí a zůstane obraz tvořený mimořádným paprskem. Mimořádný paprsek má ještě jednu pozoruhodnou vlastnost: ačkoliv na spodní stěnu krystalu dopadl kolmo, zlomil se od kolmice, prošel krystalem šikmo a na výstupu se „srovnal“ do kolmice a pokračuje rovnoběžně s paprskem řádným. Pokud bychom paprsky mohli pozorovat z boku, bude šíření světla vypadat jako na obr. 7



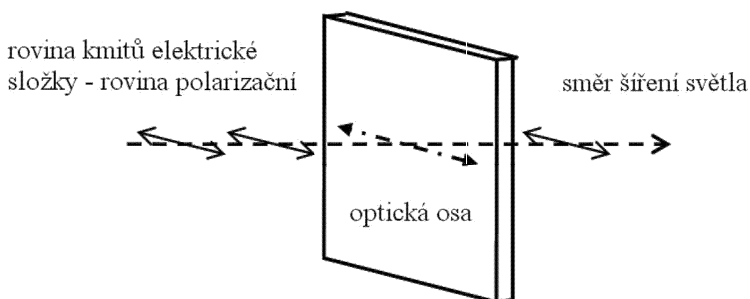
Obr. 7

Podstatné pro vysvětlení našich experimentů je to, že v anizotropním prostředí se lineárně polarizované světlo šíří jako dvě lineárně polarizovaná světla. Paprsek řádný (ordinární) je polarizován v rovině kolmé k rovině hlavního řezu a paprsek mimořádný (extraordinární) v rovině rovnoběžné s rovinou hlavního řezu. Další důležitou skutečností je, že paprsek procházející kolmo planparalelní deskou nemění svůj směr, pokud je optická osa vzorku rovnoběžná s povrchem desky. Ještě jednu vlastnost extraordinárního paprsku potřebujeme pro pochopení našich experimentů: extraordinární paprsek se šíří v anizotropním materiálu jinou rychlostí a má tedy jiný index lomu, než paprsek ordinární.

Deska z organického skla je také anizotropní materiál a její optická osa je rovnoběžná s povrchem desky. Světlo z displeje je lineárně polarizované a předpokládejme, že jeho polarizační rovina je kolmá na optickou osu. Na obr. 8 je situace, když lineárně polarizované světlo prochází jen jako řádný paprsek a na obr. 9 když prochází jen jako mimořádný paprsek. Obr. 8 a 9 ukazují případy, kdy po průchodu zůstane polarizační rovina beze změny. To je případ pozorování v tmavém poli, kdy organické sklo obraz neovlivní.

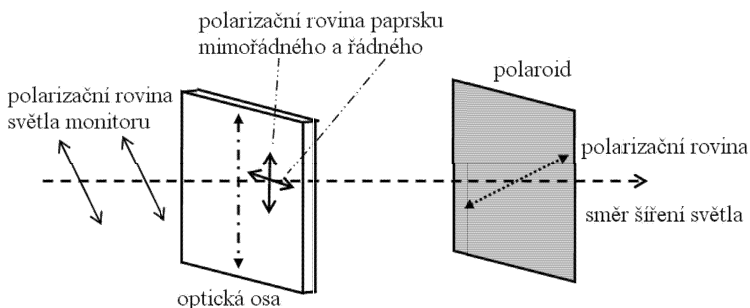


Obr. 8



Obr. 9

Z obr. 10 je zřejmé, proč tenká fólie „rozsvítí“ jinak temné zorné pole. Elektrické složky řádného a mimořádného paprsku mají nenulové průměty do polarizační roviny polaroidu. Tyto průměty již spolu interferují a dávají nenulový výsledek.



Obr. 10

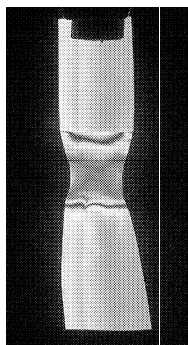
Barevné efekty souvisejí s různými rychlostmi šíření a tedy s rozdílnými indexy lomu paprsku řádného a mimořádného. Oba absolvují v anizotropním vzorku jiné optické dráhy a na výstupu ze vzorku o tloušťce d mají fázový rozdíl

$$\varphi = 2\pi \frac{(n_o - n_e)d}{\lambda}.$$

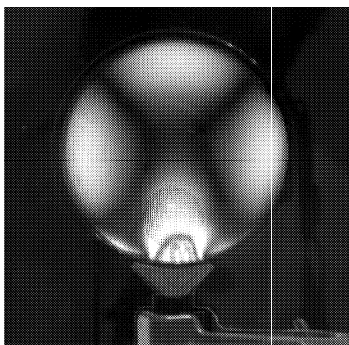
Jestliže je rozdíl fází φ násobek 2π , jsou na výstupu vzorku stejné složky ve vísle i vodorovné rovině a jejich složením dostaneme opět lineárně polarizované světlo v téže polarizační rovině, jako před vzorkem. Světlo s takovou vlnovou délkou polaroidem neprojde. Ostatní vlnové délky „rozsvítí“ obraz, ovšem tentokrát barevně. To ukazuje obr. 4 a 5 (vpravo). Je patrné, že v původně bílém světle chybí zelená barva. Ve světlém poli zelená projde a ostatní jsou naopak potlačeny.

Rozdíl indexů lomu ordinárního a extraordinárního paprsku je možné měnit mechanicky tlakem nebo tahem a v lisovaném trojúhelníku z plastu zůstanou místa s vnitřním pnutím. Trojúhelník má dostatečnou tloušťku pro vznik fázového posuvu a vytvoření barevných polí. Fólii z PVC lze vytáhnout po překročení meze pružnosti a dlouhé molekuly se přesouvají do jiného uspořádání – okamžitě vidíme barevné efekty (obr. 11).

Optické sklo je obvykle amorfní, ale při výrobě mohou zůstat v materiálu vnitřní pnutí, která lze zviditelnit. Např. při průchodu světla lupou se objevuje tmavý obrazec, který vzniká díky sbíhavosti svazku paprsků (obr. 12). Studenti by mohli najít vysvětlení – stačí si uvědomit, že tmavá místa jsou tam, kde vektor elektrické intenzity lineárně polarizovaného světla má nulový průmět do polarizační roviny polaroidu.



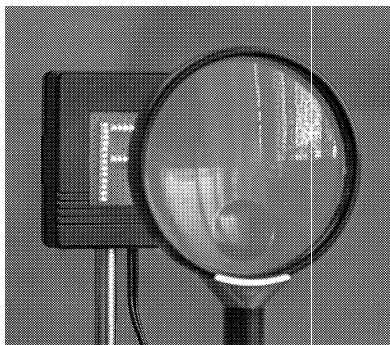
Obr. 11



Obr. 12

Polarizační filtr je jedinou problematickou potřebou k popsaným experimentům. Lze jej získat prakticky zdarma z vyřazených mobilních telefonů: po demontáži z displeje pouze odstraníme zadní neprůhlednou vrstvu.

Snadno dostupné LED mohou usnadnit i měření ohniskové vzdálenosti spojky. Na optické lavici se obvykle používá svítící předmět určený výřezem v plechu a osvětlený žárovkovým zdrojem. Svítící objekt ve tvaru písmene F (obr. 13) je sestaven ze 24 diod typu L-2060SRC. Jsou seskupeny do čtyř sériových skupin, takže napájení 12 V plně vyhovuje. Univerzální tištěný spoj má rozteč 2,5 mm a svislá část písmene je vysoká právě 30 mm. Diody mají poměrně malý vyzařovací úhel, takže při měření není nutné zatemnění a obraz lze promítnout i na stěnu místnosti.



Obr. 13

Měřením byly získány pro danou lupu údaje:

- předmětová vzdálenost $a = 21$ cm
- velikost předmětu $y = 3,0$ cm
- velikost obrazu $y' = -33$ cm
- obrazová vzdálenost $a' = 233$ cm

Pro výpočet ohniskové vzdálenosti lupy považované za tenkou spojku lze použít vzorec pro zvětšení

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{a - f}$$

a výpočtem dostaneme $f = 19,2$ cm.

Další možnost je ve vztahu

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{a' - f}{f}$$

a dostaneme blízkou hodnotu $f = 19,4$ cm.

Výhodou je měření poměrně velkých vzdáleností, kdy i rozměrnou lupu můžeme považovat za tenkou čočku. Konečně i rozsvícené velké písmeno F bude žákům připomínat, že poznávají fyziku.

L i t e r a t u r a

- [1] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia. Optika, Praha, Prometheus 2002 (3. přepracované vydání). ISBN 80-7196-237-4
- [2] *Malý, P.*: Optika, Karolinum, Praha 2008. ISBN 978-80-246-1342-0
- [3] *Štrba, A.*: Všeobecná fyzika 3 – Optika, ALFA, Bratislava a SNTL, Praha 1979.

Prekoncepce studentů o síle a pohybu

DITA ČÍŽKOVÁ – DANA MANDÍKOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

(Dokončení)

4 Celkové výsledky průzkumu z let 2006 a 2007

Celkové výsledky průzkumu jsou v následujících tabulkách 2 až 8, kde jsou uvedeny relativní četnosti nesprávných odpovědí pro jednotlivé úlohy.

U studentů obecné fyziky na MFF UK byl průměr nesprávných odpovědí výrazně nižší, než u studentů gymnázií. Všimněme si také, že ve druhém ročníku už nedochází k výraznému poklesu chybných fyzikálních představ. Je dobré si uvědomit, že přestože tito studenti dosáhli poměrně dobrých výsledků, více jak třetina z nich má špatné představy o základních fyzikálních zákonitostech.

Tabulka 2: MFF – 1. ročník fyzika – Relativní četnosti **nesprávných** odpovědí

Úloha	1	2	3	4	5	6	průměr
Skupina							
Chlapci	26	24	86	26	14	24	33
Dívky	44	56	78	56	22	56	52
Celkem	29	29	85	31	15	29	36

Tabulka 3: MFF – 2. ročník fyzika– Relativní četnosti **nesprávných** odpovědí

Úloha	1	2	3	4	5	6	průměr
Skupina							
Chlapci	11	6	77	31	11	43	30
Dívky	0	60	100	80	0	60	50
Ostatní	14	14	86	71	0	71	43
Celkem	11	13	81	43	9	49	34

Podíváme-li se na jednotlivé úlohy, vidíme, že těmto studentům dělala problémy nejčastěji úloha třetí, kde neúspěšnost přesahovala 80 %. Naopak nejvíce studentů odpovědělo správně na úlohu pátou.

Tabulka 4: MFF – 1. ročník učitelství – Relativní četnosti **nesprávných** odpovědí

Úloha	1	2	3	4	5	6	průměr
Skupina							
Chlapci	38	62	100	69	54	77	67
Dívky	75	100	100	100	50	50	79
Celkem	47	71	100	76	53	71	70

Srovnáme-li výsledky studentů učitelství s výsledky studentů obecné fyziky a s výsledky studentů gymnázií vidíme, že výsledky studentů učitelství se nacházejí přibližně mezi těmito dvěma skupinami.

Největší problémy dělala studentům opět třetí úloha, nikdo tuto úlohu nevyřešil správně. Naopak nejlépe si studenti poradili s úlohou první, ale i tam odpověděla téměř polovina studentů špatně. Alarmující je to především z hlediska toho, že velká část těchto studentů se stane v budoucnu učiteli (v případě studentů kombinovaného studia jimi již často jsou), kteří budou své znalosti předávat dále. Je proto důležité, aby jejich fyzikální představy byly správné.

Tabulka 5: Gymnázium A – Relativní četnosti **nesprávných** odpovědí

Úloha	1	2	3	4	5	6	průměr
Skupina							
Chlapci	85	93	100	89	93	96	93
Dívky	100	100	100	91	83	96	95
Celkem	92	96	100	90	88	96	94

Neúspěšnost studentů gymnázia A byla poměrně vysoká (94 % nesprávných odpovědí). Stejnou procentuální neúspěšnost dosáhly pak i obě třídy tohoto gymnázia.

I zde dělala studentům největší problémy třetí úloha, kterou nikdo ze studentů nevyřešil správně. Nejlépe dopadla v celkovém hodnocení úloha pátá, přesto ji vyřešilo správně pouze 12 % studentů.

Tabulka 6: Gymnázium L – Relativní četnosti **nesprávných** odpovědí

Úloha	1	2	3	4	5	6	průměr
Skupina							
Chlapci	70	96	100	96	91	100	92
Dívky	67	96	100	96	100	100	93
Celkem	68	96	100	96	96	100	93

Také studenti gymnázia L dosáhli poměrně vysoké neúspěšnosti (93 %). Zde byl při vyhodnocování patrný rozdíl mezi jednotlivými třídami, kdy jedna třída (L-b) dosáhla až 99 % neúspěchu, oproti tomu třída L-a 87 % neúspěchu. Možný rozdíl v úspěšnosti řešení testu u těchto tříd může být dán jejich odlišným zaměřením. Třída L-a měla přírodovědné zaměření, naopak třída L-b byla zaměřena na všeobecné vzdělání.

Zde dělala studentům největší potíže úloha třetí a šestá, ani jeden student nevyřešil tyto úlohy správně.

Tabulka 7: Gymnázium Š – Relativní četnosti **nesprávných** odpovědí

Úloha	1	2	3	4	5	6	průměr
Skupina							
Chlapci	86	81	95	76	76	86	83
Dívky	96	96	100	80	92	100	94
Celkem	91	89	98	78	85	93	89

U studentů gymnázia Š je procento neúspěšnosti ve srovnání s předšlými dvěma gymnázii trochu nižší (89 %). Výsledky obou tříd gymnázia Š se výrazně nelišily, neúspěšnost ve třídě Š-a byla 91 % a ve třídě Š-b 86 %.

Pro studenty, stejně jako u předchozích gymnázií, byla nejobtížnější třetí úloha. Neúspěšnost zde však už nedosahuje 100 %. Z toho vyplývá, že někteří studenti tuto úlohu řešili správně. Nejméně problematická byla pro studenty celkově úloha čtvrtá.

Tabulka 8: Gymnázium Ž – Relativní četnosti **nesprávných** odpovědí

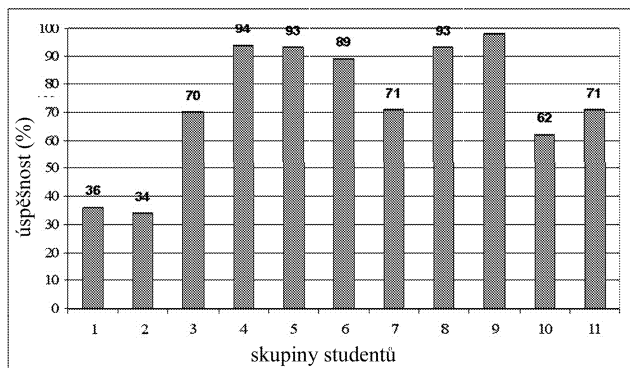
Úloha	1	2	3	4	5	6	průměr
Skupina							
Celkem	72	72	85	54	47	96	71

Ve srovnání s ostatními studenty gymnázií, s kterými byl průzkum prováděn, dosáhli studenti gymnázia Ž nejmenšího procenta neúspěšnosti (71 %). U gymnázia Ž byl poměrně velký rozdíl mezi jednotlivými třídami. Ve třídě Ž-a dosáhli studenti jednoho z nejhorších výsledků ve srovnání s ostatními gymnázii (98 % neúspěšnost) a naopak výsledky tříd Ž-b a Ž-c patřily mezi gymnázii k nejlepším (ve třídě Ž-b 67 % a ve třídě Ž-c dokonce 48 %). Žádná z uvedených tříd nebyla nějak konkrétně zaměřena. V obou třídách, které dosáhly lepších výsledků, vyučoval fyziku stejný učitel.

Největší problémy dělala studentům úloha třetí a úloha šestá. Dokonce i ve třídě, kde byl průměr nesprávných odpovědí nejnižší, řešilo šestou úlohu 96 % studentů špatně.

4 Srovnání s průzkumem z 80. let

V grafu 1 jsou uvedeny celkové výsledky (relativní četnosti **nesprávných** odpovědí) všech skupin studentů, které se průzkumu zúčastnily.



Graf 1

Skupiny a termín zadání testu

1. Studenti 1. ročníku MFF UK, obecná fyzika, 2006/07
2. Studenti 2. ročníku MFF UK, obecná fyzika, 2006/07
3. Studenti 1. ročníku MFF UK, učitelství ZŠ a SŠ, 2007/2008
4. Studenti 4. ročníku, Gymnázium A, 2006/07
5. Studenti 4. ročníku, Gymnázium L, 2006/07
6. Studenti 4. ročníku, Gymnázium Š, 2006/07
7. Studenti 4. ročníku, Gymnázium Ž, 2006/07
8. Studenti 4. ročníku, Gymnázium A, 1983/84
9. Studenti 4. ročníku, Gymnázium B, 1983/84
10. Studenti 1. ročníku MFF UK, obecná fyzika, 1981/82
11. Studenti 1. ročníku MFF UK, učitelství SŠ, 1981/82

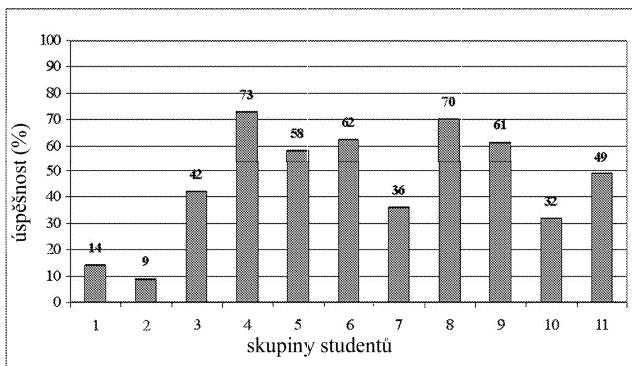
Z výsledků uvedených v grafu 1 vidíme, že nejlépe v průzkumu dopadli studenti 1. a 2. ročníku oboru obecné fyziky z roku 2006/07. Oproti studentům 1. ročníku oboru obecné fyziky z roku 1981/82 došlo u současných studentů k poměrně výraznému zlepšení.

Zaměříme-li se na výsledky studentů gymnázií, vidíme, že jejich neúspěšnost je téměř alarmující (pohybuje se okolo 90 %). Přestože toto zjištění bylo zarážející již v roce 1983/84 a v průběhu několika let bylo mnoho učitelů seznámeno s touto problematikou, vidíme, že o více než dvacet let později se úspěšnost studentů gymnázií při řešení těchto úloh zlepšila

pouze nepatrně. Konkrétněji při porovnání výsledků studentů gymnázií z roku 1983/84 a současných gymnázií A, L (jedná se o stejná gymnázia), pozorujeme, že výsledky jsou velmi podobné. Nejlepších výsledků mezi gymnázii dosáhlo gymnázium Ž, kde byl průzkum prováděn celkem ve třech třídách. Dvě z těchto tříd vedené stejným učitelem dopadly v průzkumu velmi dobře (vzhledem k výsledkům ostatních gymnázií), zbývající třída se řadila svými výsledky mezi nejhorší.

Z výsledků studentů učitelství vidíme, že během pětadvaceti let nedošlo k výraznému zlepšení, ale ani zhoršení. Studenti tehdy i nyní dosahují neúspěšnosti v řešení testu kolem 70 %.

V grafu 2 vidíme relativní četnosti odpovědí studentů, které vyjadřují představu, že pro každý pohyb tělesa je nutná síla působící ve směru pohybu. Uvedeny jsou opět výsledky všech skupin studentů, které se průzkumu zúčastnily.



Graf 2

Skupiny a termín zadání testu

1. Studenti 1. ročníku MFF UK, obecná fyzika, 2006/07
2. Studenti 2. ročníku MFF UK, obecná fyzika, 2006/07
3. Studenti 1. ročníku MFF UK, učitelství ZŠ a SŠ, 2007/2008
4. Studenti 4. ročníku, Gymnázium A, 2006/07
5. Studenti 4. ročníku, Gymnázium L, 2006/07
6. Studenti 4. ročníku, Gymnázium Š, 2006/07
7. Studenti 4. ročníku, Gymnázium Ž, 2006/07
8. Studenti 4. ročníku, Gymnázium A, 1983/84
9. Studenti 4. ročníku, Gymnázium B, 1983/84
10. Studenti 1. ročníku MFF UK, obecná fyzika, 1981/82
11. Studenti 1. ročníku MFF UK, učitelství SŠ, 1981/82

Z grafu pozorujeme, že nejméně se tato představa vyskytovala u studentů 1. a 2. ročníku oborů obecné fyziky z roku 2006/07. V porovnání se studenty obecné fyziky z roku 1981/82 vidíme, že u současných studentů došlo k poklesu výskytu této představy.

U studentů gymnázií se tato představa vyskytovala nejvíce. Při porovnání výsledků studentů gymnázií A, L z roku 2006/07 a studentů gymnázií A, B z roku 1983/84 vidíme, že nedošlo k výrazným změnám.

Studenti učitelství na MFF UK dosáhli velmi podobných výsledků jako jejich předchůdci z roku 1981/82.

6 Závěr

Přestože problematika prekonceptů je již delší dobu známá, stále se nedaří, zejména na středních školách, vyrovnávat se s nesprávnými představami studentů. Aktuální otázkou tedy stále zůstává, jak vést výuku, aby byly chybné prekoncepty nahrazeny představami správnými. V rámci průzkumu provedeného na gymnáziích byly učitelům fyziky v testovaných třídách zadány dotazníky, které se týkaly jejich povědomí o problematice prekonceptů. Z odpovědí bylo patrné, že přístup učitelů k prekonceptům studentů je velmi rozdílný. Od toho se odvíjí také přístup učitelů k výuce a efektivnost výuky. Ukázalo se, že studenti, jejichž učitelé se o tuto problematiku zajímají, dopadli v průzkumu o něco lépe než studenti, jejichž učitelé nepovažují problematiku prekonceptů studentů za důležitou. I když tento rozdíl nebyl nijak výrazný, úspěšnost jednotlivých tříd ovlivňuje samozřejmě i řada dalších faktorů a vzhledem k malému počtu zúčastněných nelze vyvozovat žádné obecnější závěry, je to příjemné zjištění.

Literatura

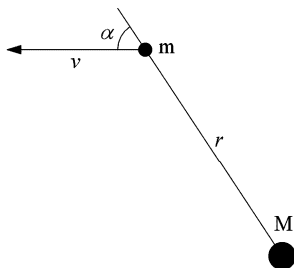
- [1] Čížková, D.: Prekoncepty studentů o síle a pohybu. Diplomová práce. Praha, MFF UK 2009.
- [2] Hejnová, D.: Představy studentů o základních vlastnostech pohybu makroskopických těles. Diplomová práce. Praha, MFF UK 1984.
- [3] Nachtigall, D.: The Pre-Newtonian Concept of Motion in the Minds of Students. Referát na konferenci: Methods of Teaching Physics. Khon Kaen University, Thailand, 1981.

Dráhy planet

PETR ŠLECHTA

Na střední škole se zpravidla učí, že dráhy planet jsou elipsy se Sluncem v ohnisku. Také se učí, že tento fakt je možné dokázat z Newtonova gravitačního zákona. Příslušný důkaz se však probírá až na vysoké škole pomocí složité matematiky a středoškolákovi je tak nepřístupný. Cílem textu je nabídnout jednodušší alternativu, srozumitelnou i studentovi střední školy. Aby byl důkaz plnohodnotný, bylo by třeba některé detaily dále rozvést. Tím by však utrpěla srozumitelnost, proto byla zvolena tato forma.

Na obr. 1 je Slunce označeno M, planeta m. Vzdálenost planety od Slunce je r . Velikost rychlosti pohybu planety je v a směr této rychlosti je určen úhlem α .



Obr. 1

Vyjdeme z faktu, že gravitační síla působí přímo ke Slunci a její moment síly je tedy nulový. Moment hybnosti tedy zůstává konstantní a je jedním z parametrů výsledné dráhy. Dále předpokládáme, že na těleso kromě gravitace Slunce nepůsobí jiné síly. Proto je celková energie (potenciální plus kinetická) také konstantní a je druhým parametrem. Nulovou hodnotu potenciální energie zvolíme v nekonečnu, proto hodnota celkové energie musí být záporná, aby se těleso soustavu neopustilo. V našem případě lze moment hybnosti L a energii E vyjádřit takto:

$$L = mrv \sin \alpha$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\kappa Mm}{r}$$

Tyto dvě rovnice určují vztahy mezi veličinami r , v a α . Jelikož nám jde jen o tvar dráhy a ne o rychlost pohybu po ní, zbavíme se veličiny v . Vyjádříme v z první rovnice:

$$v = \frac{L}{mr \sin \alpha}$$

a dosadíme do druhé rovnice:

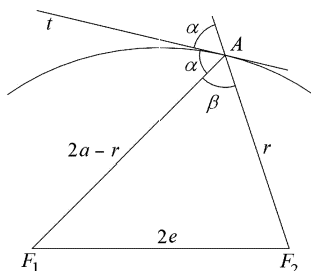
$$E = \frac{L^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} - \frac{\kappa M m}{r}$$

Získáváme rovnici, v níž jsou veličiny r a α . Pokud tedy známe polohu planety, můžeme spočítat úhel α a zjistíme, kterým směrem dráha pokračuje. Tím je tvar dráhy zcela určen. Upravíme tedy rovnici do tvaru, který nám umožní snadné určení úhlu α ze vzdálenosti r :

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{2\kappa M m^2}{L^2} r + \frac{2mE}{L^2} r^2 \quad (1)$$

Rovnice (1) tedy určuje tvar dráhy. Víme, že dráha by měla být elipsa se Sluncem v ohnisku. Zkusíme tedy ověřit, že pro elipsu platí stejný vztah jako (1).

Na obr. 2 je zobrazen úsek elipsy s ohnisky F_1 a F_2 , délkami poloos a a b a výstředností e . Bod A je bodem elipsy. Planeta je v bodě A a Slunce je v ohnisku F_2 . Úhel určuje sklon tečny t a průvodiče F_2A , jako tomu bylo na obr. 1. Průvodič F_1A svírá s tečnou t stejný úhel. V elipse se totiž paprsek vycházející z jednoho ohniska odrazí do druhého ohniska.



Obr. 2

Nyní najdeme vztah mezi úhlem α a vzdáleností r . To lze provést pomocí kosinové věty, protože známe délky všech stran trojúhelníka $F_1 F_2 A$. Musíme si jen vyjádřit velikost úhlu β pomocí úhlu α a také budeme potřebovat $\cos \beta$:

$$\begin{aligned}\beta &= \pi - 2\alpha \\ \cos \beta &= \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2 \sin^2 \alpha - 1\end{aligned}$$

Podle kosinové věty

$$4e^2 = r^2 + (2a - r)^2 - 2r(2a - r) \cos \beta.$$

Dosadíme za $\cos \beta$ spočítaný výraz a dostaneme:

$$4e^2 = r^2 + (2a - r)^2 - 2r(2a - r)(2 \sin^2 \alpha - 1)$$

Získaný vztah upravíme a vyjádříme $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$:

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{2a}{a^2 - e^2}r - \frac{1}{a^2 - e^2}r^2$$

Jelikož pro elipsu platí $a^2 = b^2 + e^2$, lze vztah zjednodušit na

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{2a}{b^2}r - \frac{1}{b^2}r^2. \quad (2)$$

Je vidět, že vztahy (1) a (2) jsou stejné, tedy planeta obíhá skutečně po elipse. Srovnáním koeficientů u obou rovnic dostaneme:

$$\begin{aligned}\frac{2a}{b^2} &= \frac{2\kappa M m}{L^2} \\ -\frac{1}{b^2} &= \frac{2mE}{L^2}\end{aligned}$$

Vyjádříme velikosti obou poloos elipsy a dostaneme (těch mínusů se netřeba bát, protože E je záporné):

$$\begin{aligned}a &= -\frac{\kappa M m}{2E} \\ b &= \frac{L}{\sqrt{-2mE}}\end{aligned}$$