

Ptolemaiova nerovnost pomáhá řešit extrémální úlohy

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Ptolemaiova nerovnost je vztah uvedený v následující větě.

Věta 1

Pro libovolné čtyři body A, B, C, D v rovině platí nerovnost

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|. \quad (1)$$

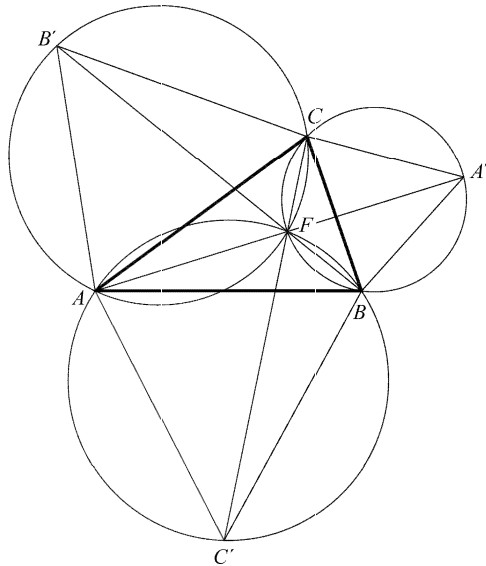
Rovnost přitom nastane, právě když tyto body leží v abecedním uspořádání na kružnici nebo na přímce.¹⁾

V článku [2] jsme se zabývali využitím této nerovnosti při hledání metrických vztahů v n -úhelnících. Nyní ukážeme, jak ji lze uplatnit při řešení extrémálních úloh.

1. Fermatův bod

Bod v rovině trojúhelníku, který má od jeho vrcholů minimální součet vzdáleností, se nazývá *Fermatův* nebo též *Torriceliho bod*. S jeho vlastnostmi se seznámíme ve větách 2–4.

¹⁾ V případě kolineárních bodů nastane rovnost pro čtveřice $\{A, B, C, D\}$, $\{D, C, B, A\}$ a pro dalších šest čtveřic, které z těchto dvou vzniknou cyklickou záměnou bodů.



Obr. 1

Věta 2

V rovině uvažujme trojúhelník ABC s vnitřními úhly velikosti nejvýše 120° a s vně připsanými rovnostrannými trojúhelníky CBA' , ACB' a BAC' (obr. 1). Pak úsečky AA' , BB' , CC' a kružnice opsané trojúhelníkům CBA' , ACB' a BAC' mají společný právě jeden bod F a přitom funkce

$$s(X) = |AX| + |BX| + |CX|$$

definovaná na množině bodů roviny trojúhelníku ABC splňuje pro každý bod $X \neq F$ nerovnost

$$s(X) > s(F) = |AA'| = |BB'| = |CC'|. \quad (2)$$

Důkaz. Nechť X, Y jsou dva body v rovině trojúhelníku ABC . Sečtením následujících tří nerovností

$$|AX| \leq |AY| + |XY|, \quad |BX| \leq |BY| + |XY| \quad \text{a} \quad |CX| \leq |CY| + |XY|,$$

které platí pro trojice bodů $\{A, X, Y\}$, $\{B, X, Y\}$ a $\{C, X, Y\}$, obdržíme jedinou nerovnost

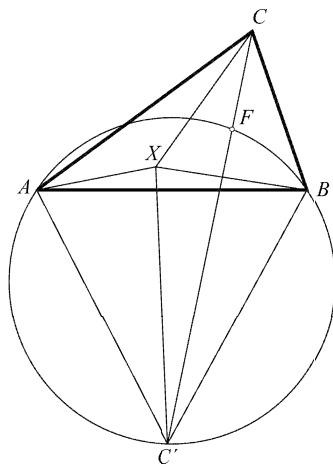
$$|AX| + |BX| + |CX| \leq |AY| + |BY| + |CY| + 3|XY|.$$

Rovnost

$$|AX| + |BX| + |CX| = |AY| + |BY| + |CY|$$

přitom platí, právě když $X = Y$. Existuje proto nejvýše jeden bod X roviny daného trojúhelníku ABC , pro který funkce $s(X)$ nabývá minimální hodnoty.

Sestrojme nyní nad stranou AB rovnostranný trojúhelník ABC' tak, aby bod C' ležel v polorovině opačné k polorovině ABC . Označme $F \neq C'$ průsečík úsečky CC' s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC' (obr. 2).



Obr. 2

Aplikací věty 1 pro čtveřici bodů $\{C', B, X, A\}$, kde X je libovolný bod dané roviny zjistíme, že platí $|AX| + |BX| \geq |C'X|$. Použijeme-li navíc trojúhelníkovou nerovnost pro body C, X, C' , dostáváme

$$s(x) = |AX| + |BX| + |CX| \geq |C'X| + |CX| \geq |CC'|.$$

Pro všechny body X tedy platí $s(X) \geq |CC'|$. Rovnost zde přitom nastane, právě když bod X leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC' a současně na úsečce CC' , tedy v bodě F .

Pro čtveřice bodů $\{A', C, X, B\}$ a $\{B', A, X, C\}$ analogicky zjistíme, že všechny body X splňují vztahy $s(X) \geq |AA'|$ a $s(X) \geq |BB'|$. V prvním z nich platí rovnost, právě když bod X je průsečíkem úsečky AA' s kružnicí opsanou trojúhelníku BCA' . Ve druhém vztahu rovnost nastane, právě když je bod X průsečíkem úsečky BB' s kružnicí opsanou trojúhelníku ACB' . Tím je věta dokázána, neboť z předchozího víme, že funkce $s(X)$ nabývá svého minima nejvýše pro jeden bod.

Trojúhelník s vnitřním úhlem velikosti 120° má Fermatův bod totožný s vrcholem tohoto úhlu (jedná se o důsledek věty 2). K důkazu skutečnosti, že stejnou vlastnost má i vrchol trojúhelníku, jehož velikost vnitřního úhlu (při tomto vrcholu) je větší než 120° , lze využít první část věty XXI z I. knihy Eukleidových Základů:

Věta 3

Pro libovolný vnitřní bod D trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$|AC| + |BC| > |AD| + |BD|.$$

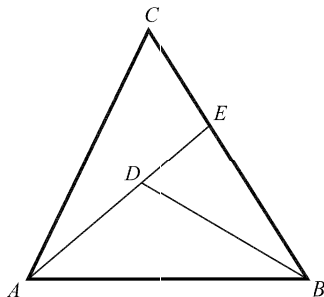
Důkaz je až na nezbytné formulační změny převzat z [1]. Označme E průsečík polopřímky AD se stranou BC (obr. 3). Trojúhelníkovou nerovnost $|AC| + |EC| > |AE|$ pro trojúhelník ACE upravíme přičtením výrazu $|BE|$ k oběma jejím stranám na tvar

$$|AC| + |BC| > |AE| + |BE|. \quad (3)$$

Podobně nerovnost $|DE| + |BE| > |BD|$, která platí v trojúhelníku DBE , upravíme přičtením $|AD|$ na tvar

$$|AE| + |BE| > |AD| + |BD|.$$

Odtud a ze vztahu (3) dostáváme přímo dokazovanou nerovnost.



Obr. 3

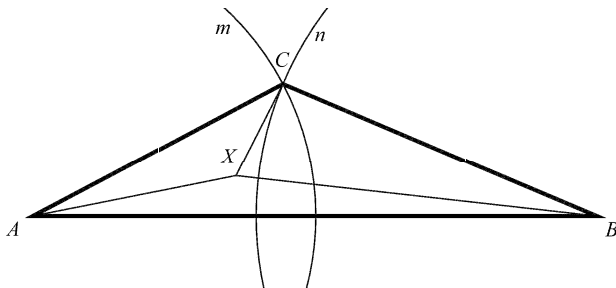
Věta 4

Má-li některý z vnitřních úhlů trojúhelníku ABC velikost větší než 120° , nabývá součet $s(X) = |AX| + |BX| + |CX|$ svého minima jen ve vrcholu tohoto úhlu. Leží-li body A, B, C na téže přímce, je $s(X)$ minimální, právě když je bod X jedním z nich a leží mezi zbylými dvěma body.

Důkaz. Nechť ABC je trojúhelník s úhlem při vrcholu C větším než 120° a $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou po řadě vnitřky kruhů s hraničními kružnicemi $m(A; |AC|)$ a $n(B; |BC|)$. Předpokládejme nejprve, že bod X leží vně útvaru $\mathcal{N}$ (obr. 4). Pak $|BX| \geq |BC|$. Odtud a z trojúhelníkové nerovnosti $|AX| + |CX| \geq |AC|$ plyne

$$s(X) = |AX| + |BX| + |CX| \geq |AC| + |BC|, \quad (4)$$

přičemž rovnost nastane, právě když $X = C$. Jestliže bod X leží vně $\mathcal{M}$ dokážeme vztah (4) analogicky.



Obr. 4

2. Obsahy čtyřúhelníků

V této části ukážeme, jak lze pomocí Ptolemaiovy nerovnosti nalézt čtyřúhelník maximálního obsahu při pevně daném obvodu (tzv. izoperimetrická úloha pro čtyřúhelník).

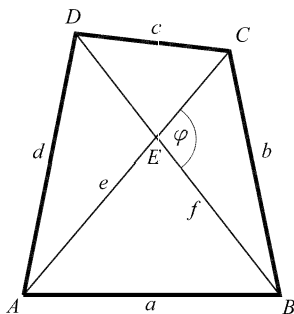
Věta 5

Při zachování označení z obr. 6 je obsah S konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ vyjádřen vztahem

$$16S^2 = 4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2. \quad (6)$$

Důkaz. Položme $x = |CE|$, $y = |BE|$, $e - x = |AE|$ a $f - y = |DE|$. Užitím kosinových vět pro trojúhelníky ABE a CDE dostaneme

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + (e - x)^2 + (f - y)^2 + 2y(e - x) \cos \varphi + 2x(f - y) \cos \varphi.$$



Obr. 6

Analogicky z trojúhelníků BCE a DAE plyne

$$b^2 + d^2 = x^2 + y^2 + (e - x)^2 + (f - y)^2 - 2xy \cos \varphi - 2(e - x)(f - y) \cos \varphi.$$

Oba poslední vztahy odečteme a po umocnění na druhou (a následné úpravě) obdržíme

$$(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 = 4e^2f^2 \cos^2 \varphi = 4e^2f^2 - 4e^2f^2 \sin^2 \varphi = 4e^2f^2 - 16S^2.$$

Odtud již plyne (6).

Věta 6

Ze všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$ s danými délkami stran $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$ a $|DA| = d$ má největší obsah tětiový čtyřúhelník. Jeho obsah je dán vztahem

$$S_{\max} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad (7)$$

kde $2s = a + b + c + d$.

Důkaz. Odhad součinu ef ze vztahu (1), který je upraven v souladu s označením na obr. 6, a jeho dosazení do (6) dává nerovnost

$$16S^2 \leq 4(ac + bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2.$$

Dalšími úpravami podle známých algebraických vzorců dostaneme

$$16S^2 \leq ((a+c)^2 - (b-d)^2) ((b+d)^2 - (a-c)^2)$$

a odtud nerovnost

$$16S^2 \leq (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d),$$

kteřou využitím vztahu $2s = a + b + c + d$ již snadno upravíme na tvar

$$S \leq \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Tím je důkaz proveden, neboť podle věty 1 nastane v posledním vztahu rovnost, právě když čtyřúhelník $ABCD$ je tětiový.

Poznámka. Vztah (7) pro vyjádření obsahu tětiového čtyřúhelníku je tzv. *Brahmaguptův vzorec*. Analogické odvození rovnosti (6) – přístupnější studentům, kteří se ještě neseznámili s kosinovou větou – je možno nalézt v článku [4].

Věta 7

Ze všech konvexních čtyřúhelníků $ABCD$ daného obvodu má největší obsah čtverec.

Důkaz. Má-li čtyřúhelník pevně zvolený obvod $2s$, můžeme provést odhad obsahu S pomocí vztahu (7) a využitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem

$$S \leq \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \leq \left(\frac{2s}{4}\right)^2.$$

Přitom v posledním vztahu nastane rovnost, právě když je $ABCD$ tětíkový čtyřúhelník, v němž platí $s-a = s-b = s-c = s-d$. Pak ovšem $a = b = c = d$. Rovnost zde tedy platí, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ čtverec.

3. Zákon lomu

Uvažujme dvě průhledná, opticky homogenní a izotropní prostředí s rovinným rozhraním σ . Světlo se šíří v prvním prostředí rychlostí c_1 a ve druhém rychlostí $c_2 \neq c_1$. Při přechodu přes rozhraní mění světelný paprsek svůj směr. Tento jev se nazývá lom světla. Nechť q je kolmice na rozhraní v místě dopadu paprsku. Rovinu, která je určena dopadajícím paprskem a přímkou q nazýváme rovina dopadu. Úhel, který svírá dopadající (resp. lomený) paprsek s přímkou q je úhel dopadu (resp. lomu). Směr lomeného paprsku určuje tzv. Snellův zákon lomu:

Věta 8

Lomený paprsek zůstává v rovině dopadu. Velikosti α_1 a α_2 úhlů dopadu a lomu splňují vztah

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (8)$$

Důkaz provedeme využitím Ptolemaiovy nerovnosti a Fermatova principu, podle kterého

se světlo šíří z bodu A do bodu B tak, aby čas, během něhož proběhne dráhu z A do B byl minimální.²⁾

Nechť se světelný paprsek šíří z daného bodu A v prvním prostředí přes nějaký bod na rozhraní do bodu B ve druhém prostředí. Označme P a Q paty kolmic z bodů A a B na rovinu σ . Kdyby paprsek dopadl na rovinu

²⁾ Zpřesněná verze hovoří o extrémálním čase. V případě rovinného rozhraní nastává ve shodě s původní Fermatovou formulací minimum.

522



Nechť $C \in p$, je takový bod světelné trajektorie z A do B , jenž odpovídá minimálnímu času

$$\frac{|AC|}{c_1} + \frac{|CB|}{c_2} = t_{\min}.$$

Pro každý bod $C' \in p$ tedy platí:

$$\frac{|AC'|}{c_1} + \frac{|C'B|}{c_2} \geq \frac{|AC|}{c_1} + \frac{|CB|}{c_2}. \quad (9)$$

Opišme trojúhelníku ABC kružnici k a její druhý průsečík s kolmicí n vedenou bodem C k rozhraní označme D (obr. 8). S využitím vztahu (1) pro čtveřici bodů $\{A, C', B, D\}$ dostáváme

$$\begin{aligned} |AC'| \cdot |BD| + |BC'| \cdot |AD| &\geq |C'D| \cdot |AB| \geq |CD| \cdot |AB| = \\ &= |AC| \cdot |BD| + |BC| \cdot |AD|. \end{aligned}$$

Odtud a ze vztahů $|BD| = 2r \sin \alpha_2$ a $|AD| = 2r \sin \alpha_1$, kde r je poloměr kružnice k , plyne

$$|AC'| \cdot 2r \sin \alpha_2 + |BC'| \cdot 2r \sin \alpha_1 \geq |AC| \cdot 2r \sin \alpha_2 + |BC| \cdot 2r \sin \alpha_1, \quad (10)$$

přičemž rovnost nastane, právě když $C' = C$. Vztahy (9) a (10) mohou platit současně, právě když existuje takové reálné číslo h ($h \neq 0$), pro které platí

$$h \cdot 2r \sin \alpha_2 = \frac{1}{c_1} \quad \text{a} \quad h \cdot 2r \sin \alpha_1 = \frac{1}{c_2}.$$

Z rovnosti podílů levých a pravých stran těchto vztahů plyne bezprostředně (8).

L i t e r a t u r a

- [1] *Eukleides*: Základy. JČMF, Praha 1907.
- [2] *Leischner, P.*: Ptolemaiova nerovnost. MFI, roč.15 (2005/06), č. 7, s.385-392.
- [3] *Pedoe, D.*: Geometry, a comprehensive course. Cambridge University Press, London 1970.
- [4] *Pech, P.*: Izoperimetrická nerovnost pro čtyřúhelník a Ptolemaiova nerovnost. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 71 (1993/94), č. 5, str. 216-219.
- [5] *Pech, P.*: Fermatova úloha a Ptolemaiova nerovnost. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 71 (1993/94), č. 6, str. 264-267.

O čísle e , harmonické řadě a také o Eulerově konstantě

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Poznatky, které uvádíme v úvodu tohoto článku, jsou čtenářům nepochybně známy. Na střední škole se sice neprobírají, ale při vhodné příležitosti se o nich můžeme nejen zmínit, ale i použít – jak uvidíme dále – k odvození iracionality čísla e , divergence harmonické řady a konvergence zajímavé nekonečné řady. Pro přehlednost jsou tyto poznatky shrnuty hned na začátku. Jejich detailní odvození je uvedeno např. v Jarníkově Diferenciálním počtu I.

a) Posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^n$ je rostoucí, posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ je klesající a obě tyto posloupnosti mají za limitu číslo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

b) Je-li řada

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

konvergentní je konvergentní i řada

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots + a_{n+k} + \dots$$

a platí

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \\ & = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots) \end{aligned}$$

c) Má-li konvergentní řada

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

součet s , pak pro každé reálné číslo k platí

$$ka_1 + ka_2 + ka_3 + \dots + ka_n + \dots = ks$$

d) Jestliže v konvergentních řadách

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = s, \quad b_1 + b_2 + b_3 + \dots = t$$

pro všechna n je $a_n \geq b_n$ a aspoň pro jednu hodnotu n platí $a_n > b_n$, pak $s > t$.

Tyto poznatky (snad až na vyjádření čísla e pomocí nekonečné řady) jsou poměrně jednoduché a studentům srozumitelné. S jejich pomocí dokážeme následující tři věty.

Věta 1

Číslo $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$ je iracionální.

K důkazu tohoto tvrzení budeme předpokládat, že číslo e je racionální, a z tohoto předpokladu odvodíme spor.

Je-li tedy $e = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou přirozená čísla, pak

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \dots,$$

odkud podle b) a c) po vynásobení číslem $q!$ dostaneme

$$p(q-1)! - \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!} \right] q! = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots$$

Je přitom zřejmé, že výraz na levé straně této rovnosti je celé číslo, které je (vzhledem k pravé straně této rovnosti) kladné. Porovnáním členů geometrické řady

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots,$$

která má součet $\frac{1}{q}$, s odpovídajícími členy řady

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots$$

máme podle d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots < \\ < \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots = \frac{1}{q}, \end{aligned}$$

což znamená, že platí

$$p(q-1)! - \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{q!} \right] q! < \frac{1}{q}.$$

Odvodili jsme tak spor. Výraz na levé straně nerovnosti je přirozené číslo, které je rovno aspoň 2, zatímco na straně pravé je kladné reálné číslo nejvýše rovné jedné.

Věta 2

Harmonická řada $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ diverguje k plus nekonečnu.

Větu dokážeme s využitím poznatků v bodě a), podle nichž je posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^n$ rostoucí a má za limitu číslo e. Pro všechna přirozená čísla n tedy platí

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e,$$

odkud plyne

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < 1,$$

neboli

$$\frac{1}{n} > \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{n} \right),$$

kde $\ln$ značí přirozený logaritmus, tj. logaritmus o základu e.

Vzhledem k tomu, že tato nerovnost platí pro všechna přirozená čísla n , dostaneme pro součet prvních n členů harmonické řady

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \left(\frac{n+1}{n} \right),$$

neboli

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{1} \right) = \ln(n+1)$$

O posloupnosti částečných součtů harmonické řady, která je rostoucí, jsme tak zjistili, že není shora omezená, což znamená, že harmonická řada diverguje k plus nekonečnu.

Věta 3

Řada, jejíž n -tý částečný součet je $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, konverguje.

K důkazu využijeme poznatků uvedených v bodě a), podle nichž je posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ klesající a má za limitu číslo e . Pro všechna přirozená čísla n tedy platí

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} > e,$$

odkud plyne

$$(n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) > 1,$$

neboli

$$\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Dále je vidět, že posloupnost s n -tým členem

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

je klesající, neboť rozdíl

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

je podle předcházející nerovnosti záporný. Tato klesající posloupnost je však zdola omezená, neboť podle výsledku získaného v předchozím důkazu divergence harmonické řady platí

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1),$$

takže je rovněž

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0.$$

Ukázali jsme tak, že posloupnost s n -tým členem

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

je klesající a zdola omezená, takže má vlastní limitu. Tato limita se obvykle označuje C a nazývá se Eulerova konstanta. Její přibližná hodnota je 0,577216. Získaný výsledek můžeme přitom zapsat ve tvaru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = C$$

Poznamenejme závěrem, že dosud (pokud je autorovi tohoto článku známo) není vyřešena otázka, zda Eulerova konstanta C je číslo racionální nebo iracionální.

59. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola (domácí část)

KATEGORIE A

A–I–1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - y} &= z - 1, \\ \sqrt{y^2 - z} &= x - 1, \\ \sqrt{z^2 - x} &= y - 1.\end{aligned}$$

Radek Horenský

A–I–2

Kosočtverci $ABCD$ je vepsána kružnice. Uvažujme její libovolnou tečnu protínající obě strany BC , CD a označme po řadě R , S její průsečíky s přímkami AB , AD . Dokažte, že hodnota součinu $|BR| \cdot |DS|$ na volbě tečny nezávisí.

Leo Boček

A–I–3

Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 33$. V jednom kroku zvolíme na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je dělitelem druhého, obě smažeme a na tabuli napíšeme jejich (celočíslný) podíl. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen čísla, z nichž žádné není dělitelem jiného. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je číslem 1.) Kolik nejméně čísel na tabuli zůstane?

Peter Novotný

A–I–4

V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O , V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S , právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost 60° .

Tomáš Jurík

A–I–5

V kádi je r_0 ryb, společný úlovek n rybářů. Přicházejí pro svůj díl jednotlivě, každý si myslí, že se dostavil jako první, a aby si vzal přesně n -tinu aktuálního počtu ryb v kádi, musí předtím jednu z ryb pustit zpět do moře. Určete nejmenší možné číslo r_0 v závislosti na daném $n \geq 2$, když i poslední rybář si aspoň jednu rybu odnese.

Dag Hrubý

A–I–6

Pro dané prvočíslo p určete počet (všech) uspořádaných trojic (a, b, c) čísel z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 2p^2\}$, které splňují vztah

$$\frac{[a, c] + [b, c]}{a + b} = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2} \cdot c,$$

kde $[x, y]$ značí nejmenší společný násobek čísel x a y .

Tomáš Jurík

KATEGORIE B

B–I–1

Na stole leží tři hromádky zápalek: v jedné 2 009, ve druhé 2 010 a v poslední 2 011. Hráč, který je na tahu, zvolí dvě hromádky a z každé z nich odebere po jedné zápale. Ve hře se pravidelně střídají dva hráči. Hra končí, jakmile některá hromádka zmizí. Vyhrává ten hráč, který udělal poslední tah. Popište strategii jednoho z hráčů, která mu zajistí výhru.

Ján Mazák

B–I–2

Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo, které má přesně šest kladných dělitelů, z nichž právě dva jsou jednomístní a právě dva dvojmístní. Větší z dvojmístných dělitelů je druhou mocninou přirozeného čísla. Určete všechna čísla, která mohou být na tabuli napsána.

Peter Novotný

B–I–3

V rovině je dána úsečka AB . Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, pro jehož středy stran AB , CD , DA označené po řadě K , L , M platí: body A , B , L , D leží na jedné kružnici a rovněž body K , L , D , M leží na jedné kružnici.

Jaroslav Švrček

B–I–4

Najděte 2 009 po sobě jdoucích čtyřmístných čísel, jejichž součet je součinem tří po sobě jdoucích přirozených čísel.

Radek Horenský

B–I–5

Uvnitř kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je zvolen bod D . Tětiva CD protíná stranu AB v bodě E . Dokažte, že trojúhelník se stranami délek $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný trojúhelníku ABD .

Pavel Leischner

B–I–6

Reálná čísla a , b mají tuto vlastnost: rovnice $x^2 - ax + b - 1 = 0$ má v množině reálných čísel dva různé kořeny, jejichž rozdíl je kladným kořenem rovnice $x^2 - ax + b + 1 = 0$.

a) Dokažte nerovnost $b > 3$.

b) Pomocí b vyjádřete kořeny obou rovnic.

Jaromír Šimša

KATEGORIE C

C–I–1

Erika a Klárka hrály hru „slovní logik“ s těmito pravidly: Hráč A si myslí slovo složené z pěti různých písmen. Hráč B vysloví libovolné slovo složené z pěti různých písmen a hráč A mu prozradí, kolik písmen uhodl na správné pozici a kolik na nesprávné. Písmena považujeme za různá, i když se liší jen háčkem nebo čárkou (například písmena A, Á jsou různá). Kdyby si hráč A myslel například slovo LOŤKA a B by vyslovil slovo KOLÁČ, odpoví hráč A, že jedno písmeno uhodl hráč B na správné pozici a dvě na nesprávné. Zkráceně sdělí „1 + 2“, neboť se opravdu obě slova shodují pouze v písmenu O včetně pozice (druhé zleva) a v písmenech K a L, jejichž pozice jsou odlišné. Erika si myslela slovo z pěti různých písmen a Klárka vyslovila slova KABÁT, STRUK, SKOBA, CESTA a ZÁPAL. Erika na tato slova v daném pořadí odpověděla $0 + 3$, $0 + 2$, $1 + 2$, $2 + 0$ a $1 + 2$. Zjistěte, jaké slovo si Erika mohla myslet.

Peter Novotný

C–I–2

Vrcholem C pravoúhelníku $ABCD$ vedte přímky p a q , které mají s daným pravoúhelníkem společný pouze bod C , přičemž přímka p má od bodu A největší možnou vzdálenost a přímka q vymezuje s přímkami AB , AD trojúhelník co nejmenšího obsahu.

Leo Boček

C–I–3

Určete všechna reálná čísla x , která vyhovují rovnici $4x - 2[x] = 5$. (Symbol $[x]$ značí největší celé číslo, které není větší než číslo x , tzv. dolní celou část reálného čísla x .)

Jaroslav Švrček

C–I–4

Kružnice $k(S; r)$ se dotýká přímky AB v bodě A . Kružnice $l(T; s)$ se dotýká přímky AB v bodě B a protíná kružnici k v krajních bodech C , D jejího průměru. Vyjádřete délku a úsečky AB pomocí poloměrů r , s . Dokažte, že průsečík M přímek CD , AB je středem úsečky AB .

Leo Boček

C–I–5

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leq \frac{2(a^2 + 3ab + b^2)}{5(a+b)} \leq \frac{a+b}{2},$$

a pro každou z obou nerovností zjistěte, kdy přechází v rovnost.

Ján Mazák

C–I–6

Najděte všechna přirozená čísla, která nejsou dělitelná deseti a která ve svém dekadickém zápisu mají někde vedle sebe dvě nuly, po jejichž vyškrtnutí se původní číslo 89krát zmenší.

Jaromír Šimša

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2009 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 159

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y = z^3 + 1,$$

$$y^2 + z = x^3 + 1,$$

$$z^2 + x = y^3 + 1.$$

Pavel Calábek

Úloha 160

Nechť ρ je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC a ρ_a, ρ_b, ρ_c jsou poloměry kružnic vně připsaných jeho stranám. Určete obsah trojúhelníku ABC , jestliže ρ_a, ρ_b a ρ_c jsou vyjádřeny přirozenými čísly a $\rho = 2$.

Jaroslav Švrček