

FYZIKA

Teoretické úlohy celostátního kola 50. ročníku FO



Ve dnech 26. února až 1. března 2009 se v Praze uskutečnilo celostátní kolo 50. ročníku fyzikální olympiády (viz zprávu v MFI 18 (2009), č. 9, s. 573). V příspěvku uvádíme zadání i řešení teoretických úloh, jejichž autory jsou prof. RNDr. Ivo Volf, CSc. (úloha 1), PhDr. Miroslava Jarešová, Ph.D. (úloha 2), 3 a 4. úloha jsou převzaty z časopisu Kvant. Konečnou úpravu úloh provedl PaedDr. Přemysl Šedivý.

1. Pohyby v planetární soustavě (úloha k Mezinárodnímu roku astronomie)

O planetě Marsu zjistili astronomové na základě měření provedených z povrchu Země, že doba oběhu (siderická) je $T_M = 1,881$ roku. Trajektorii Země je možno považovat za kružnici (vzdálenost Země od Slunce je $r_Z = 1,000$ AU), ale trajektorie Marsu je eliptická s číselnou výstředností 0,0934. Obě trajektorie leží přibližně ve stejné rovině.

- Z uvedených údajů určete délku hlavní poloosy a a vedlejší poloosy b trajektorie Marsu, vzdálenost r_a Marsu od Slunce v aféliu a vzdálenost r_p v periheliu.
- Určete plošnou rychlost w Marsu (tj. plochu opsanou jeho průvodičem za jednotku času), velikost v_a jeho rychlosti v aféliu a velikost v_p jeho rychlosti v periheliu. Jak závisí poměr hodnot v_p , v_a na číselné výstřednosti trajektorie Marsu?
- Určete hodnoty k_{sa} , k_{sp} solární konstanty v okolí Marsu při jeho průchodech aféliem a periheliem, je-li solární konstanta v okolí Země $k_{sZ} =$

$= 1\,360 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Jak závisí poměr hodnot k_{sp} , k_{sa} na číselné výstřednosti trajektorie Marsu?

- d) Pro cestu z okolí Země do okolí Marsu je energeticky optimální pohyb po trajektorii tvaru elipsy, která se vně dotýká trajektorie Země a uvnitř trajektorie Marsu. Situaci načrtněte. Jaká by byla doba pohybu kosmické lodě z okolí Země do okolí Marsu, kdyby se v okamžiku přiblížení nacházel 1) v periheliu, 2) v aféliu?

Při řešení počítejte, že $1 \text{ AU} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $1 \text{ rok} = T_Z = 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}$. Ve výsledku volte „rozumný“ počet platných míst.

Řešení

1. a) Vyjdeme z 3. Keplerova zákona $\frac{r_a^3}{a^3} = \frac{T_Z^2}{T_M^2}$, z čehož

$$a = \sqrt[3]{\left(\frac{T_M}{T_Z}\right)^2} r_Z = 1,524 \text{ AU} = 2,280 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

Dále platí

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0,9956a = 1,517 \text{ AU} = 2,270 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

$$r_p = a(1 - \varepsilon) = 0,9066a = 1,381 \text{ AU} = 2,067 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

$$r_a = a(1 + \varepsilon) = 1,0934a = 1,666 \text{ AU} = 2,493 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

3 body

b) Za dobu T_M opíše průvodič Marsu plochu $S = \pi ab = 1,625 \cdot 10^{23} \text{ m}^2$. Plošná rychlost Marsu je tedy

$$w = \frac{S}{T_M} = \frac{\pi ab}{T_M} = 2,738 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Platí $w = \frac{v_p r_p}{2} = \frac{v_a r_a}{2}$. Z toho

$$v_p = \frac{2w}{r_p} = 26,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \quad v_a = \frac{2w}{r_a} = 22,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1,21.$$

2 body

c) Pro zářivý tok Φ_e , dopadající ze Slunce o zářivém výkonu L kolmo na plochu o obsahu S ve vzdálenosti r od Slunce, platí $\Phi_e = \frac{L}{4\pi r^2} S$.

Pro Zemi platí $k_{sZ} = \frac{\Phi_e}{S} = \frac{L}{4\pi r_Z^2}$, analogicky pro Mars v aféliu můžeme psát $k_{sa} = \frac{L}{4\pi r_a^2}$, a v periheliu $k_{sp} = \frac{L}{4\pi r_p^2}$. Z toho

$$\frac{k_{sa}}{k_{sZ}} = \left(\frac{r_Z}{r_a}\right)^2, \quad k_{sa} = \left(\frac{r_Z}{r_a}\right)^2 k_{sZ} = 490 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2},$$

$$\frac{k_{sp}}{k_{sZ}} = \left(\frac{r_Z}{r_p}\right)^2, \quad k_{sp} = \left(\frac{r_Z}{r_p}\right)^2 k_{sZ} = 713 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

$$\frac{k_{sp}}{k_{sa}} = \left(\frac{r_a}{r_p}\right)^2 = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 = 1,45.$$

2 body

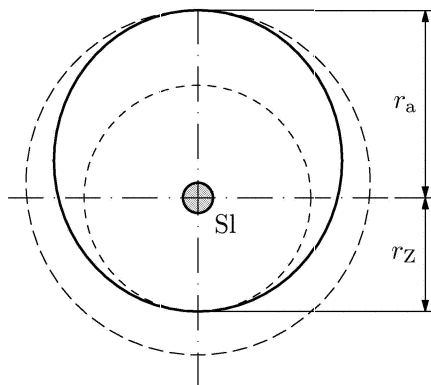
d) Situace v případě, že k přiblížení stanice k Marsu dojde, když je Mars v aféliu, je zobrazena na obr. R1. Hlavní poloosa trajektorie kosmické stanice má délku $a_1 = (r_Z + r_a)/2$. Podle 3. Keplerova zákona je doba oběhu stanice na této trajektorii

$$T_1 = \sqrt{\left(\frac{a_1}{r_Z}\right)^3} T_Z = 1,54 \text{ roku} = 562 \text{ dní}.$$

Jestliže k přiblížení stanice k Marsu dojde, když je v periheliu, má hlavní poloosa trajektorie kosmické stanice délku $a_2 = (r_Z + r_p)/2$ a doba oběhu stanice na této trajektorii je

$$T_2 = \sqrt{\left(\frac{a_2}{r_Z}\right)^3} T_Z = 1,30 \text{ roku} = 475 \text{ dní}.$$

Doba letu kosmické lodi v prvním případě je $\frac{T_1}{2} = 281$ dní, v druhém případě $\frac{T_2}{2} = 237$ dní.



Obr. R1

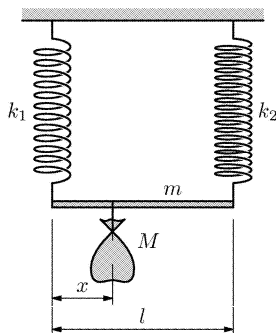
3 body

2. Pružiny

Na obr. 1 je znázorněna soustava dvou pružin zanedbatelné hmotnosti o tuhostech k_1 a k_2 , jejichž konce jsou spojeny homogenní tyčí stálého průřezu o délce l a hmotnosti m . Obě pružiny měly v nezatíženém stavu (před spojením konců pružin tyčí) stejnou délku. Na tyč zavěsíme jako závaží sáček s broky o hmotnosti M .

- Určete souřadnici $x \in \langle 0; l \rangle$ místa na tyči, kam musíme zavěsit závaží, aby tyč zůstala ve vodorovné poloze. Jaká bude v tomto případě deformace obou pružin?
- Tyč spojující konce pružin odstraníme a všechny broky rozdělíme do dvou sáčků o hmotnostech m_1 a m_2 , z nichž první zavěsíme na pružinu o tuhosti k_1 a druhý na pružinu o tuhosti k_2 . Jaký musí být poměr $p = m_1/m_2$, aby prodloužení obou pružin bylo stejné?
- Odvoďte vztah pro výpočet celkové elastické energie obou pružin jako funkce poměru p . Určete, pro jakou hodnotu p bude tato energie minimální a pro kterou maximální. Vypočítejte její velikosti.

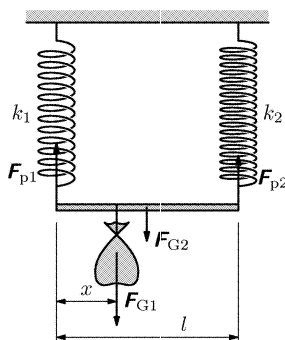
Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $M = 500 \text{ g}$, $m = 100 \text{ g}$, $l = 20 \text{ cm}$, $k_1 = 16 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $k_2 = 32 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Obr. 1

Řešení

2. a) Označme F_{p1} , F_{p2} síly, kterými působí pružiny na tyč, $F_{G1} = Mg$, $F_{G2} = mg$ tíhové síly (obr. R2).



Obr. R2

Podle momentové věty platí

$$F_{p1} \cdot l = F_{G1} \cdot (l - x) + F_{G2} \cdot \frac{l}{2}, \quad F_{p2} \cdot l = F_{G1} \cdot x + F_{G2} \cdot \frac{l}{2},$$

z čehož $F_{p1} = Mg \frac{l-x}{l} + \frac{1}{2}mg$, $F_{p2} = Mg \frac{x}{l} + \frac{1}{2}mg$.

Protože tyč je uchycená na pružinách, platí také $F_{p1} = k_1 y_1$, $F_{p2} = k_2 y_2$. Má-li tyč zůstat ve vodorovné poloze, musí platit $y_1 = y_2$, tj.

$$\left(Mg \frac{l-x}{l} + \frac{1}{2}mg\right) \frac{1}{k_1} = \left(Mg \frac{x}{l} + \frac{1}{2}mg\right) \frac{1}{k_2},$$

z čehož

$$x = \frac{Mk_2 + \frac{1}{2}m(k_2 - k_1)}{M(k_1 + k_2)}l = \frac{k_2(2M + m) - k_1m}{2M(k_1 + k_2)}l.$$

Diskuze: Výsledek řešení vyhovuje úloze, jestliže $0 \leq x \leq l$. Musí tedy platit

$$k_2(2M + m) - k_1m \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_2}{k_1} \geq \frac{m}{2M + m}$$

a současně

$$\frac{k_2(2M + m) - k_1m}{2M(k_1 + k_2)} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad k_2(2M + m) - k_1m \leq 2M(k_1 + k_2),$$

$$\frac{k_2}{k_1} \leq \frac{2M + m}{m}.$$

Pro dané hodnoty k_1, k_2, m a M jsou tyto podmínky splněny a po dosazení dostaneme $x = 14$ cm.

$$\text{Pružiny se prodlouží o } y = y_1 = y_2 = \frac{F_{G1} + F_{G2}}{k_1 + k_2} = \frac{(M+m)g}{k_1 + k_2} = 12 \text{ cm.}$$

4 body

b) Má-li platit $y_1 = y_2$, pak $\frac{m_1 g}{k_1} = \frac{m_2 g}{k_2}$. Z toho $p = \frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2}$. Pro dané hodnoty je $p = 0,5$.

1 bod

c) Po rozdělení broků do dvou sáčků platí $m_1/m_2 = p$, $m_1 + m_2 = M$. Z toho

$$m_1 = \frac{pM}{1+p}, \quad m_2 = \frac{M}{1+p}.$$

Celková elastická energie pružin je

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}k_1 y_1^2 + \frac{1}{2}k_2 y_2^2 = \frac{m_1^2 g^2}{2k_1} + \frac{m_2^2 g^2}{2k_2} = \\ &= \frac{M^2 g^2}{2} \left(\frac{p^2}{k_1(1+p)^2} + \frac{1}{k_2(1+p)^2} \right) = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{k_2 p^2 + k_1}{(1+p)^2}. \end{aligned}$$

2 body

Nyní tento výraz zderivujeme podle p . Dostaneme

$$\frac{dE}{dp} = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{2k_2 p(1+p)^2 - (k_2 p^2 + k_1) \cdot 2(1+p)}{(1+p)^4} = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{2(k_2 p - k_1)}{(1+p)^3}.$$

Položíme-li tuto druhou derivaci rovnou nule a vyjádříme p , dostaneme

$$p = \frac{k_1}{k_2}.$$

Pro $p > k_1/k_2$ je $\frac{dE}{dp} > 0$, funkce je rostoucí. Pro $p < k_1/k_2$ je $\frac{dE}{dp} < 0$, funkce je klesající.

Pro $p = \frac{k_1}{k_2}$ je tedy celková elastická energie pružin minimální a má hodnotu

$$E_{\min} = \frac{M^2 g^2}{2k_1 k_2} \cdot \frac{k_2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + k_1}{\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)^2} = \frac{M^2 g^2}{2(k_1 + k_2)}.$$

Pro dané hodnoty je $E_{\min} = 0,25$ J.

Celková elastická energie pružin je maximální v krajních případech, tedy buď pro $p = 0$, kdy má hodnotu $E = \frac{M^2 g^2}{2k_2}$, nebo pro $p = \infty$, kdy má hodnotu $E = \frac{M^2 g^2}{2k_1}$. V našem případě je $E_{\max} = 0,75$ J pro $p = \infty$.

Poznámka

Minimum elastické energie tedy nastává pro situaci, kdy $y_1 = y_2$, což plyne z výsledku úlohy b).

3 body

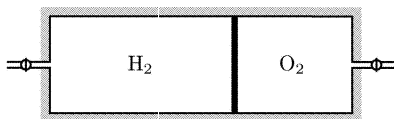
3. Válec s pístem

Dokonale tepelně izolovaná válcová nádoba o celkovém objemu $V = 20,0$ dm³ je rozdělena na dvě části lehce pohyblivým pístem zanedbatelné hmotnosti (obr. 2). Do levé části nádoby napustíme vodík o hmotnosti $m_1 = 3,00$ g a teplotě $T_1 = 300$ K, do pravé části kyslík o hmotnosti $m_2 = 16,0$ g a teplotě $T_2 = 400$ K. Píst slabě vede teplo a teploty v obou částech nádoby se postupně vyrovnají.

- a) Určete počáteční objemy vodíku a kyslíku V_1 , V_2 a počáteční tlak p_0 plynů v nádobě.

- b) Určete teplotu T , tlak p' a objemy V'_1, V'_2 plynů po vyrovnání teplot.
 c) Určete teplo, které během celého děje projde pístem.

Vnitřní energie n molů ideálního plynu s dvouatomovými molekulami je $\frac{5}{2}nRT$.



Obr. 2

Řešení

3 a) Ze stavové rovnice ideálního plynu odvodíme:

$$p_0 V_1 = n_1 R T_1, \quad p_0 V_2 = n_2 R T_2, \quad p_0 V = R(n_1 T_1 + n_2 T_2),$$

kde $n_1 = m_1/M_{m1} = 1,4881$ mol, $n_2 = m_2/M_{m2} = 0,500$ mol jsou látková množství vodíku a kyslíku. Z toho

$$p_0 = \frac{R(n_1 T_1 + n_2 T_2)}{V} = 2,69 \cdot 10^5 \text{ Pa},$$

$$V_1 = V \frac{n_1 T_1}{n_1 T_1 + n_2 T_2} = 13,8 \text{ dm}^3, \quad V_2 = V \frac{n_2 T_2}{n_1 T_1 + n_2 T_2} = 6,2 \text{ dm}^3.$$

3 body

b) Protože nádoba je dokonale tepelně izolovaná, je celková vnitřní energie U obou plynů konstantní. Ze zákona zachování energie plyne

$$U = \frac{5}{2} n_1 R T_1 + \frac{5}{2} n_2 R T_2 = \frac{5}{2} (n_1 + n_2) R T \Rightarrow T = \frac{n_1 T_1 + n_2 T_2}{n_1 + n_2} = 325 \text{ K}.$$

Po vyrovnání teplot je objem jednoho molu vodíku stejný jako objem jednoho molu kyslíku. Platí

$$V'_1 : V'_2 : V = n_1 : n_2 : (n_1 + n_2),$$

$$V'_1 = \frac{n_1 V}{n_1 + n_2} = 15,0 \text{ dm}^3, \quad V'_2 = \frac{n_2 V}{n_1 + n_2} = 5,0 \text{ dm}^3,$$

$$p'V_1' + p'V_2' = p'V = (n_1 + n_2)RT = n_1RT_1 + n_2RT_2,$$

$$p' = \frac{R(n_1T_1 + n_2T_2)}{V} = p_0.$$

4 body

c) Podle předpokladu píst vede teplo slabě, proto se teploty vyrovnávají pomalu a děj můžeme považovat za rovnovážný. Jestliže v určitém okamžiku teplota vodíku stoupne na hodnotu T_1^* a teplota kyslíku klesne na hodnotu T_2^* , platí podle zákona zachování energie

$$U = \frac{5}{2}n_1RT_1^* + \frac{5}{2}n_2RT_2^* = \frac{5}{2}n_1RT_1 + \frac{5}{2}n_2RT_2 = \text{konst.}$$

Tlak plynů v daném okamžiku je

$$p^* = \frac{R(n_1T_1^* + n_2T_2^*)}{V} = \frac{R(n_1T_1 + n_2T_2)}{V} = p_0.$$

Tlak plynů v nádobě se tedy během děje nemění, jedná se tedy u vodíku, jehož teplota vzroste, o izobarickou expanzi a u kyslíku, jehož teplota poklesne, o izobarickou kompresi. Teplo Q , které kyslík předá vodíku, je rovno součtu přírůstku vnitřní energie vodíku a práce vykonané vodíkem při posunutí pístu. Platí

$$\begin{aligned} Q &= \frac{5}{2}n_1R(T - T_1) + p_0(V_1' - V_1) = \frac{5}{2}n_1R(T - T_1) + n_1R(T - T_1) = \\ &= \frac{7}{2}n_1R(T - T_1) = \frac{7n_1n_2}{2(n_1 + n_2)}R(T_2 - T_1) = 1\,090 \text{ J.} \end{aligned}$$

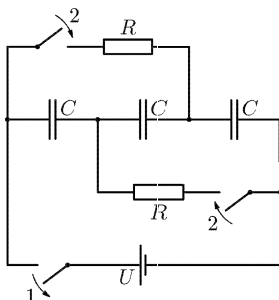
3 body

4. Tři kondenzátory

Tři stejné kondenzátory s kapacitou C byly sériově připojeny ze zdroji o svorkovém napětí U . Po odpojení zdroje ke kondenzátorům současně připojíme dva rezistory o stejném odporu R podle obr. 3.

- Na jaké hodnotě se ustálí napětí na jednotlivých kondenzátorech?
- Jaké teplo se během přechodného děje uvolní na každém z rezistorů?

- c) Vysvětlíte, proč v určitém okamžiku bude na prostředním kondenzátoru nulové napětí. Jaký proud bude v tomto okamžiku procházet rezistory?



Obr. 3

Řešení

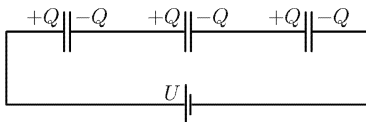
4. a) Po připojení kondenzátorů ke zdroji bylo na každém z nich stejné napětí $U/3$ a na jejich deskách byly stejné náboje o velikosti $+Q$ a $-Q$ (obr. R3).

$$Q = \frac{CU}{3}.$$

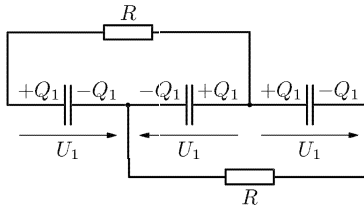
Po odpojení zdroje a připojení rezistorů dojde k přenosu nábojů mezi deskami kondenzátorů, které tvoří dvě samostatné izolované soustavy (obr. R4). Do první patří levá deska levého kondenzátoru, pravá deska prostředního kondenzátoru a levá deska pravého kondenzátoru. Do druhé patří zbývající desky. Po proběhnutí přechodného děje zaniknou proudy v rezistorech a spojené desky budou mít stejný potenciál. Napětí na všech třech kondenzátorech bude mít stejnou velikost U_1 , ovšem na prostředním kondenzátoru bude jeho polarita opačná než na počátku děje. Náboje na deskách všech tří kondenzátorů budou proto mít stejnou velikost $+Q_1$ a $-Q_1$. Ze zákona zachování náboje plyne

$$Q = 3Q_1, \quad U_1 = \frac{Q_1}{C} = \frac{Q}{3C} = \frac{U}{9}.$$

4 body



Obr. R3



Obr. R4

b) Joulovo teplo Q_j , které se během přechodného děje uvolní na obou rezistorech, je rovno rozdílu energie kondenzátorů na začátku a na konci děje:

$$Q_j = 3 \cdot \frac{1}{2} C \left(\frac{U}{3} \right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} C U_1^2 = \frac{4}{27} C U^2.$$

Na každém z rezistorů se uvolní teplo $\frac{2}{27} C U^2$.

3 body

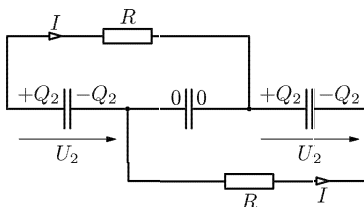
c) Napětí na prostředním kondenzátoru mění v určitém okamžiku přechodného děje polaritu. V tomto okamžiku je nulové a situaci znázorňuje obr. R5. Na krajních kondenzátorech je v tomto okamžiku stejné napětí U_2 a na jejich deskách jsou náboje $+Q_2$ a $-Q_2$. Podle zákona zachování náboje platí

$$2Q_2 = Q, \quad U_2 = \frac{Q_2}{C} = \frac{Q}{2C} = \frac{U}{6}.$$

Stejně je v daném okamžiku i napětí na rezistorech, takže jimi prochází proud

$$I = \frac{U_2}{R} = \frac{U}{6R}.$$

3 body



Obr. R5

Krabí mlhovina ve fyzikální výuce na gymnáziu

VLADIMÍR ŠTEFL – ZDENĚK NAVRÁTIL

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Tematický celek **Astrofyzika** u nás přes půl století tradičně vyučovaný v závěru fyzikální gymnaziální výuky, byl necitlivě a nelogicky v *RVP GV* [1] zcela vypuštěn. V situaci rostoucího zájmu žáků o astrofyziku nebudou mít nyní možnost získat žádoucí ucelenější pohled na tuto moderní vědu a metody, které při výzkumu vesmíru používá.

Zdůvodnění odstranění astrofyzikálního celku z obsahu výuky údajně vychází z požadavku gymnaziálních učitelů fyziky pilotních škol, na kterých se ověřovaly *RVP GV*. Podle jejich názoru je potřebné vytvořit dostatečný časový prostor, aby žáci získali příležitost kompetence skutečně využít při řešení problémů a úloh. K tomu má vést redukce vzdělávacího obsahu a jeho soustředění na vzájemně propojené fundamentální fyzikální pojmy a zákony.

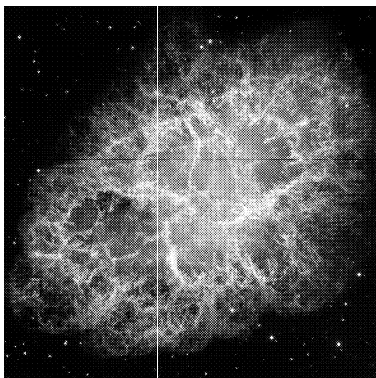
Zbývá možnost zařazování vybraných dílčích astrofyzikálních témat do fyzikální výuky. Článek podává návrh využití základních fyzikálních pojmů a zákonů při interpretaci dějů v Krabí mlhovině a jejím pulsaru – neutronové hvězdě. Z druhé strany je dílčím příspěvkem k řešení začleňování moderní astrofyziky do obsahu fyzikální výuky na gymnáziu. Je však třeba zdůraznit, že takto lze získávat pouze izolovanější struktury vědomostí případně dovedností k nim se vztahujících.

Transformace do výuky mechaniky

Pulsar ve středu Krabí mlhoviny má z hlediska makro popisu analogické vlastnosti jako tuhé těleso. Můžeme toho využít v tematickém celku **Mechanika** v tématu **Mechanika tuhého tělesa**. Pojmy *rotační perioda*, *moment setrvačnosti*, *úhlová rychlost*, *úhlové zrychlení* respektive *zpomalení*, *kinetická energie rotujícího tělesa*, *zákon zachování momentu hybnosti*, *zákon zachování energie* tak lze v souladu s pojetím vzdělávacího oboru Fyzika v *RVP GV* procvičit pro žáky v přitažlivé a zajímavé astrofyzikální problematice. Takto pojatá aplikace umožní lepší prohlou-

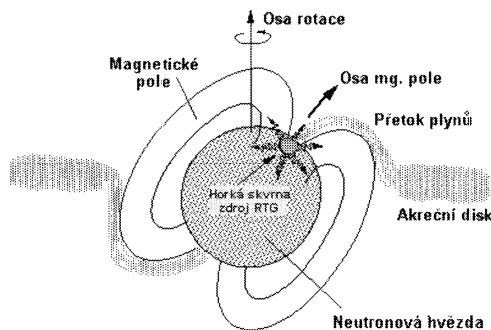
bení a porozumění obsahu uvedených pojmů a zákonů z mechaniky, bez nutnosti zavádění dalších.

Objasnění velmi rychlé rotace neutronové hvězdy – pulsaru vychází z aplikace zákona zachování momentu hybnosti $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. Hvězda o původním poloměru 10^9 m se při přechodu do závěrečného stadia vývoje smrští na 10^4 m. V souladu se zákonem zachování momentu hybnosti se musí zvýšit její úhlová rychlost. Dochází ke zmenšení poloměru 10^5 krát, což vede ke zmenšení periody rotace 10^{10} krát. Její značná rotační energie se prostřednictvím magnetického dipólu transformuje na vyzařování Krabí mlhoviny, jejíž snímek je na obr. 1.



Obr. 1

V gymnaziální fyzikální výuce budeme zjednodušeně předpokládat, že převážnou většinu energie k expanzi mlhovina získala v okamžiku exploze supernovy, tudíž v současnosti nedochází k výraznějšímu doplňování expanzní energie. Některé modely vzniku pulsarů předpokládají, že energie je uvolňována okamžitě, neboť časová škála pro kolaps jádra a explozi obálky supernovy II. typu je řádově několik desetin sekundy. Jinak řečeno předpokládáme, že úbytek kinetické rotační energie pulsaru = vyzařená energie, tedy platí $\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = \frac{dE_{\text{zar}}}{dt}$. Při popisu mechanických vlastností pulsaru používáme následující pojmy a vztahy: perioda rotace P , úhlová rychlost $\omega = \frac{2\pi}{P}$, moment setrvačnosti tuhého tělesa – koule $J = \frac{2}{5}MR^2$, rotační kinetická energie $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$, změna rotační energie $\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = -\frac{8}{5}\pi^2MR^2P^{-3}\frac{dP}{dt}$.



Obr. 2

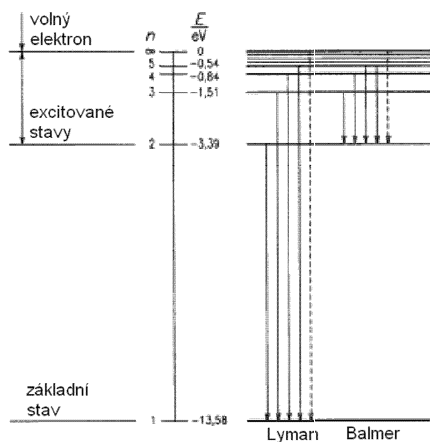
Snímek modelu pulsaru – neutronové hvězdy je na obr. 2. Při seznamování s vlastnostmi pulsaru si žáci rozšíří představy o extrémních hodnotách například úhlové rychlosti pulsaru, která dosahuje $\omega = 188 \text{ s}^{-1}$ či momentu setrvačnosti o hodnotě $J \approx 10^{38} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Charakteristiky pulsaru jsou $M = 1,4 M_{\text{S}}$, $R = 10 \text{ km}$, $P = 0,033 \text{ s}$, zpomalování rotace pulsaru – zvětšování periody rotace činí $\frac{dP}{dt} = 4 \cdot 10^{-13}$. Změna rotační energie za 1 sekundu $\frac{dE_{\text{rot}}}{dt} = -5 \cdot 10^{31} \text{ W}$ odpovídá observačně zjištěnému zářivému výkonu Krabí mlhoviny.

Transformace do výuky elektromagnetického pole

Krabí mlhovina je zdrojem čárového a spojitého spektra, žáky povedeme k objasnění a interpretaci pozorovaných spekter. V návaznosti na fyzikální tématický celek **Elektromagnetické jevy, světlo** lze rozšířit význam pojmů *spektrum*, *čárové a spojitě spektrum*, *vyzařování pohybujícího se nabitého náboje*, *rádiové záření*. Nezbytný podrobnější výklad fyzikálního mechanismu rádiového záření Krabí mlhoviny prostřednictvím pohybujících se relativistických elektronů bude pro většinu žáků obtížný, neboť vlastnosti relativistických částic dříve zařazených do dynamiky speciální teorie relativity byly v *RVP GV* rovněž vypuštěny. V článku [3] je prezentován optimistický názor, že pojetí *RVP GV* umožňuje u vymezených skupin žáků rozšířit vzdělávací obsah oboru Fyzika i o vybrané poznatky relativistické dynamiky. Nedomníváme se, že se tak v praxi vzhledem k značné restrikci časové dotace pro fyziku bude stávat.

Proto se při výkladu omezíme na **dvě hlavní složky** spektra mlhoviny. Zdrojem první v **červené oblasti optického spektra** je filamentová –

vláknitá struktura vnějších částí mlhoviny. Emisní čárové spektrum je produkováno difúzní plynnou mlhovinou o vysoké teplotě v rozmezí (15 000 – 20 000) K, při čemž vyzařování probíhá především v emisních spektrálních čarách helia a vodíku. Koncentrace atomů ve vláknech dosahuje zhruba 10^3 cm^{-3} .



Obr. 3

Druhá složka záření vytvářející spojité spektrum pochází z amorfnní látky, které je difúzí distribuováno a polarizováno. V padesátých létech minulého století byla navržena teoretická interpretace původ spojitého spektra Krabí mlhoviny prostřednictvím synchrotronového záření. Později byla teoretická předpověď observačně potvrzena zjištěním lineární polarizace záření. Relativistické elektrony se pohybují v magnetickém poli mlhoviny a vyzařují synchrotronové záření. Jejich energie se sice vyzařováním vyčerpává za několik desítek roků, ale díky pulsaru jsou elektrony produkovány v mlhovině neustále.

Výklad čárového spektra mlhoviny, složené především z vodíku a helia, lze opírat o fyzikální poznatky, například o interpretaci energetických hladin atomu vodíku. Při vzniku emisní čáry H_α Balmerovy série vodíku (obr. 3), se uvolní energie

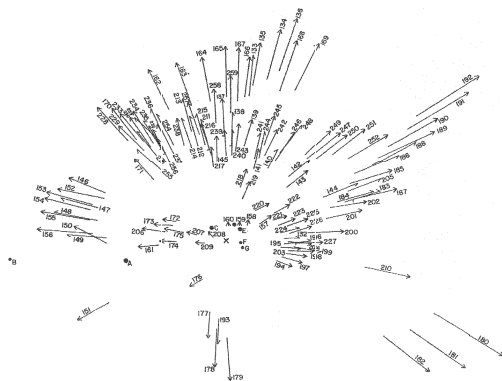
$$h \frac{c}{\lambda} = 3,0 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

Určování rychlosti expanze a stáří Krabí mlhoviny

Druhá část článku podává návrh vlastní aktivní práce žáků při určování rychlosti expanze Krabí mlhoviny, vytvořený úpravou úlohy podle [4]. Žáci si mohou procvičit v těsné návaznosti na matematické vědomosti vzájemné vztahy mezi úhlovou velikostí, skutečnou reálnou velikostí a vzdáleností.

Vzhledem k velké vzdálenosti Krabí mlhoviny musí astrofyzika nezbytně pracovat pouze s jejími fotografiemi pořízenými s vysokým rozlišením na velkých dalekohledech v určitých časových intervalech. Jejich srovnáním lze stanovit úhlovou rychlost rozpínání mlhoviny.

V první komplexnější práci shrnuté v [5] byly na základě proměrování vlastního pohybu 127 filamentů stanoveny kinematické parametry rozpínání. Předpokládejme $v = v_0 + at$ (1), $R = v_0 t + at^2$ (2). Při současné velikosti velké poloosy mlhoviny $R' = 6$, což při vzdálenosti $r = 1,8$ kpc dává poloměr $R \approx 10^{16}$ m, je současná průměrná rychlost expanze změřená z rozpínání mlhoviny $0,2''/\text{rok}$, tj. $v \approx 1,6 \cdot 10^6$ m·s⁻¹. Vztah (1) dává pro počáteční rychlost expanze mlhoviny v_0 při čase $t = (1950 - 1054) = 896$ roků $= 2,83 \cdot 10^{10}$ s a současném zrychlení $a = 8,2 \cdot 10^{-6}$ m·s⁻² hodnotu $v_0 = 1,37 \cdot 10^6$ m·s⁻¹, ze vztahu (2) vychází $R \approx 10^{16}$ m.



Obr. 4

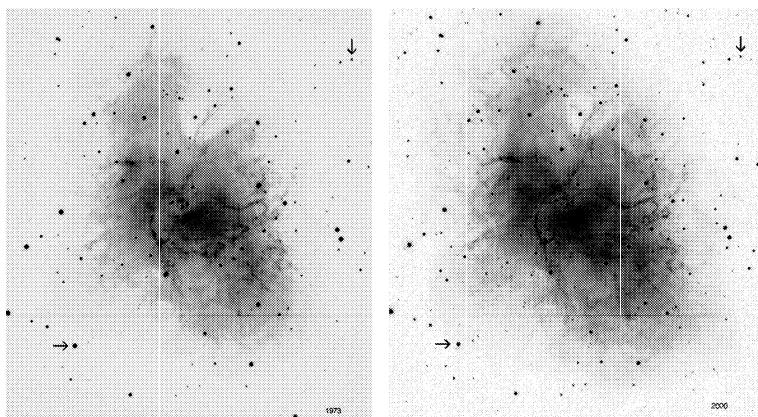
Obr. 4 zachycuje diagram rozpínání mlhoviny z [5], číslo identifikuje vlákno, délka a směr šipky udávají jeho vlastní pohyb, X označuje střed expanze. Zatímco ve skutečnosti je expanze mlhoviny prostorová, nesymetrická a probíhá s rychlostí v čase slabě proměnnou, pro didaktické účely ji zjednodušíme na expanzi plošnou, symetrickou a s konstantní průměrnou

rychlostí. Zpracování fotografií se zjednoduší. Jsou-li na fotografii v čase t_1 souřadnice pulsaru v pixelech $x_0(t_1)$, $y_0(t_1)$ a určitého vlákna i $x_i(t_1)$, $y_i(t_1)$ a obdobně pulsaru a stejného vlákna $x_0(t_2)$, $y_0(t_2)$, $x_i(t_2)$, $y_i(t_2)$ na fotografii v čase t_2 , rychlost rozpínání stanovená z vlákna i je rovna

$$v_i = \frac{s(t_2) \sqrt{[x_i(t_2) - x_0(t_2)]^2 + [y_i(t_2) - y_0(t_2)]^2} - s(t_1) \sqrt{[x_i(t_1) - x_0(t_1)]^2 + [y_i(t_1) - y_0(t_1)]^2}}{t_2 - t_1},$$

kde s je měřítko fotografií, obecně různé. Známe-li úhlovou vzdálenost φ dvou hvězd A a B rovněž zachycených na fotografii, měřítko stanovíme

$$s(t) = \frac{\varphi}{\sqrt{[x_B(t) - x_A(t)]^2 + [y_B(t) - y_A(t)]^2}}.$$

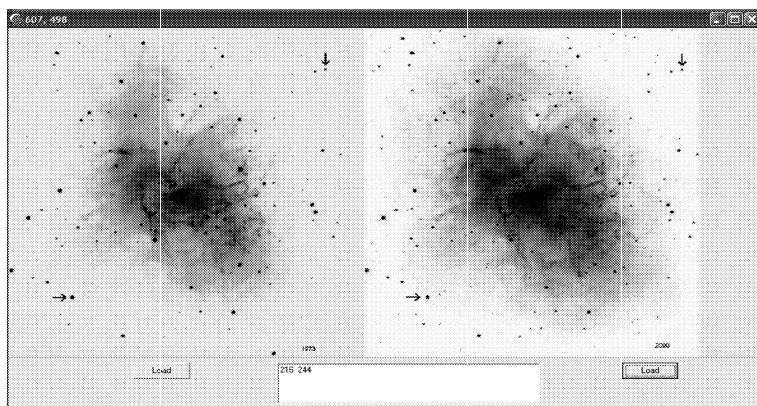


Obr. 5

Na obr. 5 jsou fotografie Krabí mlhoviny z roků 1973 a 2000, převzaté z [4]. Hvězdy pro stanovení měřítka jsou označeny šipkou. Úhlová vzdálenost mezi hvězdami označenými šipkami je $\varphi = 385''$. Z výše uvedených vztahů rychlost rozpínání vychází jako úhlová veličina. Při znalosti vzdálenosti mlhoviny lze úhlovou rychlost přepočítat na rychlost v $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$. Z aproximace rozpínání mlhoviny konstantní rychlostí lze odhadnout např. i stáří mlhoviny

$$t_2 = \frac{s(t_2) \sqrt{[x_i(t_2) - x_0(t_2)]^2 + [y_i(t_2) - y_0(t_2)]^2}}{v_i}.$$

Souřadnice pulsaru, vláken a hvězd pro kalibraci úhlové vzdálenosti lze s výhodou odečítat přímo na digitálních fotografiích. K jejich odečtení použijeme bitmapový editor zobrazující polohu označených pixelů, nebo pro úlohu připravený jednoduchý program. Ten současně zobrazuje dvě fotografie, čímž zjednodušuje identifikaci stejného vlákna struktury na obou fotografiích. Obr. 6 zachycuje okno programu pro odečítání souřadnic objektů na fotografiích. Při kliknutí v bitmapě program vypíše souřadnice označeného pixelu.



Obr. 6

Na obr. 7 je ukázka zpracování měření v programu MS Excel. Výpočet parametrů rozpínání z odečtených hodnot program úmyslně nenabízí. Podle zkušeností autorů dokonalé programy poskytující závěrečný výsledek problematiku spíše zatemňují. Žáci si proto výpočet mohou sami provést např. v tabulkovém procesoru MS Excel, který lze využít kromě samotného výpočtu i ke statistickému zpracování měření. Relativní chyba rychlosti rozpínání a doby existence mlhoviny určená z měření je přibližně 10 % vzhledem k citlivosti odečtu souřadnic a použitým zjednodušením. Systematicky nižší hodnota ve srovnání s [5] je způsobena prostorovostí expanze. U vláken, které se pohybují i ve směru k nám či od nás naměříme nižší expanzní rychlost.

Závěr

Vzhledem k značně redukovanému obsahu rámcového vzdělávacího plánu oboru Fyzika je obtížné začleňovat moderní astrofyzikální poznatky

Rozpínání Krabí mlhoviny

1. Určení měřítka fotografie

1973

Hvězda —	Hvězda
x 110 px	x 551 px
y 539 px	y 81 px

Vzdálenost hvězd	Měřítko
$\Delta = 635,8 \text{ px}$	0.6055 "/px
385"	

2000

Hvězda —	Hvězda
x 111 px	x 552 px
y 537 px	y 82 px

Vzdálenost hvězd	Měřítko
$\Delta = 633,65 \text{ px}$	0.6076 "/px
385"	

2. Souřadnice pulsaru

1973

x 280 px
y 316 px

2000

x 295 px
y 316 px

3. Určení vzdálenosti vláken, rychlosti rozpínání a stáří mlhoviny

1973

Uzel	x (px)	y (px)	r (px)	r (")
1	414	316	134	81
2	412	270	140	85
3	370	487	193	117
4	225	74	248	150
5	133	383	162	98

2000

x (px)	y (px)	r (px)	r (")
435	319	140	85
431	270	144	87
387	494	200	122
239	65	257	156
142	385	168	102

$\Delta r/\Delta t$ ("/rok)	t (rok)
0.15	583
0.10	910
0.18	696
0.22	706
0.15	663
0.16	711.24
0.0234	61.97

$$\begin{aligned}\Delta r/\Delta t &= (0.16 \pm 0.02) \text{ "/rok} \\ r &= 1.8 \text{ kpc} = 5.6 \cdot 10^{19} \text{ m} \\ \Delta r/\Delta t &= (1350 \pm 200) \text{ km/s} \\ t &= (700 \pm 60) \text{ roků}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v \text{ (m/rok)} &= 4.3 \cdot 10^{13} \\ v \text{ (km/s)} &= 1.4 \cdot 10^3\end{aligned}$$

Obr. 7

do výuky. Příspěvek ukazuje, že při promyšleném využití fyzikálních vědomostí žáků z mechaniky a elektromagnetického vlnění, lze téma Krabí mlhoviny úspěšně použít k jejich hlubšímu pochopení.

Motivačním faktorem je nesporně estetická krása vláknité struktury mlhoviny. Jak transformovat astrofyzikální podstatu krásy do gymnaziální výuky fyziky? Po vzdělání dychtící žáci si v 21. století kladou otázky: Jaké je fyzikální zdůvodnění stavební struktury mlhoviny, jejího vyzařování a jakým způsobem Krabí mlhoviny vznikla? Žáci v gymnaziální fyzikální výuce mají právo dostat na položené otázky odpověď, umožňme jim to.

Literatura

- [1] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. VÚP, Praha 2007.
- [2] Maršák, J.: Pojetí vzdělávacího oboru Fyzika v RVP GV. VÚP, Praha 2006.
- [3] Maršák, J.: Výuka základních poznatků speciální teorie relativity na gymnáziu. VÚP, Praha 2007.
- [4] <http://www.astro.lsa.umich.edu/undergrad/Labs/crab/crab-full.html>
- [5] Trimble, V.: Motions and Structure of the Filamentary Envelope of the Crab Nebula. The Astronomical Journal 73, 535, (1968).