

MATEMATIKA

Příprava učitele k zadávání písemek

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Motto: Tak jsem včera, pane kolego, vymyslel
takovou písemku, že s ní dnes nikdo ani nehne.

Odposlechnuto ...

Učitelé matematiky, kteří si zvolili toto povolání a chtějí v něm setrvat, by si jako jeden z životních cílů měli dát: stát se dobrým učitelem, trvale se vzdělávat, ale pracovat racionálně. V tomto článku se zabýváme racionalizací učitelovy přípravy k zadávání písemek. Budeme zde pojednávat zejména o klasických písemkách klasifikačních (čtvrtletních) a tematických (po probrání většího tématu) na středních školách; ostatních písemek a nižších stupňů škol se naše úvahy týkají přiměřeně. Věříme, že písemky pro svou didaktickou hodnotu (nejde jen o klasifikaci, viz např. [4]) jistě z dobré školy nevymizí.

Písemka se vždy vztahuje k nějakému časovému období, někdy kratšímu, někdy delšímu. Učitel volí úlohy, které jsou sondami do celého tohoto období. Je však vhodné, aby některé obsahovaly i prvky období předšlých. Např. při písemce z analytické geometrie v prostoru zařadit úlohy, kde by se řešila kvadratická rovnice nebo soustava rovnic nebo některá planimetrická konstrukce. Cílem učitele je, aby vyzkoušel přesně to, co chce, a při opravě se o žácích dozvěděl to, co potřebuje, jak žáci zkoušené učivo pochopili, jak je dovedou aplikovat a v čem jsou ještě nedostatky. Proto zbytečně nekomplikuje úlohy nepodstatnými vedlejšími problémy. Jestliže chce např. především prověřit, jak žáci dovedou používat vzorce pro výpočet obsahů a objemů, nevolí úlohy se složitými úpravami zlomků. Ale také může, pokud chce prověřit současně i práci se zlomky.

Učitel připravuje písemku tak, aby žáci mohli pracovat klidně a samostatně. Klid pomůže navodit důvěra žáků, že je čekají úkoly, jejichž splnění je v jejich moci (tj. žádné „chytáky“, ale typy úloh, jaké byly dříve probrány a procvičeny). Pro zajištění samostatnosti práce a klidu při práci je vhodné posadit žáky do lavic po jednom. To však často není možné a tak se písemky zadávají ve více verzích, zpravidla ve dvou, A a B. Jestliže totiž dva žáci ve stejné lavici řeší tutéž úlohu, tak je tato okolnost v podstatě ruší v práci. Buď je to láká k zvědavému nakukování k sousedovi – jak je už daleko? postupoval jako já? má stejný výsledek? – nebo dokonce ke snaze načerpat inspiraci pro svou další práci. Bohužel, zatím u nás mnohde (kde ještě nevzniklo ani čestné ani konkurenční prostředí) považují žáci i přímé opisování při písemkách a posílání taháků za kladný výraz solidarity. Proto budeme dále pojednávat o dvou verzích A, B písemkových úloh.

Jaké zdroje úloh (jejich verzí) má učitel k dispozici:

- převzetí úloh z učebnic nebo sbírek,
- obměna úloh z učebnic a sbírek,
- vymýšlení úloh,
- použití či obměna úloh z vlastní databáze.

Vyrovnanost verzí úloh

Při přípravě úloh na písemku usiluje učitel o to, aby se mu podařilo vyhledat nebo vytvořit dvě rovnocenné, ale přece jen různé verze úloh; zpravidla verze A, B, případně C pro opakování nebo domácí úkol, případně ještě další verze pro paralelní třídu. Zůstaňme však u základního případu dvou verzí A, B. Záleží vždy na matematické úrovni třídy a na jejím zaměření, jak mnoho se tyto verze mohou od sebe lišit, aby byla samostatnost práce zajištěna. V každém případě však musí být zajištěna vyrovnanost úloh ve dvojici. U učiva, které není zcela jednoduché, může být výběr vhodných partnerských úloh A, B dost obtížný a nelze prostě vzít libovolné dvě úlohy, byť blízko sebe napsané, z učebnice nebo sbírky úloh, nechceme-li se při opravě setkat s nepříjemným překvapením (např. že při klasifikaci pak jsou v A samé dvojky a v B samé čtyřky).

Žáci jsou totiž zpravidla citliví na různé jevy, s nimiž se při řešení setkají. I když jde třeba z věcného hlediska o rozdíly nepodstatné, v atmosféře psané písemky se žákům (zejména těm průměrným a slabším) může situace jevit zcela jinak. Uveďme několik příkladů, kdy může být jedna ze skupin věcně nebo časově nepřiměřeně zvýhodněna či znevýhodněna (ve tvaru

dvojic jevů, kde u jedné skupiny se vyskytne jev napsaný před X , u druhé skupiny napsaný za ním):

- běžné označení proměnných, geometrických útvarů, ... X neobvyklé označení;
- pracuje se jen s čísly kladnými X i s čísly zápornými;
- pracuje se s celými čísly X se zlomky a odmocninami;
- v zadání a v řešení se vyskytují jen čísla nenulová X do výpočtů významně vstupuje nula;
- geometrické útvary jsou v „obecné“ poloze X ve zvláštní poloze;
- při konstrukcích jsou všechny body dostupné X musí se pracovat s nedostupnými body;
- problém vede na jednoduchou rovnici nebo soustavu X na složitou rovnici nebo soustavu s náročnějším řešením; apod.

Ano, i tyto „podrobnosti“ by měl učitel uvážit, než dá dvojici úloh definitivu. U složitějších středoškolských úloh uděláme často při sestavování nových dvojic úloh několik marných pokusů, protože se nám spárování úloh z různých důvodů nelíbí. Zpravidla si vybíráme nejprve úlohu A , a k ní vyhledáváme vhodnou B , nebo A obměňujeme pro získání B . Nejsme-li dost pozorní, mohou být z toho důvodu úlohy B trochu obtížnější. První pomocí je, když u čtyřúhlové písemky vždy u dvou úloh zaměníme A za B . Při výběru dvojic se dá akceptovat i „pravidlo“: čím je třída méně matematická, tím si verze mohou být bližší, takže u „normálních“ tříd často stačí zadat ve verzi B stejný problém, jen s jinými numerickými hodnotami, resp. i s jiným označením zadaných objektů (proměnných, bodů, přímk, apod.).

Vložíme nyní do procesu přípravy písemek prvky racionalizace, které spočívají v tom, že si po čase každý zkušený učitel vytvoří „databázi“ svých zadání. V minulých letech nabídl autor čtenářům ve [5] [6] 120 trojic nebo čtveřic úloh vhodných pro zařazení do učitelské databáze písemkových úloh.

Databáze úloh

Učitelovou databází budeme rozumět jeho sbírku úloh, případně sestav úloh vhodných a připravených k použití pro zadání písemky. Samozřejmě taková databáze musí žít, tedy úlohy je třeba obměňovat, osvěžovat doplňováním dalších, vyřazovat ty, které se ukázaly jako málo vhodné, zohledňovat zaměření tříd, věk žáků (při přesunech tématu do jiného ročníku) apod. Každou úlohu je třeba mít alespoň ve dvou rovnocenných verzích,

při výuce v paralelních třídách pak alespoň ve čtyřech verzích s tím, že úlohy ve dvojicích A, B a C, D jsou si blízké, ale druhá dvojice se od první může lišit o něco více (žáci si říkají, z čeho psali písemku).

Při přípravě (dvojice) úloh na písemky – pro zařazení do databáze, se postupuje ve třech etapách [3].

1. *Analytická fáze.* Uvědomíme si, pro jaký druh písemky úlohy připravujeme, co je záměrem a hlavním cílem písemky. Vymezíme obsah (rozsah učiva), tj. jevy, které chceme do písemky zařadit (nové, dřívější), aby bylo zajištěno, že skutečně vyzkoušíme to, co vyzkoušet chceme (tj. aby úloha měla vysokou validitu).

2. *Syntetická fáze.* Zkoumáme vhodnost úloh ze sbírek, případně provádíme jejich obměnu nebo obměnu úloh, které už v databázi máme, nebo si sami nové úlohy sestavíme. Pak postupujeme v realizaci bodů a – h uvedených níže. Z jejich naplňování může zpětnou vazbou vyplynout požadavek na změnu formulace, na změnu údajů v některé verzi úloh apod. a pak tedy příslušné body zpracujeme znovu. Ze zvolených úloh sestavujeme zadání písemky.

3. *Ověření.* Z teoretického hlediska bychom si měli kvalitu písemky ověřit na vzorku žáků, což je v podmínkách školy u nových úloh prakticky ne-realizovatelné. Tato podmínka bývá splněna při použití úloh, které se už v minulosti osvědčily nebo jejich obměn. Při prvním použití úlohy hraje v podmínkách školy významnou roli učitelova zkušenost, tj. když ze zkušenosti a na základě analýzy řešení dovede odhadnout, zda je písemka pro daný účel přiměřená. Je docela vhodné, když mladí, ještě nezkušení učitelé, konzultují návrh své písemky se zkušenějším kolegou.

Dobře vymyšlená a připravená dvojice úloh A, B učiteli velmi usnadňuje a zkvalitňuje také opravu písemek a tím i její informační přínos. Může-li taková dvojice dobře posloužit i v dalších letech, je vhodné ji zařadit do databáze a tím racionalizovat její používání. Zpracování informací o všech variantách úlohy v databázi (dokumentaci úlohy) lze doporučit v tomto rozsahu (pořadí těchto bodů však lze volit i jinak):

- a) Text zadání obou verzí úlohy (nebo čtyř) ve znění, jak jej dostanou žáci.
- b) Organizační poznámky.
- c) Poznámka, co po zadání žákům doplnit, připomenout, doporučit či zdůraznit.
- d) Obsah – které učivo se při řešení aktivizuje a použije.
- e) Jevová analýza, tj. hodnocené kroky (i s jejich vahou v %).

- f) Výsledky a mezivýsledky (případně i celé řešení) všech verzí.
- g) Náročnost úlohy.
- h) Čas na vypracování řešení.

Přitom nemá jít o formální naplňování těchto bodů, ale o shrnutí významných informací o dvojici úloh A, B, které umožňují pohodlné zadávání a jednoduchou, ale přitom kvalitní opravu i hodnocení napsaných písemek.

ad a) K formulacím *textu zadání* úloh na písemku a k problému jejich srozumitelnosti si nejprve ocitujme z knihy [1]:

„Ľahko sa formulujú štandardné úlohy (riešte rovnicu ... ; upravte výrazy ... ; vypočítajte obsah ... ; apod.). Ťažkosti bývajú s textáciou neštandardných úloh, ktoré sa vyskytujú ako slovné rovnice, úlohy z kombinatoriky, pravdepodobnosti, stereometrie apod. Osobitne často sa v týchto formuláciách vyskytujú tri typy chýb: dlhé, gramaticky zložité vety, ktoré nedovoľujú slabším žiakom pochopiť, čo sa od nich chce; možnosť viacznačného pochopenia úlohy; nedostatočné oddelenie toho, čo je dané, od toho, čo sa hľadá – nejasnosť cieľa žiakovej činnosti.“

Úlohy by tedy měly být formulovány naprosto srozumitelně, s přiměřenou přesností a přitom tak, aby bylo žákům jednoznačně zadané a zcela zřejmé, co je jejich úkolem a *co má být výsledkem řešení úlohy*, protože sdělení tohoto výsledku je hlavním úkolem žáka. V úlohách by neměly být na žáky líčeny nějaké léčky. K funkci úloh ve vyučování matematice a k jejich formulaci doporučujeme např. přečtení článku [7].

Dodejme, že by texty neměly být příliš rozsáhlé a vyjadřování by mělo být úsporné (například generální dohodou se žáky, že pokud není zadána množina, předpokládá se množina všech reálných čísel, takže třeba „řešte rovnici“ znamená její řešení v $\mathbb{R}$, apod.). Také texty verzí A, B lze často zapsat společně úsporně (viz dále).

ad b) K dané úloze se mohou vztahovat některé *organizační poznámky*, např. o učebně (je-li potřebná učebna s počítači), o vybavení žáků (třeba šablonami), o organizaci hodiny aj. Speciálně významná je technická stránka *způsobu zadávání textu* verzí A, B ve vyučovací hodině; měli bychom zabránit ztrátám času. Připomeňme nejprve „klasický“ způsob, kdy učitel píše zadání na tabuli. Je-li zadání jen krátké, je to způsob vhodný. V dnešní době, kdy se velmi zpřístupnily možnosti rozmnožování textů, mohou žáci na počátku písemky dostat lístky s texty zadání úloh, ušetří se tím čas (ne čas učitele, který musí zadání napsat, namnožit a nastříhat lístky, ale čas ve vyučovací hodině s písemkou) a usnadní se zadání např. pro žáky, kteří

hůře vidí. Diktování zadání lze považovat za málo vhodné a použitelné jen zcela výjimečně u úloh s jednoduchým textem. Jsou však i další možnosti zadávání písemek v závislosti na technickém vybavení školy (různé druhy přenosných tabulí, meotar, počítače). Způsoby zadávání textu mohou být tedy různé a pokud učitel používá více možností, je někdy vhodné si způsob poznamenat do bodu b) dokumentace úlohy.

ad c) *Co před písemkou žákům sdělit.* Po zadání písemky dá učitel k písemce případné pokyny, a to všeobecné a k daným úlohám.

Všeobecné pokyny platí pro celou (možná každou) písemku – např. jestli opsat text (mnozí učitelé jsou toho názoru, že když si žák zapisuje text úlohy, pomáhá mu to k jejímu pochopení), že není třeba dodržet pořadí řešených úloh (to je dost rozumné, protože když žák vyřeší úlohu, která je pro něj lehčí, tak se uklidní, získá pocit jistoty a lépe se mu dále pracuje), že žáci nesmějí používat koncepty na nějaké pomocné výpočty a také jim může poradit, aby si po vyřešení každé úlohy resp. po napsání písemky provedli kontrolu řešení a nezapomněli vyznačit výsledky. Může též žáky povzbudit a dodat jim sebedůvěru. Je vhodné jim také sdělit váhy jednotlivých úloh, pokud jsou tyto váhy různé.

Kromě toho může mít pokyny k jednotlivým úlohám, např. aby žáci nezapomněli na jednotky, případně kterým způsobem úlohu řešit (je-li způsobů více), apod. Tyto pokyny tvoří pak část c) dokumentace.

A ještě poznámka: Učitel by měl své poznámky, rady, připomínky a doporučení sdělit žákům hned po zadání úloh, tj. poté, co si je žáci přečtou, a nevytrhovat je později z práce tím, že si bude postupně rozpomínat, co jim všechno chtěl sdělit.

ad d) Když učitel připravuje písemku, napoví mu informace *Obsah*, co může být vhodné před písemkou zopakovat, zejména když úloha zabírá širší úsek učiva, třeba i staršího, a jak v hodinách před písemkou žáky informovat o zkoušeném učivu. .

ad e) *Zápis hodnocených kroků* (jevů) při řešení úlohy je obrazem postupu řešení úlohy; u obtížnějších úloh může obsahovat i úvodní komentář (viz dále Příklad 3). Seznam kroků s jejich oceněním pomáhá učiteli držet stálou úroveň hodnocení v průběhu celé opravy a je podkladem pro bodové hodnocení žákovských řešení úlohy (zde jsme volili bodování pomocí procent). Přidělení bodů jednotlivým krokům má v sobě prvky subjektivity v tom smyslu, že každý učitel to může vidět jinak a může podle situace ve třídě zdůrazňovat jiné kroky než jeho kolega. Do bodu e) se zapisuje běžné obodování kroků. Pokud učitel chce v dané písemce z určitých

důvodů zdůraznit správné provedení určitého kroku a tento krok dotovat více body, pak by to měl žákům sdělit, viz ad c); při „normálním“ vážení kroků není třeba žáky o bodování informovat. Učitel si pak při opravě samozřejmě musí uvědomovat zvolenou váhu jednotlivých kroků, ať už řešení hodnotí bodově, slovně nebo přímo známkou, a respektovat ji v průběhu celé opravy.

ad f) Znat *výsledky a mezivýsledky* je pro opravu písemek základním požadavkem, v některých složitějších případech je dobré mít k dispozici i části řešení nebo řešení celé. Je-li více možností, jak danou úlohu řešit, měl by mít učitel k dispozici informaci o mezivýsledcích i pro jiné způsoby řešení.

ad g) Náročnost úlohy (obtížnost) bere učitel v úvahu zvláště při vytváření víceúlohové písemky a také při stanovení času řešení; měřítko si vytváří na základě svých zkušeností s „matematickou kvalitou“ tříd, v nichž učí. Jestliže danou úlohu již v písemce použil, může si propříště vypočítat a zaznamenat náročnost této úlohy na základě výsledků písemky. Výpočet se provádí takto (viz [2]):

Uvažujeme tzv. *průchodnost úlohy* P s hodnotami v procentech v rozmezí 0 % – 100 %. Výpočet provedeme takto:

$$P = 100 \frac{\sum b_i}{n \cdot b} \%,$$

kde v čitateli je součet bodů získaných všemi žáky za danou úlohu, n je počet všech žáků, kteří psali písemku a b zadané maximální bodové ohodnocení dané úlohy. Vidíme, že úlohu s průchodností 0 % nevyřešil nikdo, úlohu s průchodností 100 % vyřešili všichni správně.

Náročnost úlohy pak můžeme zapsat jako $N = 100 \% - P$. Učitel si tedy po opravené písemce může provést uvedené jednoduché výpočty (velmi mu pomůže, když si během opravy zapisuje do seznamu žáků bodové hodnocení jejich jednotlivých úloh). Vypočtenou náročnost si pak zapíše do bodu g) dokumentace úlohy ve své databázi (rok použití, třída, náročnost N). Úlohy s náročností do 20 % považujeme za snadné, s náročností nad 80 % jsou obtížné. Při sestavení nové úlohy může dle svých zkušeností učitel číselnou hodnotu náročnosti odhadnout.

Náročnost písemky je průměrem náročností (obtížností) jednotlivých úloh. Jakou náročnost úloh volit? Součástí volby náročnosti je i to, aby učitel dostal po opravě a klasifikaci písemky vypovídající spektrum známek. Písemka, z níž všichni dostanou pětku (viz motto) není pro klasifikaci

k ničemu, písemka se samými jedničkami snad může posloužit jen k povzbuzení žáků. Pro zajištění odpovídajícího ocenění žáků matematicky lepších i horších se zpravidla doporučuje u čtyřúhlové písemky zadat jednu úlohu snazší s náročností kolem 25 %, dvě úlohy střední s náročností kolem 50 % a jednu úlohu těžší s náročností kolem 75 %.

ad h) *Časová náročnost úlohy.* Učitel, který zařazuje do písemky (resp. do své databáze) novou dvojici úloh A, B (tj. dvojici, s níž ještě nemá zkušenost), si samozřejmě sám úlohy – obě verze – před jejich použitím podrobně vyřeší (propočítá, prorýsuje) metodou, kterou předpokládá u žáků, ověří věcnou náročnost úloh a změří si svůj *čas úplného řešení*. Pak odhadne, jaký čas budou potřebovat žáci s mírně podprůměrnou výkonností; bývá to i 200 % – 300 % času učitelova. Tento koeficient si učitel postupně upřesňuje na základě svých zkušeností a je vhodné, když v dokumentaci úloh ve své databázi tyto orientační pracovní časy žáků eviduje. Přitom ví, že jde o časy přibližné; skutečné časy závisejí mj. i na kvalitě jednotlivých tříd. Časovou náročnost úlohy považujeme za maximální čas, v němž by úloha měla být vyřešena.

Časová náročnost písemky není prostým součtem časové náročnosti jednotlivých úloh, ale musíme započítat i další časové nároky: záznam nebo přečtení úloh, čas na dotazy, čas na úvodní komentář učitele, čas na žákovskou kontrolu své písemky, čas na závěrečný komentář učitele, ale na druhé straně „lepší“ žáci zase ušetří čas při řešení lehčích úloh. Celohodinovou písmkou by měla být plně využita celá vyučovací hodina, v nejvyšších třídách gymnázia může být písemka i dvouhodinová jako trénink na přijímací zkoušky.

Uvedené body a) – h) se nezpracovávají zvlášť pro každou úlohu. Zadáváme-li víceúhlovou písemku, potřebujeme body a), e) zvlášť pro každou úlohu (tj. pro každou verzi), body c), d), g) b) jen když je potřeba pro každou dvojici A, B a body f), h) za každou úlohu, ale jsou-li hodnoty stejné, stačí jen za příslušnou dvojici.

V průběhu let pak databáze osvědčených úloh úspěšně narůstá. Jak ji zvládnout po technické stránce, to si musí učitel rozmyslet podle toho, jak ji hodlá používat. Nabízí se využití počítače, zejména v těch případech, kdy žákům chceme rozdávat natištěná zadání (z počítače je vytiskneme a rozmnožíme). Při opravě je však nepohodlné opravovat úlohy a přitom nahlížet na obrazovku počítače, takže v úvahu přichází papírové médium (někteří učitelé doporučují např. listky formátu A5 nebo A6), ale spíše kombinace obou způsobů evidence.

Při hodnocení, kolik práce dá vytvoření a údržba datové báze zadání písemek, připomenu první řádek tohoto článku. Pro tyto učitele jde o významnou racionalizaci zaměřenou do budoucnosti, protože takto udržovaná databáze obsahuje pak vhodné úlohy, které jsou po určité době znovu nebo jen s malou úpravou připraveny k opětnému použití.

Úloha 1

a) **A|B** Řešte soustavu rovnic a proveďte zkoušku

$$\begin{array}{l|l} 4x + 4y = 1 - 5x & 3x + 3y = 2 - 5x \\ 4x - 4y = \frac{17}{6} - y & 3x - 3y = \frac{25}{6} + y \end{array}$$

c) Zvolte si metodu řešení.

d) Soustava zčásti se zlomky.

e) 1 ⁰ Úprava rovnic na standardní tvar	15 %
2 ⁰ Výpočet první neznámé	35 %
3 ⁰ Výpočet druhé neznámé, výsledek	25 %
4 ⁰ Zkouška	25 %

f) **A:**

$$3^0 \quad (x; y) = (x; y) = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$$

$$4^0 \quad L_1 = -\frac{2}{3} = P_1,$$

$$L_2 = \frac{10}{3} = P_2,$$

B:

$$(x; y) = (x; y) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$$

$$L_1 = -\frac{1}{2} = P_1$$

$$L_2 = \frac{7}{2} = P_2$$

g) Náročnost pro 1. ročník: 25 %.

h) Čas: 8 min.

Úloha 2

a) **A|B** Stanovte definiční obor funkce

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{3-2x}} - 8\sqrt{3+2x-x^2} \quad \Bigg| \quad y = \frac{x+2}{\sqrt{5-4x}} - 4\sqrt{6-x-x^2}$$

b) Dodat papírovou verzi.

d) Lineární nerovnice a kvadratická nerovnice.

- | | |
|---|------|
| e) 1 ⁰ Vyřešení lineární nerovnice | 15 % |
| 2 ⁰ Kořeny kvadratického trojčlenu | 20 % |
| 3 ⁰ Vyřešení kvadratické nerovnice | 35 % |
| 4 ⁰ Určení a zápis definičního oboru | 30 % |

- | | |
|--|----------------------------|
| f) A: | B: |
| 1 ⁰ $x < \frac{3}{2}$ | $x < \frac{5}{4}$ |
| 2 ⁰ $x_1 = -1, x_2 = 3$ | $x_1 = -3, x_2 = 2$ |
| 3 ⁰ $\langle -1; 3 \rangle$ | $\langle -3; 2 \rangle$ |
| 4 ⁰ $\langle -1; 1,5 \rangle$ | $\langle -3; 1,25 \rangle$ |

g) Náročnost pro 1. ročník: 50 %.

h) Čas: 12 min.

Úloha 3

a) **A**|{**B**} Napište směrnicový tvar rovnic tečen z bodu $A[4; -1]$ { $B[5; 1]$ } k parabole

$$y^2 = -4(x - 2) \quad \Bigg| \quad y^2 = 4(x + 3)$$

a zjistěte body dotyku.

c) Zvolte si sami metodu řešení.

d) Parabola, tečna, kvadratická rovnice

e) 1. *způsob řešení*:

Postup: Do obecné rovnice tečny v bodě $[x_0; y_0]$ dosadíme za x, y souřadnice daného bodu a dostaneme vztah mezi x_0 a y_0 . Bod $[x_0; y_0]$ je bodem paraboly, takže jeho souřadnice dosadíme do rovnice paraboly s užitím zjištěného vztahu ($y_0 = \dots$) a dostaneme kvadratickou rovnici pro x_0 . Vyřešíme ji, dopočítáme příslušná y_0 a rovnice tečen.

- | | |
|--|------|
| 1 ⁰ Obecná rovnice tečny, dosazení souřadnic $A\{B\}$ | 15 % |
| 2 ⁰ Odvození vztahu mezi x_0 a y_0 | 20 % |
| 3 ⁰ Dosazení do rovnice paraboly, výpočet x_0 | 20 % |
| 4 ⁰ Souřadnice bodů dotyku | 20 % |
| 5 ⁰ Rovnice tečen | 25 % |

2. způsob řešení:

Postup: Rovnici tečny danou bodem a zatím neznámou směrnici k řešíme spolu s rovnicí paraboly a položíme diskriminant $D = 0$; dostaneme kvadratickou rovnici pro k , vypočteme kořeny. Pro tato k najdeme společné body tečen a paraboly.

1⁰Přímka daná bodem $A\{B\}$ a směrnici k 15 % 2⁰Dosazení do rovnice paraboly, odvození kvadratické rovnice pro k 30 % 3⁰Řešení kvadratické rovnice pro k 15 % 4⁰Rovnice tečen 15 % 5⁰Souřadnice bodů dotyku 25 %

f) 1. řešení

A:	B:
1 ⁰ $yy_0 = -2(x - 2) - 2(x_0 - 2)$	$yy_0 = 2(x + 3) + 2(x_0 + 3)$
2 ⁰ $y_0 = 2x_0$	$y_0 = -2x_0 - 2$
3 ⁰ $x_0^2 + x_0 - 2 = 0$, kořeny 1, -2	$x_0^2 + x_0 - 2 = 0$, kořeny 1, -2
4 ⁰ $[1; 2], [-2; -4]$	$[1; -4], [-2; 2]$
5 ⁰ $y = -x + 3, y = \frac{1}{2}x - 3$	$y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}, y = x + 4$

2. řešení

A:	B:
1 ⁰ $y + 1 = k(x - 4)$	$y + 1 = k(x + 5)$
2 ⁰ $ky^2 + 4y + 8k + 4 = 0$	$ky^2 - 4y + 8k - 4 = 0$
$\frac{1}{4}D = 2k^2 + k - 1 = 0$	$\frac{1}{4}D = 2k^2 - 2k - 1 = 0$
3 ⁰ $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -1$	$k_1 = 1, k_2 = -\frac{1}{2}$
4 ⁰ $y = \frac{1}{2}x - 3, y = -x + 3$	$y = x + 4, y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$
5 ⁰ $[1; 2], [-2; -4]$	$[1; -4], [-2; 2]$

h) Náročnost pro 3. ročník: 70 %.

g) Čas: 20 min.

Úspěšnost a efektivnost písemky ovšem nezáleží jen na databázi písemkových úloh a jejich vhodném výběru, ale i na dalších podmínkách práce ve škole. Na závěr si některé uvedme.

Pro psaní písemky by měly být vytvořeny vhodné podmínky zkoušet učivo procvičené a zopakované, volit vhodnou vyučovací hodinu (u klasifikačních písemek např. ne po tanečních, ne až kolem oběda, ne na samém

konci čtvrtletí, kdy se ve všech předmětech zkouší, apod.), kdy výkonnost žáků může být maximální. Při kratších písemkách se někdy doporučuje psát tyto písemky až na závěr hodiny (zejména, když písemka nebyla předem ohlášena), protože žáci někdy bývají po písemce rozrušení a přestávka je přirozenou příležitostí k jejich uklidnění. U kontrolních písemek, které se píšou po probrání a procvičení určitého úseku učiva, lze, ale není nutno, na ně předem upozornit, o klasifikačních písemkách by žáci měli vědět předem, aby si mohli včas zopakovat i starší učivo. Učitelé zpravidla zařazují před takovou písemkou i speciální opakovací hodinu – zejména na pomoc slabším žákům; zde se případně mohou uplatnit i varianty C.

L i t e r a t u r a

- [1] *Hejný, M. a kol.:* Teória vyučovania matematiky 2, SPN Bratislava, 1990.
- [2] *Chrástka, M.:* Didaktické testy. Paido, Brno 1999.
- [3] *Novák, B.:* Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 2. UP Olomouc, 2004.
- [4] *Trávníček, S.:* Oprava písemek z matematiky. UP Olomouc, 2006.
- [5] *Trávníček, S.:* Písemkové příklady na SŠ 1. MFI, roč. 3 (1993/94), č. 2.
- [6] *Trávníček, S.:* Písemkové příklady na SŠ 30. MFI, roč. 16 (2006/07), č. 7.
- [7] *Trávníček, S.:* Matematické úlohy jako součást literárních textů. MFI, roč. 6 (1996/97), č. 3 a 4.

Rôzne metódy riešenia jednej úlohy

DUŠAN VALLO

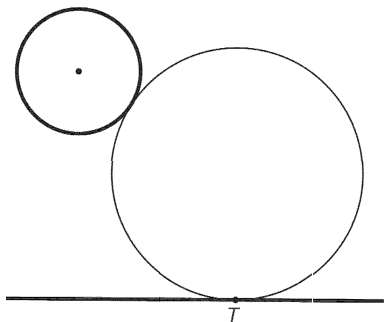
Fakulta prírodných vied UKF, Nitra, SLOVENSKO

Úvod

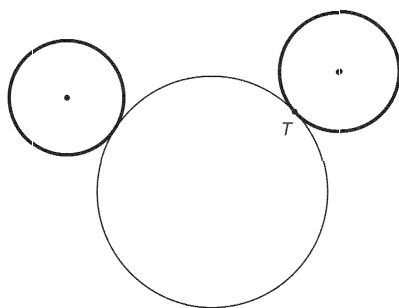
Apolónius z Pergy (262 – 190 pr. n. l.) bol jedným z významných gréckych matematikov. Vo svojom najznámejšom diele *Kuželosečky* formuloval pojmy ako parabola, elipsa a hyperbola. Dnešná školská geometria rieši niektoré vybrané úlohy, ktoré sú známe ako Apolóniove úlohy o dotýkajúcej sa kružnici. V samotnej podstate ide o zostrojenie kružnice, dotýkajúcej sa troch daných útvarov len pomocou pravítka a kružidla. Za útvar

možno považovať *bod*, *priamku* a *kružnicu*. Najľahšou Apolóniovou úlohou je zostrojenie kružnice k , ktorá prechádza tromi danými bodmi A , B , C . Na druhej strane, najvšeobecnejšou a zároveň najťažšou je úloha, kde ide o zostrojenie kružnice k , dotýkajúcej sa troch daných kružníc k_1 , k_2 , k_3 . Z poznámok zachovaných od *Pappusa Alexandrijského* (290 – 350 n. l.) sa predpokladá, že riešenie tejto najťažšej úlohy bolo uvedené v druhej Apolóniovej knihe s názvom *O dotyčniciach*, ktorá sa však nezachovala.

V našom príspevku sa budeme venovať dvom osobitným úlohám. Úlohy sú zvláštne v tom, že daný bod je incidujúci s jedným z dvoch daných útvarov – priamkou alebo kružnicou.



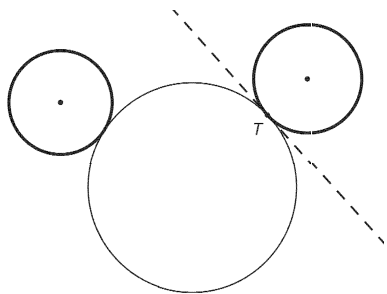
Obr. 1 Prípád 1. Daná je kružnica, priamka a dotykový bod T na priamke.



Obr. 2 Prípád 2. Daná je kružnica, na kružnici dotykový bod T a kružnica.

Oba prípady nie sú „na sebe nezávislé“. Druhý prípad možno previesť jednoduchou konštrukciou pomocnej priamky na 1. prípad tak, ako ukazuje obr. 3.

V príspevku analyzujeme sedem postupov ako riešiť úlohu zodpovedajúcu 1. prípadu. V texte sa obmedzíme na len sprostredkovanie hlavnej myšlienky riešenia.



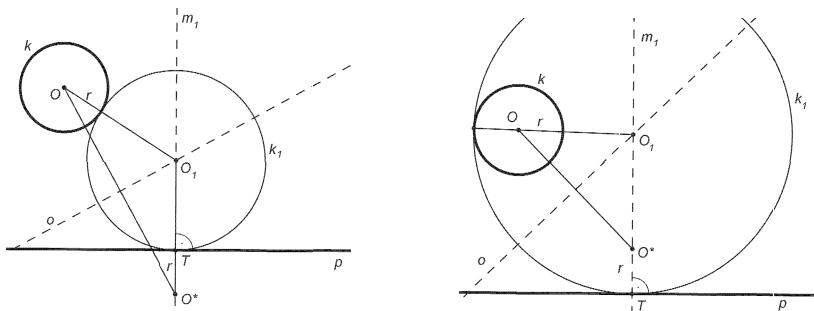
Obr. 3

Konkrétne znenie je nasledovné:

Zostrojte kružnicu $k_1(O_1, r_1)$, ktorá sa dotkne danej kružnice $k(O, r)$ a zároveň sa dotkne aj danej priamky p v jej danom bode T .

1. Metóda geometrických miest bodov – os úsečky

Riešenie. Stred O_1 kružnice k_1 leží na priamke m_1 , kolmej na priamku p v bode T (priamka p má byť dotyčnicou ku k_1 v bode T). Na priamke m_1 určíme bod O^* , pre ktorý platí $|TO^*| = r$. Stred O_1 má rovnakú vzdialenosť od bodov O , O^* , preto leží na prieniku osi o úsečky OO^* s priamkou m_1 . Konštrukcia kružnice k_1 je zrejmá z obr. 4a,b.

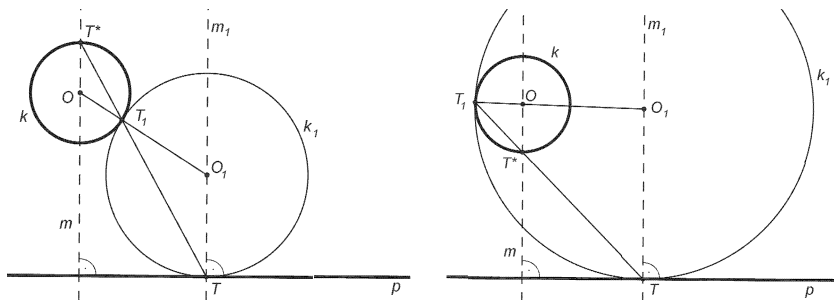


Obr. 4a, b Dve riešenia úlohy

2. Metóda zobrazení – rovnoláhlosť

Riešenie. Nech bod dotyku kružníc je označený T_1 . Ak zostrojíme bod T_1 , samotná konštrukcia kružnice k_1 je triviálna.

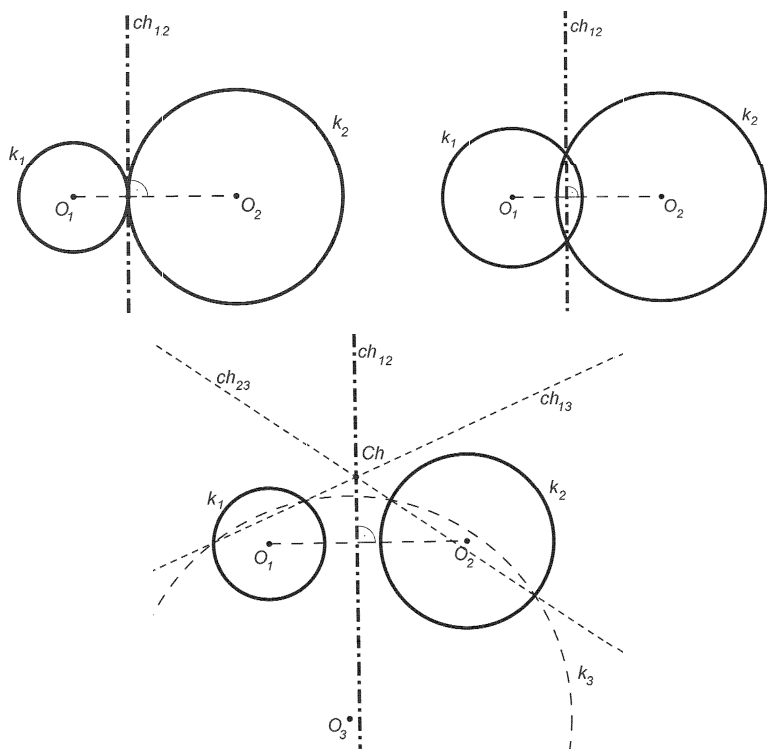
Vzhľadom k tomu, že obe kružnice sú rovnolahlé so stredom rovnoláhlosti práve v bode T_1 , zobrazí sa v tejto rovnoláhlosti priamka m_1 do rovnobežnej priamky m , prechádzajúcej bodom O . Bod T sa zobrazí do bodu T^* , ktorý je prienikom kružnice k a priamky m . Zatiaľ uvažovaný a ešte nezostrojený stred rovnoláhlosti je prienikom priamky TT^* s kružnicou k , pretože stred rovnoláhlosti a dvojica odpovedajúcich si bodov sú kolinéárne.



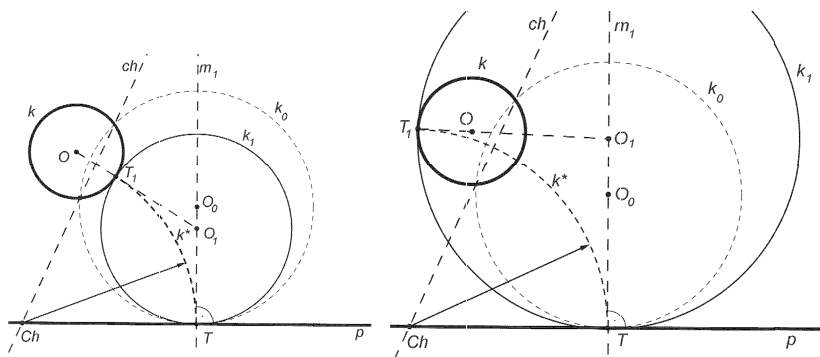
Obr. 5a, b Dve riešenia úlohy

3. Metóda geometrických miest bodov – chordálny bod

Skôr, než ukážeme riešenie, v krátkosti pripomenieme. Ak je daná kružnica $k(O, r)$ a bod M , ktorého vzdialenosť od stredu O sa rovná d , potom mocnosťou bodu M ku kružnici k nazývame číslo $m = d^2 - r^2$. Množina všetkých bodov roviny, ktoré majú k dvom nesústreďným kružniciam $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ rovnakú mocnosť, je priamka ch_{12} , kolmá na priamku určenú stredmi O_1, O_2 . Priamka ch_{12} sa nazýva chordálou (niekedy potenčná priamka). Ak majú kružnice k_1, k_2 neprázdny prienik, prechádza chordála ch_{12} ich spoločnými bodmi. V prípade disjunktných kružníc k_1, k_2 môžeme doplniť tretiu pomocnú kružnicu k_3 , pretínajúcu kružnice k_1, k_2 tak, aby chordály ch_{13}, ch_{23} boli rôznobežné. Ich prienikom, bodom Ch , prechádza chordála ch_{12} kružníc k_1, k_2 kolmo na priamku určenú stredmi O_1, O_2 . Bod Ch sa nazýva *chordálny bod* (niekedy nazývaný aj *potenčný stred*) kružníc k_1, k_2, k_3 a jeho mocnosť je rovnaká ku všetkým trom kružniciam.



Obr. 6a, b, Konštrukcia chordály



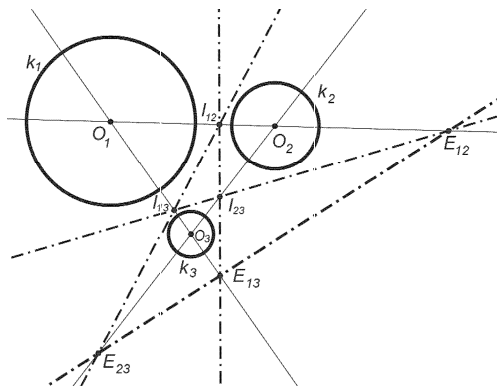
Obr. 7a, b Dve riešenia úlohy

Riešenie. Zostrojíme pomocnú kružnicu k_0 , ktorá sa bude v bode T dotýkať priamky p . Priamka p je spoločnou chordálou pomocnej kružnice k_0 a hľadanej kružnice k_1 . Spoločná chordála ch kružníc k, k_0 pretne priamku p v spoločnom chordálnom bode Ch , ktorého vzdialenosť od bodov T, T_1 je rovnaká. Prienik kružnice $k^*(|Ch, TCh|)$ s kružnicou k je hľadaný bod T_1 . Konštrukcia kružnice k_1 je ďalej jasná.

4. Metóda zobrazení – dôsledok Mongeho vety o skladaní rovnoláhlostí

Ak $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$, kde $O_1 \neq O_2, r_1 \neq r_2$ sú dve kružnice, potom existujú dve rovnoláhlosti so stredmi I_{12} a E_{12} , ktoré zobrazujú kružnicu k_1 do kružnice k_2 . Oba stredy rovnoláhlostí I_{12}, E_{12} ležia na priamke určenej bodmi O_1, O_2 . Stred, ktorý leží na úsečke $O_1 O_2$, nazveme vnútorným stredom a označíme I_{12} . Druhý bod E_{12} nazveme vonkajším stredom.

Jeden z dôsledkov Mongeho vety o skladaní rovnoláhlostí tvrdí, že v prípade stredov rovnoláhlostí kružníc $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2), k_3(O_3, r_3)$, kde $O_1 \neq O_2 \neq O_3 \neq O_1, r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_1$ sú kolíneárne tieto trojice bodov – $E_{12}, E_{23}, E_{13}; I_{12}, I_{23}, I_{13}; I_{12}, E_{23}, I_{13}; I_{12}, I_{23}, E_{13}$.

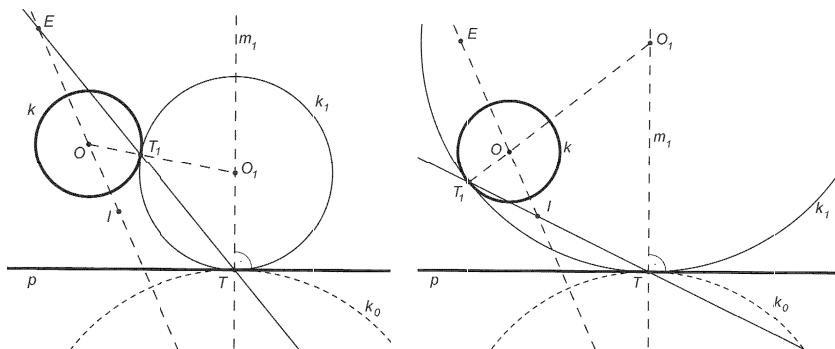


Obr. 8

Riešenie. Predpokladajme, že hľadaná kružnica k_1 má mať vonkajší dotyk s kružnicou k . Zostrojíme pomocnú kružnicu k_0 , ktorá sa bude v bode T dotýkať priamky p . Bod T je potom vnútorným stredom rovnoláhlosti kružníc k_0 a hľadanej kružnice k_1 . Ak uvažujeme o bode dotyku T_1 kružníc

k_1 a k , tiež ide o vnútorný stred rovnováhlostí oboch kružníc. Podľa dôsledku Mongeho vety vonkajší stred rovnováhlostí E kružníc k_0 a k leží s bodmi T a T_1 na jednej priamke. Zostrojíme teda bod E a hľadaný bod dotyku T_1 bude prienikom priamky ET s kružnicou k .

Druhé riešenie. Ak hľadaná kružnica k_1 má mať vnútorný dotyk s kružnicou k (obr. 11b), kde bod T je opäť vnútorným stredom rovnováhlostí k_1 , k_0 ; bod T_1 pre zmenu vonkajší stred rovnováhlostí k_1 , k . Vnútorný stred rovnováhlostí (bod I) kružníc k , k_0 musí byť (podľa dôsledku Mongeho vety) s bodmi T , T_1 kolineárny. Zostrojíme teda bod I a hľadaný bod dotyku T_1 bude prienikom priamky IT s kružnicou k .



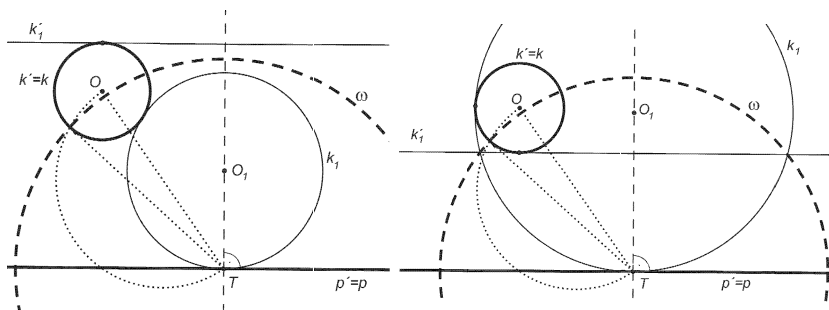
Obr. 9a, b Dve riešenia úlohy

5. Metóda kružnicovej inverzie

Riešenie. Za stred určujúcej kružnice ω zvolíme bod T . Polomer kružnice ω zvolíme tak, aby kružnice ω a k boli na seba navzájom kolmé (z bodu T zostrojíme dotyčnicu ku kružnici k a vzdialenosť dotykového bodu od bodu T je polomer kružnice ω). V kružnicovej inverzii $K_i[\omega, T]$ je potom kružnica k samodružná. Rovnako samodružná bude priamka p . Bod T ako stred inverzie nemá obraz.

V inverznej situácii hľadáme spoločnú dotyčnicu k'_1 , ktorá sa dotkne $k = k'$ a veľmi voľne povedané „kružnice $p = p'$ nekonečného polomeru“ (priamky p).

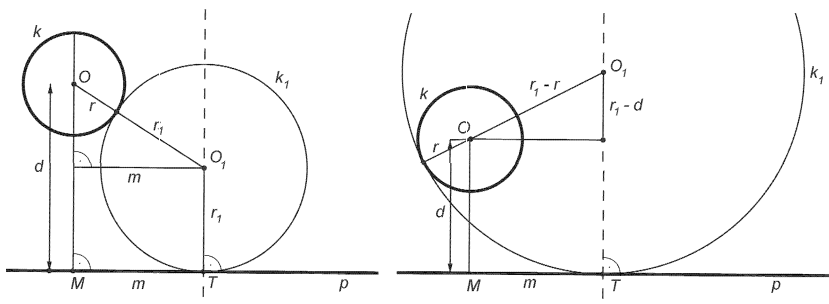
Riešením je dotyčnica ku kružnici k , rovnobežná s priamkou p . Jej obraz v inverzii je kružnica prechádzajúca bodom T a dotýkajúca sa oboch daných útvarov. Vzhľadom k tomu, že vyhovujúce dotyčnice sú dve, úloha má dve riešenia.



Obr. 10a, b Dve riešenia úlohy

6. Metóda algebraicko-geometrická

Riešenie. Nech hľadaná kružnica k_1 má najprv vonkajší dotyk s kružnicou k .



Obr. 11a, b Vonkajší a vnútorný prípad dotyku kružníc

Nech bod M je päťou kolmice zostrojenej z bodu O na priamku p . Ak označíme $|OM| = d$, $|MT| = m$, pomocou Pytagorovej vety počítame

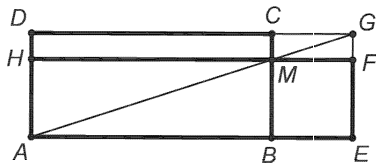
$$(r + r_1)^2 = (d - r_1)^2 + m^2. \quad (1)$$

Odtiaľ

$$r_1 = \frac{d^2 + m^2 - r^2}{2(r + d)} \quad (2)$$

a musíme konštrukčne určiť úsečku dĺžky r_1 .

Konstrukciu vykonáme postupne pomocou rovnoplochých obrazcov. Za týmto účelom najprv ukážeme, ako k danému obdĺžniku $ABCD$ zostrojíme obdĺžnik $AEFH$ rovnakého obsahu.



Obr. 12 Rovnoploché obdĺžniky $ABCD$, $AEFH$

Na obr. 12 sú znázornené obdĺžniky $ABCD$, $AEFH$ rovnakého obsahu, pretože trojuholníky AEG , AGD sú zhodné a teda majú rovnaký obsah. Zhodné sú aj trojuholníky ABM , AHM a taktiež MFG , MCG . Obdĺžniky $BEFM$, $HMCD$ musia mať rovnaký obsah a platí

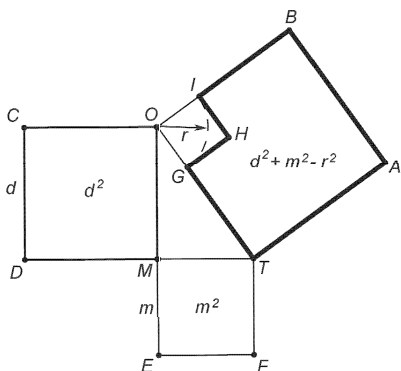
$$S_{AEFH} = S_{ABM} + S_{MFG} + S_{BEFM} = S_{AHM} + S_{MCG} + S_{HMCD} = S_{ABCD}.$$

Vzťah (2) upravíme

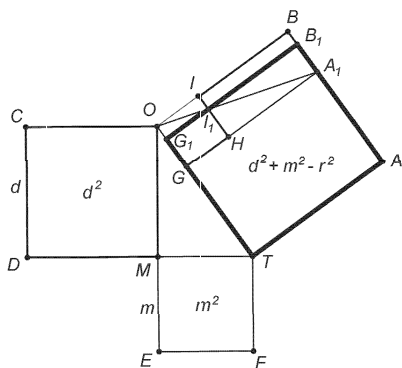
$$2(r + d)r_1 = (d^2 + m^2 - r^2) \quad (3)$$

Podľa geometrického významu Pytagorovej vety zostrojíme štvorec $ABOT$, ktorého obsah sa rovná $d^2 + m^2$. Ak zo štvorca $ABOT$ „vystrihneme“ štvorec $OGHI$, obsah šesťuholníka $ABIHGT$ je $d^2 + m^2 - r^2$ (obr. 13a). Na obr. 13b sme šesťuholník $ABIHGT$ premenili na obdĺžnik AB_1G_1T rovnakého obsahu (obdĺžniky BB_1I_1I a GG_1I_1H majú rovnaký obsah). Podľa konštrukcie rovnoplochých obrazcov má obdĺžnik $B_1A_2A_3B_2$ rovnaký obsah ako obdĺžnik AB_1G_1T , kde $|B_1A_2| = 2(d + r)$, a platí $|A_2A_3| = r_1$ (obr. 13c).

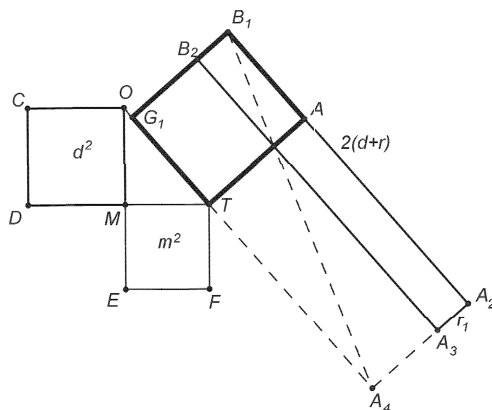
Ak poznáme polomer r_1 hľadanej kružnice k_1 , jej stred O_1 zostrojíme ľahko.



Obr. 13a Konštrukcia $d^2 + m^2 - r^2$



Obr. 13b Konštrukcia obdĺžnika s obsahom $d^2 + m^2 - r^2$



Obr. 13c Konštrukcia úsečky dĺžky r_1

Ak hľadaná kružnica k_1 má vnútorný dotyk s kružnicou k (obr. 11b), potom platí

$$(r_1 - r)^2 = (r_1 - d)^2 + m^2 \quad (4)$$

a vypočítame

$$r_1 = \frac{d^2 + m^2 - r^2}{2(d - r)} \quad (5)$$

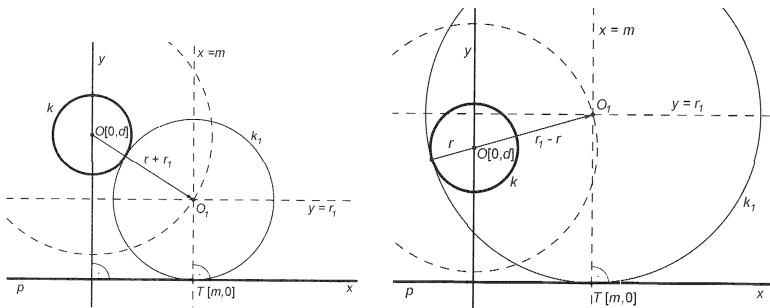
a samotná konštrukcia úsečky dĺžky r_1 (ako aj stredu O_1) je analogická ako pri vonkajšom dotyku kružníc.

7. Metóda analytická

Riešenie. Zavedieme karteziánsku súradnicovú sústavu tak, že os x bude totožná s priamkou p , os y bude prechádzať stredom O kružnice k a nech súradnice bodov sú $T[m; 0]$, $O[0; d]$.

Ak hľadaná kružnica k_1 má najprv vonkajší dotyk s kružnicou k , patrí stred O_1 prieniku priamok $x = m$, $y = r_1$ a kružnice $x^2 + (y - d)^2 = (r + r_1)^2$. Riešením sústavy dostaneme opäť vzťah (2).

Ak hľadaná kružnica k_1 má vnútorný dotyk s kružnicou k , potom riešením je vzťah (5). Tým sme získali rovnaké výsledky ako v predošlej metóde, len s iným – analytickým prístupom.



Obr. 14a, b Zavedenie karteziánskej súradnicovej sústavy

Záver

Domnievame sa, že riešenie jednej úlohy viacerými metódami ponúka vo všeobecnosti dobrý nadhľad na problém a ponúka záujemcom o geometriu široké pole pôsobnosti.

V článku sme ukázali sedem postupov ako riešiť jednu zaujímavú konštrukčnú úlohu. Niektoré postupy boli elementárne na úrovni poznatkovej štruktúry zo strednej školy (riešenie metódou geometrických miest bodov, metódou rovnofačnosti alebo konštrukcie algebraických výrazov, aparátom analytickej geometrie), iné vyžadovali komplexnejšie znalosti z geometrie (chordálny bod, Mongeho veta, kružnicová inverzia).

Necháme na čitateľa, aby v prípade záujmu vyriešil úlohu, ktorej zadanie je naznačené obr. 2.

Literatúra

- [1] Šedivý, O.: Geometria II. SPN, Bratislava, 1987.
- [2] Kuřina, F.: Deset pohledu na geometrii: Albra, Praha, 1996.
- [3] H'Adamar, J.: Elementárna geometria I. Planimetria (ruský překlad). GPI, Moskva, 1956.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 5. 2009 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 157

Jsou dány body O , X , Y , které neleží na téže přímce. Sestrojte pravoúhelník $OABC$ maximálního obsahu takový, že body X a Y leží po řadě na přímkách AB a BC .

Šárka Gergelitsová

Úloha 158

Označme K množinu všech přirozených čísel k , pro něž lze číslo k^2 zapsat jako součet druhých mocnin jedenácti po sobě jdoucích celých čísel.

- a) Dokažte, že každé číslo z množiny K dává při dělení číslem 66 zbytek 11 nebo 55.
- b) Najděte všechna čísla z množiny K , která jsou menší než 2 009 (lze užít kalkulačku).

Aleš Kobza