

O Keplerově rovnici

MICHAL KŘÍŽEK

Matematický ústav AV ČR, Praha

Během svého pobytu v Praze Johannes Kepler studoval data, která získal z pozorování Tychona Brahe. Přitom zjistil, že se planety pohybují po eliptických drahách, v jejichž společném ohnisku je Slunce, a že plošná rychlost každé planety je konstantní (tzn., že spojnice středu Slunce a středu planety opíše stejně velké plochy za stejně dlouhé časové intervaly). Tak byl kolem roku 1605 objeven první a druhý Keplerův zákon,¹⁾ který byl prvně publikován ve stěžejním Keplerově díle *Astronomia nova* v roce 1609, tj. právě před 400 lety (viz [3]). To je jeden z důvodů, proč byl letošní rok vyhlášen Mezinárodním rokem astronomie.²⁾

Označme a hlavní a b vedlejší poloosu eliptické dráhy planety. Uvažujme kružnici o poloměru a a stejném středu, jako má elipsa na obr. 1. Pokud je (numerická) excentricita elipsy $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ kladná, pak se planeta nepohybuje rovnoměrně,³⁾ a proto je důležité umět určit její polohu v daném čase. V části 1. a 2. si ukážeme, jak lze polohu na elipse popsat pomocí úhlu zvaného excentrická anomálie. Ve 3. části odvodíme Keplerovu rovnici, která svazuje excentrickou anomálii s rovnoměrně plynoucím časem, viz [1], str. 304.

1. Označme $r > 0$ heliocentrickou vzdálenost planety P od Slunce S , body A, B, C a úhly α, φ tak, jak je nakresleno na obr. 1. Je patrné, že

¹⁾ Z nich lze odvodit třetí Keplerův zákon (viz např. [2]), který Kepler uveřejnil až v roce 1619.

²⁾ Před 400 lety také *Galileo Galelei* poprvé použil dalekohled pro astronomická pozorování.

³⁾ Např. pro Mars, na který Kepler zejména upíral svoji pozornost, je $e \doteq 0,1$.

$$a \cos \alpha = |AC| = ae + r \cos \varphi, \quad (1)$$

$$\frac{r \sin \varphi}{a \sin \alpha} = \frac{|PC|}{|BC|} = \frac{b}{a},$$

kde úhel α se nazývá *excentrická anomálie* a úhel φ *pravá anomálie*.

Z obou rovnic dostaneme po úpravě

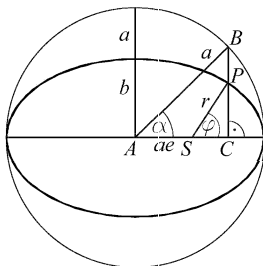
$$r^2 \cos^2 \varphi = a^2 \cos^2 \alpha - 2a^2 e \cos \alpha + a^2 e^2,$$

$$r^2 \sin^2 \varphi = b^2 \sin^2 \alpha = a^2(1 - e^2) \sin^2 \alpha.$$

Jestliže tyto rovnice sečteme, obdržíme $r^2 = a^2 - 2a^2 e \cos \alpha + a^2 e^2 \cos^2 \alpha$.

Odtud plyne vyjádření vzdálenosti r pomocí excentrické anomálie α ,

$$r = a(1 - e \cos \alpha). \quad (2)$$



Obr. 1

2. Dále se pokusíme vyjádřit pravou anomálií φ pomocí α . Dosadíme-li do (2) za $\cos \alpha$ ze vztahu (1), vidíme, že $r = a - e(ae + r \cos \varphi)$, tj.

$$\frac{r}{a}(1 + e \cos \varphi) = 1 - e^2. \quad (3)$$

Takto se někdy vyjadřuje první Keplerův zákon v polárních souřadnicích (r, φ) . Z (1) po vydělení a a z (3) tak získáme

$$\cos \alpha = e + \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \varphi} \cos \varphi = \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}.$$

Odtud dosazením do vztahu pro tangens polovičního úhlu máme

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}}{1 + \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}} = \frac{1 + e \cos \varphi - e - \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi + e + \cos \varphi} = \\ &= \frac{1 - e}{1 + e} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{1 - e}{1 + e} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2},\end{aligned}$$

a tedy

$$\varphi = 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right). \quad (4)$$

3. Nyní stanovíme rovnici pro výpočet α . Necht' $t = 0$ je čas průchodu planety periheliem a T je její oběžná doba. Podle druhého Keplerova zákona je plošná rychlost planety konstantní a je rovna $\pi ab/T$ (viz [2]). Za čas $t \in \langle 0; T \rangle$ opíše tedy průvodič SP plochu $\pi abt/T$. Za stejný čas opíše úsečka SB plochu $\pi a^2 t/T$ (tj. $\frac{a}{b}$ -krát větší) a úsečka AB plochu $\pi a^2 \frac{\alpha(t)}{2\pi}$. Rozdíl těchto ploch je roven obsahu trojúhelníka ASB (viz obr. 1)

$$\frac{a^2 \alpha(t)}{2} - \frac{\pi a^2 t}{T} = \frac{ae}{2} a \sin \alpha(t).$$

Po vydělení číslem $-a^2/2$ dostaneme již *Keplerovu rovnici* pro excentrickou anomálii

$$\boxed{\frac{2\pi}{T} t = \alpha(t) - e \sin \alpha(t)}. \quad (5)$$

Levá strana $M(t) = 2\pi t/T$ se nazývá *střední anomálie*, protože je lineární funkcí času.

Pro zadaný čas t tak můžeme z Keplerovy rovnice (5) určit úhel $\alpha(t)$ pomocí nějaké iterační metody. Z (2) pak určíme vzdálenost $r(t)$ a z (4) vypočteme $\varphi(t)$. Tím je poloha planety v rovině dráhy jednoznačně určena.

Dodnes obdivujeme, jak Kepler odvodil rovnici (5) a své tři zákony o pohybu planet. Musel mít obrovskou geometrickou představivost, fyzikální intuici a mimořádnou schopnost analyzovat velké množství dat o polohách planet.

Literatura

- [1] Bertotti, B. – Farinella, P. – Vokrouhlický, D.: Physics of the Solar system. Kluwer, Dordrecht, 2003.
- [2] Křížek, F. – Křížek, M. – Šolc, J.: Jakou hmotnost má černá díra uprostřed naší Galaxie? Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 49 (2004), s. 104-113.
- [3] Šolcová, A.: Johannes Kepler, zakladatel nebeské mechaniky. Prometheus, Praha, 2004.

O jedné metodě dokazování geometrických nerovností

PAVEL PECH

Pedagogická fakulta JU, Č. Budějovice

V článku je uveden způsob dokazování geometrických nerovností metodou, která spočívá ve vyjádření polynomu, který danou nerovnost popisuje, ve tvaru součtu čtverců polynomů.

Jako ukázka použití této metody slouží úloha, která byla řešena ve 29. ročníku MO (1980), v kategorii A. Nejprve je podán klasický způsob řešení, ve druhé části je ukázána metoda, ve které použijeme vyjádření polynomu ve tvaru součtu čtverců (metoda *sos*^{*)}). Budeme se zabývat následující úlohou:

Trojúhelník ABC o stranách a, b, c má obsah P a trojúhelník KLM o stranách k, l, m má obsah Q. Dokažte, že pak platí:

$$k^2(-a^2 + b^2 + c^2) + l^2(a^2 - b^2 + c^2) + m^2(a^2 + b^2 - c^2) \geq 16 PQ. \quad (1)$$

Pro které trojúhelníky platí rovnost?

Řešení. Uvedeme řešení podle [1]. Označme úhel, který svírají strany a, b trojúhelníka ABC symbolem γ a úhel, který svírají strany k, l v $\triangle KLM$ jako φ . Potom pro obsahy P a Q trojúhelníků ABC a KLM platí

^{*)} *sos* znamená anglicky „sum of squares“ – „součet čtverců“.

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma, \quad Q = \frac{1}{2}kl \sin \varphi.$$

Podle kosinové věty použité na trojúhelníky KLM a ABC je

$$m^2 = k^2 + l^2 - 2kl \cos \varphi, \quad a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma.$$

Pomocí těchto čtyř vztahů přepíšeme (1) na ekvivalentní tvar

$$\begin{aligned} k^2(2b^2 - 2ab \cos \gamma) + l^2(2a^2 - 2ab \cos \gamma) + (k^2 + l^2 - 2kl \cos \varphi)2ab \cos \gamma &\geq \\ &\geq 4abkl \sin \gamma \sin \varphi. \end{aligned}$$

Úpravou dostaneme

$$(kb - la)^2 + 2abkl[1 - \cos(\gamma - \varphi)] \geq 0.$$

Protože $\cos(\gamma - \phi) \leq 1$, nerovnost (1) platí. Rovnost nastane právě když $kb = la$ a $\cos(\gamma - \phi) = 1$, tj. $\gamma = \varphi$ a $a : b = k : l$, a trojúhelníky ABC a KLM jsou podobné.

Poznámka. Je-li KLM rovnostranný trojúhelník, potom $k^2 = 4Q/\sqrt{3}$ a (1) přejde v nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} P, \quad (2)$$

ve které nastane rovnost pouze pro rovnostranný trojúhelník. Nerovnost (2) je připisována $R. Weitzenböckovi$ [7]. $\square$

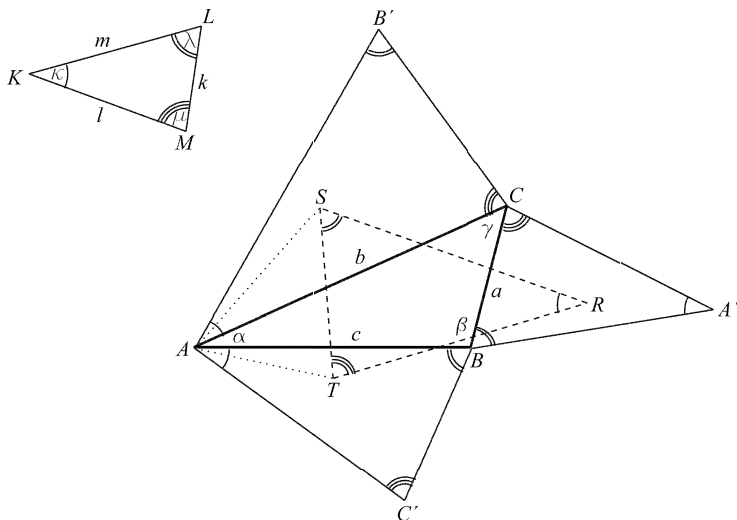
Nerovnost (1) je známa jako *nerovnost Neuberg–Pedoe* [2]. Americký matematik D. Pedoe se touto nerovností zabýval v roce 1943. Nerovnost byla několikrát zobecněna na simplexu v E^n .

Při důkazu nerovnosti (1) vyšel D. Pedoe z následující vlastnosti podobných trojúhelníků [4]:

Sestrojíme-li nad stranami trojúhelníka ABC tři podobné trojúhelníky $A'BC$, $AB'C$, ABC' (všechny vně nebo všechny dovnitř), potom jejich středy R, S, T opsaných kružnic tvoří trojúhelník podobný těmto třem trojúhelníkům.

Důkaz. Úlohu dokážeme pro „vnější“ případ, který lze lépe sledovat na obrázku. „Vnitřní“ případ, kdy podobné trojúhelníky sestrojíme dovnitř trojúhelníka ABC se dokáže obdobným způsobem.

Nechť ABC a KLM jsou libovolné trojúhelníky s délkami stran po řadě a, b, c a k, l, m . Nad stranami trojúhelníka ABC vně sestrojme trojúhelníky $A'BC$, $AB'C$ a ABC' podobné trojúhelníku KLM . Nechť R, S, T jsou středy kružnic opsaných trojúhelníkům $A'BC$, $AB'C$, ABC' a r_a, r_b, r_c jejich poloměry, obr. 1.



Obr. 1 $\triangle RST \sim A'BC \sim AB'C \sim ABC'$

Podle kosinové věty platí v trojúhelníku AST

$$|ST|^2 = |AS|^2 + |AT|^2 - 2|AS| \cdot |AT| \cos(\alpha + \kappa) = r_b^2 + r_c^2 - 2r_b r_c \cos(\alpha + \kappa),$$

$$|ST|^2 = r^2 \left(\frac{b^2}{l^2} + \frac{c^2}{m^2} - 2 \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{c}{m} (\cos \alpha \cos \kappa - \sin \alpha \sin \kappa) \right).$$

Po úpravách dostaneme

$$2 \frac{|ST|^2}{k^2} = \frac{r^2}{k^2 l^2 m^2} \left(k^2 (-a^2 + b^2 + c^2) + l^2 (a^2 - b^2 + c^2) + m^2 (a^2 + b^2 - c^2) + 16PQ \right), \quad (3)$$

kde P, Q značí po řadě obsahy trojúhelníků ABC , KLM . Vidíme, že výraz na pravé straně (3) je symetrický. To znamená, že pro ostatní délky $|TR|/l$

a $|RS|/m$ dostaneme stejný výsledek, jak se lze ostatně přesvědčit přímým výpočtem. Odtud plyne

$$\frac{|RS|}{m} = \frac{|ST|}{k} = \frac{|TR|}{l},$$

což znamená, že trojúhelník RST je podobný trojúhelníku KLM . $\square$

Použitím předchozí úvahy dostaneme nerovnost Neuberger–Pedoe (1) tak, že podobné trojúhelníky $A'BC, AB'C, ABC'$ nad stranami trojúhelníka ABC místo vně sestrojíme *dovnitř* trojúhelníka ABC . Po úpravách dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} & 2 \frac{|ST|^2}{k^2} = \\ & = \frac{r^2}{k^2 l^2 m^2} (k^2(-a^2 + b^2 + c^2) + l^2(a^2 - b^2 + c^2) + m^2(a^2 + b^2 - c^2) - 16PQ), \quad (4) \end{aligned}$$

která se liší od (3) pouze znaménkem minus u členu $16PQ$. Vidíme, že pravá strana (4) je větší nebo rovna nule, protože levá strana je nezáporná. Tedy platí:

$$k^2(-a^2 + b^2 + c^2) + l^2(a^2 - b^2 + c^2) + m^2(a^2 + b^2 - c^2) \geq 16PQ. \quad (5)$$

Rovnost v (5) nastane právě když $|ST| = |TR| = |RS| = 0$, tj. $\alpha = \kappa$, $\beta = \lambda$, $\gamma = \mu$, a trojúhelníky ABC a KLM jsou podobné. $\square$

Řešení metodou sos. Nyní nerovnost (1) dokážeme způsobem, který využívá vyjádření polynomu, který danou nerovnost popisuje, ve tvaru součtu čtverců polynomů.

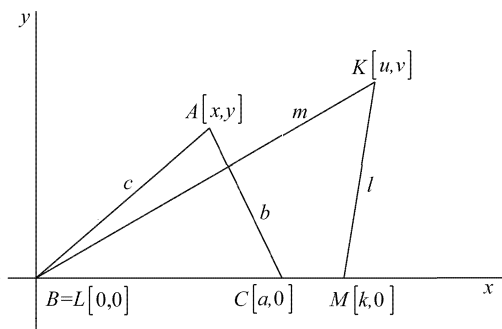
Trojúhelníky ABC, KLM umístíme do kartézské soustavy souřadnic tak, že $A[x, y]$, $B[0, 0]$, $C[a, 0]$, $K[u, v]$, $L[0, 0]$, $M[k, 0]$ (obr. 2). Délky stran $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $k = |LM|$, $l = |MK|$, $m = |KL|$ a obsahy P, Q vyjádříme pomocí souřadnic ve tvaru algebraických rovností:

$$\begin{aligned} b = |CA| & \Leftrightarrow h_1 : (x - a)^2 + y^2 - b^2 = 0, \\ c = |AB| & \Leftrightarrow h_2 : x^2 + y^2 - c^2 = 0, \\ l = |MK| & \Leftrightarrow h_3 : (u - k)^2 + v^2 - l^2 = 0, \\ m = |KL| & \Leftrightarrow h_4 : u^2 + v^2 - m^2 = 0, \\ P = \text{obsah } ABC & \Leftrightarrow h_5 : 2P - ay = 0, \\ Q = \text{obsah } KLM & \Leftrightarrow h_6 : 2Q - kv = 0. \end{aligned}$$

Nechť t je pomocná proměnná, která splňuje podmínku
 $h_7 : k^2(-a^2 + b^2 + c^2) + l^2(a^2 - b^2 + c^2) + m^2(a^2 + b^2 - c^2) - 16PQ - t = 0$.

Pomocnou proměnnou t nejprve vyjádříme pomocí *nezávislých* proměnných x, y, a, u, v, k . Poté proměnnou t vyjádříme ve tvaru součtu čtverců polynomů, ze kterého plyne její nezápornost.

Nejprve v ideálu $I = (h_1, h_2, \dots, h_7)$ eliminujeme *závislé* proměnné b, c, l, m, p, q .



Obr. 2

V programu CoCoA^{*)} dostaneme

```
Use R:=Q[xyuvakbclmpqt];
I:=Ideal((x-a)^2+y^2-b^2,x^2+y^2-c^2,(u-k)^2+v^2-l^2,
u^2+v^2-m^2,2p-ay,2q-kv,
k^2(-a^2+b^2+c^2)+l^2(a^2-b^2+c^2)+m^2(a^2+b^2-c^2)-16pq-t);
Elim(b..q,I);
```

jediný polynom, který vede na rovnici, ze které získáme t

$$t = 2u^2a^2 + 2v^2a^2 - 4xuak - 4yvak + 2x^2k^2 + 2y^2k^2. \quad (6)$$

Nyní pravou stranu (6) vyjádříme ve tvaru součtu čtverců. Dostaneme

$$t = 2(xk - ua)^2 + 2(yk - va)^2. \quad (7)$$

^{*)} Software CoCoA je volně ke stažení na adrese <http://cocoa.dima.unige.it>

Z vyjádření t ve tvaru součtu čtverců (7) plyne nerovnost (1). Rovnost v (1) nastane právě když v (7) platí $xk - ua = 0$ a zároveň $yk - va = 0$ nebo-li $a/k = x/u = y/v$, tj. trojúhelníky ABC a KLM jsou podobné. Tvrzení je dokázáno. $\square$

Ve shora zmíněném příkladu jsme pomocnou proměnnou t vyjádřili ve tvaru součtu čtverců ručně — bez použití počítače. Obecně je však vyjádření nezáporného polynomu^{*)} ve tvaru součtu čtverců obtížné. Navíc se ukázalo, že *ne každý* nezáporný polynom lze ve tvaru součtu čtverců vyjádřit. Tato otázka souvisí se 17. Hilbertovým problémem, který *D. Hilbert* vyslovil na Mezinárodním kongresu matematiků v roce 1900 v Paříži. Formulace 17. Hilbertova problému je následující:

Je každý nezáporný polynom součtem čtverců racionálních funkcí?

17. Hilbertův problém potvrdil *E. Artin* v roce 1927. Jeho důkaz však neukazuje, jak daný rozklad na součet čtverců najít. Existuje však počítačový program, který tento rozklad provádí. Postup je založen na metodě, která je zobecněním postupu, který se používá při uvedení kvadratické formy na kanonický tvar, a která využívá vlastních čísel jisté Grammovy matice, viz [3].

Závěrem uvedeme příklad polynomu, který je nezáporný a který *nelze* vyjádřit ve tvaru součtu čtverců polynomů. Lze jej však vyjádřit podle 17. Hilbertova problému ve tvaru součtu čtverců podílů polynomů (racionálních funkcí).

Příklad (Motzkin)

$$M(x, y, z) = x^4y^2 + x^2y^4 + z^6 - 3x^2y^2z^2 \geq 0,$$

neboť podle A-G nerovnosti

$$x^4y^2 + x^2y^4 + z^6 \geq 3\sqrt[3]{x^4y^2x^2y^4z^6} = 3x^2y^2z^2.$$

Ale $M(x, y, z)$ nelze ve tvaru součtu čtverců polynomů vyjádřit.

Podle 17. Hilbertova problému však lze $M(x, y, z)$ napsat jako součet 4 čtverců racionálních funkcí [6]

^{*)} Polynom $f(x, y, z)$ je nezáporný, jestliže pro všechna reálná x, y, z je $f(x, y, z) \geq 0$.

$$M(x, y, z) = \left[\frac{x^2 y (x^2 + y^2 - 2z^2)}{x^2 + y^2} \right]^2 + \left[\frac{xy^2 (x^2 + y^2 - 2z^2)}{x^2 + y^2} \right]^2 + \\ + \left[\frac{xyz (x^2 + y^2 - 2z^2)}{x^2 + y^2} \right]^2 + \left[\frac{(x^2 - y^2) z^3}{x^2 + y^2} \right]^2. \quad \square$$

Historie 17. Hilbertova problému od jeho vzniku až po současnost je poutavě podána v článku [6], který čtenářům velmi doporučuji. Z právě uvedeného příkladu plyne, že ne každou geometrickou nerovnost lze řešit způsobem, který jsme použili k řešení nerovnosti (1). Řadu dalších geometrických nerovností, řešených shora uvedenou metodou lze nalézt v [5].

Literatura

- [1] *Boček, L.*: O jedné nerovnosti pro součin obsahů dvou trojúhelníků. *Rozhledy Matematicko-fyzikální* 59 (1980-1981), 244–249.
- [2] *Mitrinović, D. S. – Pečarić, J. E. – Volenec, V.*: Recent Advances in Geometric Inequalities. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London (1989).
- [3] *Parrilo, P. A.*: Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization. PhD. thesis. California Institute of Technology, Pasadena, California (2000).
- [4] *Pedoe, D.*: Thinking Geometrically. *Amer. Math. Monthly* 77 (1970), 711–720.
- [5] *Pech, P.*: Selected topics in geometry with classical vs. computer proving. World Scientific Publishing, New Jersey, London, Singapore (2007).
- [6] *Reznick, B.*: Some concrete aspects of Hilbert's 17th Problem. *Contemp. Math.* 253 (2000), 257–272.
- [7] *Weitzenböck, R.*: *Math. Zeitschrift* 5 (1919), 137–146.

Vzdálenost bodu od přímky

FRANTIŠEK ŠÍMA

VŠTE, České Budějovice

Hledání více způsobů řešení matematických úloh je výzvou pro studenty, aby nepracovali jen formálně, ale aby i samostatně usilovali objevovat nové cesty, kterých je někdy i více. Formulujme si nyní jednu úlohu z analytické

geometrie a na ní ukážeme, že různých způsobů řešení může být opravdu mnoho od řešení čistě formálních až po velmi kreativní.

Úloha

Určete vzdálenost bodu $M[2; 3; 1]$ od přímky $a: x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = 2 - t, t \in \mathbb{R}$.

Řešení č. 1

Prostorové řešení:

- 1) Zvolíme rovinu $\alpha, M \in \alpha, \alpha \perp a$,
- 2) určíme průsečík $R, R = \alpha \cap a$,
- 3) hledaná vzdálenost $v = |MR|$.

Analytický postup:

1) Přímka a má směrový vektor $\mathbf{u} = (2; 1; -1)$, z čehož v obecné rovnici $ax + by + cz + d = 0$ roviny α máme

$$2x + y - z + d = 0.$$

Po dosazení souřadnic bodu M vypočteme $d: 2 \cdot 2 + 3 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = -6$ a rovina α má rovnici:

$$2x + y - z - 6 = 0.$$

2) Pro průsečík R přímky a s rovinou α platí, že je řešením soustavy rovnic

$$2x + y - z - 6 = 0, \quad x = 1 + 2t, \quad y = 2 + t, \quad z = 2 - t.$$

Po dosazení za x, y, z do první rovnice dostáváme

$$2(1 + 2t) + 2 + t - (2 - t) - 6 = 0, \quad \text{tj.} \quad t = \frac{2}{3}.$$

Dosazením za t do 2., 3. a 4. rovnice původní soustavy dostáváme souřadnice bodu $R = \left[\frac{7}{3}; \frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

3) Pro vzdálenost bodů M, R platí

$$\begin{aligned} v = |MR| &= \sqrt{\left(\frac{7}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 1\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \end{aligned}$$

takže hledaná vzdálenost je $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Řešení č. 2

Prostorové řešení:

- 1) Zvolíme přímku b , $b \parallel a$, $M \in b$,
- 2) počátkem O vedeme rovinu σ , $\sigma \perp a$, $\sigma \perp b$,
- 3) určíme průsečíky $Q = \sigma \cap a$, $R = \sigma \cap b$,
- 4) hledaná vzdálenost je vzdálenost bodů Q , R .

Analytický postup:

- 1) Rovnice přímky b je $x = 2 + 2t$, $y = 3 + t$, $z = 1 - t$, $t \in \mathbb{R}$.
- 2) Rovina σ má normálový vektor $\mathbf{n} = (2; 1; -1)$, její rovnice je tedy (σ prochází počátkem)

$$2x + y - z = 0.$$

- 3) Vypočteme průsečíky Q , R :

a) $Q = \sigma \cap a$: $2(1+2t) + (2+t) - (2-t) = 0$, takže $t = -\frac{1}{3}$ a $a = [\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}]$.

b) $R = \sigma \cap b$: $2(2+2t) + (3+t) - (1-t) = 0$, takže $t = -1$ a $R = [0; 2; 2]$.

- 4) Pro v platí

$$v = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Řešení č. 3

Prostorové řešení:

- 1) Přímka a je množina bodů X , $\mathbf{u}$ je směrový vektor přímky a , vektor $\mathbf{v} = X - M$,
- 2) pro vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ platí $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, z toho určíme vektor $\mathbf{v}$,
- 3) známe-li vektor $\mathbf{v}$, určíme souřadnice jeho koncového bodu X_0 ,
- 4) hledaná vzdálenost $v = |MX_0|$.

Analytický postup:

1) Použijeme parametrické vyjádření libovolného vektoru $\mathbf{v} = X - M$, kde M je daný bod a X libovolný bod přímky a , jejíž směrový vektor $\mathbf{u} = (2; 1; -1)$. Potom lze bod X a vektor $\mathbf{v}$ vyjádřit

$$X = [1 + 2t; 2 + t; 2 - t], \quad t \in \mathbb{R},$$

$$v = X - M = (1 + 2t - 2; 2 + t - 3; 2 - t - 1) = (-1 + 2t; -1 + t; 1 - t).$$

2) Zapišeme podmínku kolmosti vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$: $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, tedy

$$(-1 + 2t) \cdot 2 + (-1 + t)1 + (1 - t)(-1) = 0,$$

z čehož $t_0 = \frac{2}{3}$.

3) Tomuto t_0 odpovídá bod X_0 přímky a , který je patou kolmice z bodu M na přímku a ,

$$X_0 = \left(1 + \frac{4}{3}; 2 + \frac{2}{3}; 2 - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

4) Pro hledanou vzdálenost v platí (viz řešení č. 1) $v = |MX_0| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Řešení č. 4

Prostorové řešení:

- 1) Určíme rovnici roviny α , $M \in \alpha$, $a \subset \alpha$,
- 2) v rovině α sestrojíme kolmici k na přímku a ,
- 3) určíme průsečík $R = a \cap k$,
- 4) hledaná vzdálenost $v = |MR|$.

Analytický postup:

1) Na přímce a zvolíme libovolné dva body $A = [1; 2; 2]$ ($t = 0$), $B = [3; 3; 1]$ ($t = 1$) a určíme rovnici roviny $\alpha = ABM$. Obecná rovnice roviny je $ax + by + cz + d = 0$. Postupným dosazením souřadnic bodů A , B , M dostáváme

$$a + 2b + 2c + d = 0,$$

$$3a + 3b + c + d = 0,$$

$$2a + 3b + c + d = 0.$$

Vzhledem k tomu, že jedna z konstant bude parametrem, můžeme si zvolit např. $d = -4$.

Potom

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right),$$

odkud plyne $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$.

Rovnice roviny α je (její normálový vektor je $\mathbf{v} = (0; 1; 1)$)

$$y + z = 4.$$

2) Pro směrový vektor $\mathbf{w} = (w_1; w_2; w_3)$ hledané kolmice platí $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{u}$, kde $\mathbf{u}$ je směrový vektor dané přímky a , $\mathbf{v}$ je normálový vektor roviny α . Z toho plyne

$$0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3 = 0,$$

$$2 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 - 1 \cdot w_3 = 0.$$

Řešením této soustavy je $\mathbf{w} = (w_3; -w_3; w_3)$ a zvolíme-li $w_3 = 1$, je řešením $\mathbf{w} = (1; -1; 1)$.

3) Řešíme soustavu rovnic

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + t, \quad z = 2 - t,$$

$$x = 2 + r, \quad y = 3 - r, \quad z = 1 + r, \quad \text{pro } t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}.$$

Řešení je $t = \frac{2}{3}$, $r = \frac{1}{3}$ a souřadnice průsečíku jsou $R = [\frac{7}{3}; \frac{8}{3}; \frac{4}{3}]$.

4) Hledaná vzdálenost $v = |MR|$ je (viz řešení1) tedy $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Řešení č. 5

Idea řešení:

Využijeme vzorec pro výpočet obsahu rovnoběžníka $Sr = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. Z tohoto vzorce dostáváme pro obsah trojúhelníku $S = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{2}$. Vyjádříme-li z tohoto vzorce výšku v , dostáváme $v = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}$.

Prostorové řešení:

1) Na přímce a zvolíme body A, B (např. pro $t = 0$ a 1), tím vznikne trojúhelník ABM , a zvolíme dva vektory, např. $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = M - A$,

2) pro vzdálenost v použijeme výše uvedený vztah (viz též [3], [4]).

Analytický postup:

1) Zvolíme body $A, B \in a$ pro $t = 0$ a $t = 1$, dostaneme $A = [1; 2; 2]$, $B = [3; 3; 1]$, $M = [2; 3; 1]$; pak

$$\mathbf{u} = B - A = (2; 1; -1), \quad \mathbf{v} = M - A = (1; 1; -1).$$

2) Vypočteme

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1 + 1)x_1 + (-1 + 2)x_2 + (2 - 1)x_3 = 0x_1 + x_2 + x_3,$$

takže $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0; 1; 1)$ a $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, a dále $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

Pro výslednou vzdálenost v vychází

$$v = \frac{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Řešení č. 6

Idea řešení:

Body, které mají hledanou vzdálenost od bodu M , leží na kulové ploše κ . Přímka a je její tečnou. Proto, řešíme-li soustavu rovnic kulové plochy (o neznámém poloměru r) a přímky a , dostaneme po dosazení kvadratickou rovnici. Úloha musí mít jediné řešení (přímka a je tečnou této kulové plochy), proto diskriminant kvadratické rovnice se musí rovnat nule. Z toho určíme velikost r , což je hledaná vzdálenost.

Prostorové řešení:

- 1) Sestavíme rovnici kulové plochy o středu M a poloměru r ,
- 2) Z podmínky, že přímka a je tečnou kulové plochy určíme r .

Analytický postup:

- 1) 2) Do rovnice kulové plochy κ

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = r^2$$

dosadíme z parametrického vyjádření přímky a a dostáváme rovnici

$$(1 + 2t - 2)^2 + (2 + t - 3)^2 + (2 - t - 1)^2 = r^2,$$

která po úpravě dává

$$6t^3 - 8t + 3 - r^2 = 0.$$

Diskriminant $D = (-8)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (3 - r^2) = 24r^2 - 8 = 8(3r^2 - 1)$ položíme roven nule a z kořenů rovnice $3r^2 - 1 = 0$ vyhovuje kladný kořen $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$, což je hledaná vzdálenost.

Řešení č. 7

Prostorové řešení:

- 1) Na přímce a zvolíme bod B o stejné souřadnici z jakou má bod M , dále na této přímce zvolíme libovolný bod A ($A \neq B$),
- 2) rovinu ABM (bod A) otočíme kolem osy $o = BM$ do roviny π' , $\pi' \parallel \pi$, $o \subset \pi'$ (π je rovina $z = 0$),
- 3) úlohu řešíme v rovině π' .

Analytický postup:

1) Souřadnice $z_B = z_M = 1$, tj. $z = 2 - t = 1 \Rightarrow t = 1$; potom $B = [3; 3; 1]$; dále zvolme $A = [1; 2; 2]$, ($t = 0$). Osa $o = BM$ má rovnice $x = 2 + t$, $y = 3$, $z = 1$, její směrový vektor $s = B - M = (1; 0; 0)$.

2) Bod A otočíme po kružnici k , která leží v rovině α , $\alpha \perp o$, střed otáčení $S = \alpha \cap o$.

Rovnice roviny α je $1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + d = 0$, tj. $x + d = 0$, a ježto $A \in \alpha$, je $1 + d = 0$ a dostáváme

$$x - 1 = 0.$$

Střed otáčení S je řešením soustavy rovnic $x - 1 = 0$ a $x = 2 + t$, $y = 3$, $z = 1$, takže $S = [1; 3; 1]$. Poloměr otáčení je

$$r = |AS| = \sqrt{(1-1)^2 + (3-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}.$$

Kružnice k otáčení je průnikem kulové plochy $\varkappa = (S; r)$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 2.$$

a roviny α , takže je dána vztahy

$$x = 1, \quad (y-3)^2 + (z-1)^2 = 2.$$

Bod A otočíme do roviny π' ($z = 1$) a dostaneme bod $A_0 = k \cap \pi'$; do předchozí rovnice tedy dosadíme $z = 1$ a dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 - 6y + 7 = 0$$

se dvěma kořeny, které odpovídají dvěma možnostem otočení $y_1 = 3 - \sqrt{2}$, $y_2 = 3 + \sqrt{2}$. Vyberme si první z nich; vzhledem k tomu, že $x = 1$ a $z = 1$, máme $A_0 = [1; 3 - \sqrt{2}; 1]$.

3) V rovině $z = 1$ vypadá situace takto:

$$A_0 = [1; 3 - \sqrt{2}], \quad B = [3; 3], \quad M = [2; 3].$$

Vzdálenost bodu M od přímky $a = AB$ vypočteme podle vzorce

$$v(M, a) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Směrový vektor přímky a je $\mathbf{u} = B - A = (2; \sqrt{2})$, její parametrické rovnice jsou $x = 3 + 2t$, $y = 3 + t\sqrt{2}$, obecná rovnice přímky a je pak

$$x\sqrt{2} - 2y + 6 - 3\sqrt{2} = 0.$$

Nakonec tedy

$$v = \frac{|2\sqrt{2} - 2 \cdot 3 + 6 - 3\sqrt{2}|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-2)^2}} = \frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Řešení č. 8

Idea řešení:

Budeme uvažovat, že vzdálenost jednotlivých bodů přímky a od bodu M tvoří funkci $f(t)$, jejíž minimem je právě hledaná vzdálenost bodu M od přímky a .

Analytický postup:

Je-li X libovolný bod přímky a , je

$$\begin{aligned} f(t) = MX &= \sqrt{(1+2t-2)^2 + (2+t-3)^2 + (2-t-1)^2} = \\ &= \sqrt{(-1+2t)^2 + (-1+t)^2 + (1-t)^2} = \sqrt{3-8t+6t^2} \end{aligned}$$

a funkce $f(t)$ má nabývat svého minima.

Extrémy funkce můžeme vyšetřit pomocí derivace. Z praktické povahy úlohy vidíme, že tato funkce minimální hodnoty v některém bodě nabude, takže stačí najít jen stacionární bod; je-li jeden, nastává minimum v něm. První derivaci

$$f'(t) = \frac{12t-8}{2\sqrt{3-8t+6t^2}}$$

položíme rovnu nule, z čehož dostaneme $t_0 = \frac{2}{3}$. Hledaná vzdálenost je $f(t_0)$, tj.

$$v = f(t_0) = \sqrt{3-8t_0+6t_0^2} = \sqrt{3-\frac{16}{3}+\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Minimum funkce f lze určit i bez derivace. Pod odmocninou v rovnici funkce je kvadratický trojčlen, který lze upravit tak, že

$$f(t) = \sqrt{\frac{1}{3} + \left(t\sqrt{6} - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2}.$$

Je-li výraz v závorce roven nule (tj. $t_0 = \frac{2}{3}$), nabývá f své minimální hodnoty $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Řešení č. 9

Idea řešení: V knize [1] je uveden následující vzorec pro vzdálenost bodu M od přímky a v prostoru: Je-li A libovolný bod přímky a , $\mathbf{a}_0 = A - O$, $\mathbf{m} = M - O$, $\mathbf{u}$ směrový vektor přímky a , potom pro vzdálenost v bodu M od přímky a platí

$$v = \left| \mathbf{a}_0 - \mathbf{m} + \frac{(\mathbf{m} - \mathbf{a}_0) \cdot \mathbf{u}}{u^2} \cdot \mathbf{u} \right|.$$

Analytický postup:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_0 &= A - O = (1; 2; 2), \quad \mathbf{m} = M - O = (2; 3; 1), \quad \mathbf{u} = (2; 1; -1), \\
 v &= \left| (1; 2; 2) - (2; 3; 1) + \frac{[(2; 3; 1) - (1; 2; 2)] \cdot (2; 1; -1)}{(2; 1; -1)^2} \cdot (2; 1; -1) \right| = \\
 &= \left| (-1; -1; 1) + \frac{(1; 1; -1) \cdot (2; 1; -1)}{6} \cdot (2; 1; -1) \right| = \\
 &= \left| (-1; -1; 1) + \frac{2}{3} \cdot (2; 1; -1) \right| = \left| (-1; -1; 1) + \left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right) \right| = \\
 &= \left| \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

Řešení č. 10

Idea řešení: V knize [7] je uveden následující vzorec: Má-li bod M souřadnice $M = [x_0; y_0; z_0]$ a přímka a rovnice $x = az + p$, $y = bz + q$, potom pro vzdálenost v bodu M od přímky a platí vztah

$$v = \sqrt{\frac{(aq - bp + bx_0 - ay_0)^2 + (p + az_0 - x_0)^2 + (q + bz_0 - y_0)^2}{a^2 + b^2 + 1}}. \quad (1)$$

Analytický postup:

Vzhledem k tomu, že rovnici přímky máme v jiném tvaru, musíme ji na potřebný tvar převést, tj. ze soustavy rovnic $x = 1 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = 2 - t$ musíme vytvořit soustavu rovnic typu $x = az + p$, $y = bz + q$. To provedeme tak, že z poslední rovnice dané soustavy vyjádříme t a dosadíme je do prvních dvou rovnic; máme tak $t = 2 - z$, a z toho

$$\begin{aligned}
 x &= 1 + 2t = 1 + 2(2 - z) = 5 - 2z, \quad \text{tedy} \quad x = -2z + 5, \\
 y &= 2 + t = 2 + 2 - z = 4 - z, \quad \text{tedy} \quad y = -z + 4.
 \end{aligned}$$

Z toho pro dosazení do vzorce (1) máme

$$a = -2; \quad b = -1; \quad p = 5; \quad q = 4; \quad x_0 = 2; \quad y_0 = 3; \quad z_0 = 1,$$

takže

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{(-2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3)^2 + (5 - 2 \cdot 1 - 2)^2 + (4 - 1 \cdot 1 - 3)^2}{(-2)^2 + (-1)^2 + 1}} = \\ &= \dots = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

L i t e r a t u r a

- [1] *Bartsch, H. J.*: Matematické vzorce, SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha 1983.
- [2] *Brožíková, E. – Kittlerová, M.*: Lineární algebra a Analytická geometrie, Vydavatelství ČVUT, Praha 2004.
- [3] *Bubeník, F. – Zindulka, O.*: Matematika 1, Vydavatelství ČVUT, Praha 2005.
- [4] *Charvát, J. – Kelar, V. – Šibrava, Z.*: Matematika 1, Sbíрка příkladů, Vydavatelství ČVUT, Praha 2005.
- [5] *Mikulčák, J. a kol.*: Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, SPN, Praha 1988.
- [6] *Šedivý, J. a kol.*: Matematika pro III. ročník gymnázií, SPN, Praha 1986.
- [7] *Vojtěch, J.*: Základy matematiky, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha 1928.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 153 a 154, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle tohoto (18.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 153

Najděte všechny dvojice reálných čísel (x, y) vyhovující soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 2x^3 + y^3 &= 6, \\ 8x^2y + xy^2 &= 12. \end{aligned}$$

Jaromír Šimša

Od dvojnásobku první rovnice dané soustavy odečteme druhou rovnici a dostaneme

$$4x^3 - 8x^2y - xy^2 + 2y^3 = 0.$$

Tuto rovnici upravíme na (faktorizovaný) tvar

$$(x - 2y)(2x - y)(2x + y) = 0.$$

Nastane proto nutně jeden z případů

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = 2x, \quad y = -2x.$$

Dosazením za y do kterékoliv (např. první) z rovnic dané soustavy obdržíme v jednotlivých případech

$$\frac{17}{8}x^3 = 6, \quad 10x^3 = 6, \quad -6x^3 = 6,$$

odkud již vypočteme neznámou x . Úloha má v oboru reálných čísel tři řešení, kterými jsou následující dvojice (x, y) :

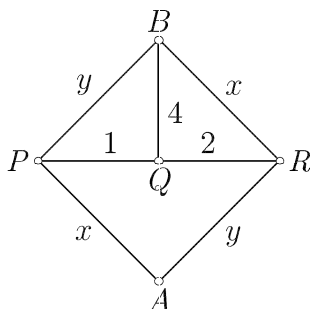
$$\left(2\sqrt[3]{\frac{6}{17}}; \sqrt[3]{\frac{6}{17}}\right), \quad \left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}}; 2\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right), \quad (-1; 2)$$

Zkouška u toho postupu není nutná.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Dáša Pekárková* z Tá-bora, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Simona Domesová*, *Lucie Mohelníková*, *Jitka Novotná* a *Eliška Nekvapilová*, všichni z GMK v Bílovci, *Jana Fal-týnková* z CMG v Prostějově, *Jaromír Kala*, *David Kláška*, *Hana Šormová* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tč. Kpt. Jaroše, *Radek Marciňa* z GChD v Praze 5, Zborovská, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Van Nhan Nguyen* a *Martin Výška*, oba z G v Praze 6, Nad Alejí, *Josef Ondřej* G v Rožnově p. R., *Alexander Slávik* z G v Brně-Řečkovcích, *Josef Tkadlec* a *Tomáš Zeman*, oba z GJK v Praze 6 a *Jan Vaňhara* z GLJ v Holešově.

Neúplné řešení zaslal *Vladimír Pavel* z Blovic.

Úloha 154



Na obrázku je schéma cest mezi místy A, B, P, Q, R i s údaji o jejich délce v kilometrech. Určete nejkratší cestu z A do B v závislosti na reálných hodnotách $x, y \in \langle 1; 8 \rangle$ (trojúhelníkové nerovnosti nemusejí být splněny). V rovině proměnných xy vyznačte výsledné podmínky.

Stanislav Trávníček

Řešení:

Stačí uvažovat šest různých cest vedoucích z bodu A do bodu B ,

APB , $APQB$, $APQRB$, $ARQP B$, $ARQB$, ARB .

Jejich délky jsou po řadě

$$x + y, \quad x + 5, \quad 2x + 3, \quad 2y + 3, \quad y + 6, \quad x + y.$$

V jednotlivých případech vyšetříme, kdy jsou uvažované cesty nejkratší:

- Cesta APB (spolu s cestou ARB) je nejkratší, právě když

$$y < 5, \quad y < 3 + x, \quad y > x - 3, \quad x < 6.$$

- Cesta $APQB$ je nejkratší, právě když

$$y > 5, \quad x > 2, \quad \underline{y > \frac{1}{2}(x + 2)}, \quad y > x - 1,$$

přitom podtržená podmínka je důsledkem první podmínky a podmínky $x \leq 8$.

- Cesta $APQRB$ je nejkratší, právě když (podtržené podmínky jsou důsledkem zbývajících a omezení na x, y)

$$y > x + 3, \quad x < 2, \quad \underline{y > x}, \quad \underline{y > 2x - 3}.$$

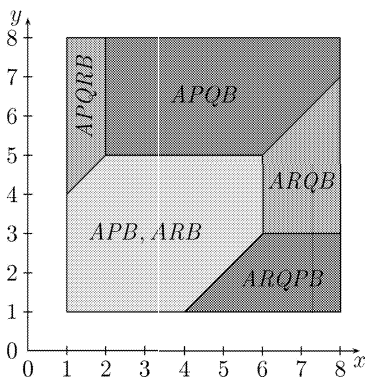
- Cesta $ARQPB$ je nejkratší, právě když

$$y < x - 3, \quad \underline{y < \frac{1}{2}(x + 2)}, \quad \underline{y < x}, \quad y < 3.$$

- Cesta $ARQB$ je nejkratší, právě když

$$x > 6, \quad y < x - 1, \quad \underline{y < 2x - 3}, \quad y > 3.$$

V následujícím grafu jsou vyznačeny výsledné podmínky pro jednotlivé cesty spolu s jejich označením. (Na společných hranicích oblastí je nejkratších cest více.)



Správné řešení zaslali: *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jaromír Kala*, *Jiří Marek* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Lucie Mohelníková*, *Jitka Novotná* a *Eliška Nekvapilová*, všichni z GMK v Bílovci, *Van Nhan Nguyen* a *Martin Výška*, oba z G v Praze 6, Nad Alejí, *Alexander Slávik* z G v Brně-Řečkovících, *Josef Tkadlec* a *Tomáš Zeman*, oba z GJK v Praze 6.

Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Pavel Calábek