

MATEMATIKA

Periodické posloupnosti

LEV KURLIANDČIK – JAROSLAV ŠVRČEK

Petrohrad (RUSKO) – Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Při řešení celé řady úloh o číselných posloupnostech se často setkáváme s pojmem periodické posloupnosti. Cílem tohoto článku je nabídnout čtenářům několik ukázek, jak lze využít periodičnost číselných posloupností při řešení vybraných úloh uvedeného typu, a tím poskytnout také případný návod, jakým způsobem lze postupovat při řešení zejména náročnějších úloh tohoto typu. Ve většině prezentovaných úloh se zde setkáme s posloupnostmi zadanými rekurentně, viz např. [1] nebo [2].

Připomeňme si proto nejprve pojem periodické posloupnosti: Řekneme, že číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je *periodická*, právě když existuje přirozené číslo p takové, že pro všechna přirozená čísla n platí $a_{n+p} = a_n$. Číslo p se nazývá *délka periody*. V případě, kdy $p = 1$, hovoříme o stacionární (konstatní) posloupnosti.

V následující části uvádíme několik příkladů, při jejichž řešení jsou vhodným způsobem využity především vlastnosti periodických posloupností.

Příklad 1

Uvažujme posloupnost (a_n) , která je definovaná následujícím způsobem

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že každý člen této posloupnosti je přirozené číslo.

Řešení. Vypišme si pro $n \geq 3$ několik prvních členů uvažované posloupnosti:

$$a_3 = 2, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 2, \quad a_6 = 1, \quad a_7 = 1$$

Protože $a_6 = a_1$ a $a_7 = a_2$, je tato posloupnost periodická (s délkou periody $p = 5$, tj. opakuje se v ní pouze její počáteční úsek $1, 1, 2, 3, 2$). Všechny členy této posloupnosti jsou tudíž přirozenými čísly. Tím je důkaz proveden.

Příklad 2

Uvažujme posloupnost (u_n) definovanou následujícím způsobem

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Určete u_{2009} .

Řešení. Vypišme si členy této posloupnosti pro $n = 3, 4, \dots, 10$. Jsou jimi (v tomto pořadí) reálná čísla

$$\sqrt{2} - 1, \quad 1 - \sqrt{2}, \quad -1, \quad -1, \quad 1 - \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} - 1, \quad 1, \quad 1.$$

Odtud vidíme, že $u_9 = u_1$ a $u_{10} = u_2$. Uvažovaná posloupnost reálných čísel je tedy periodická; délka její periody je 8. Je proto

$$u_{2009} = u_{9+8 \cdot 250} = u_9 = 1.$$

Poznámka. Podobným způsobem lze řešit celou řadu příbuzných úloh. Patří mezi ně např. následující úloha, která je modifikací jedné z úloh řešených odlišným způsobem v [2].

Příklad 3

V posloupnosti (a_n) reálných čísel jsou dány první tři členy $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ a každý další její člen je určen vztahem

$$a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_n,$$

kde n je přirozené číslo. Určete 2 009. člen této posloupnosti.

Příklad 4

Uvažujme Fibonacciho posloupnost (f_n) přirozených čísel, která je definována rekurentně následujícím způsobem

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že číslo f_{2008} je dělitelné sedmi.

Řešení. Uvažujme posloupnost (r_n) , kde r_n je zbytek při dělení čísla f_n sedmi. Ukážeme, že r_{n+2} se rovná zbytku při dělení součtu $r_{n+1} + r_n$ číslem 7. Platí

$$f_n = 7a + r_n, \quad f_{n+1} = 7b + r_{n+1}, \quad f_{n+2} = 7c + r_{n+2},$$

kde a, b, c jsou přirozená čísla. Platí přitom

$$r_{n+2} = f_{n+2} - 7c = f_{n+1} + f_n - 7c = r_{n+1} + r_n + 7(a + b - c).$$

Odtud ale plyne, že číslo r_{n+2} je rovno zbytku při dělení čísla $r_{n+1} + r_n$ sedmi. Napišme si opět několik prvních členů posloupnosti (r_n) . Jsou to (v uvedeném pořadí) čísla

$$1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, \dots$$

Poněvadž $r_{17} = r_1$ a $r_{18} = r_2$, je posloupnost (r_n) periodická. Délka její periody je 16, a pro každé přirozené číslo n tedy platí $r_{n+16} = r_n$. Proto

$$r_{2008} = r_{1992} = r_{1976} = \dots = r_8 = 0,$$

což dokazuje, že číslo f_{2008} je dělitelné sedmi.

Příklad 5

Dokažte, že ke každému přirozenému číslu m existuje přirozené číslo n takové, že číslo $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 2$ je dělitelné číslem m .

Řešení. Označme

$$u_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 2.$$

Po úpravě máme

$$\begin{aligned}
 4u_n &= 4 \left((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right) - 8 = \\
 &= \left((2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) \right) \left((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right) - 8 = \\
 &= (2 + \sqrt{3})^{n+1} + (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^{n+1} - 8 = \\
 &= (2 + \sqrt{3})^{n+1} + (2 - \sqrt{3})^{n-1} + (2 + \sqrt{3})^{n-1} + (2 + \sqrt{3})^{n+1} - 8 = \\
 &= \left((2 + \sqrt{3})^{n+1} + (2 - \sqrt{3})^{n+1} - 2 \right) \left((2 + \sqrt{3})^{n-1} + (2 - \sqrt{3})^{n-1} - 2 \right) - 4 = \\
 &= u_{n+1} + u_{n-1} - 4.
 \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1} + 4.$$

Každý člen posloupnosti (u_n) nyní zaměníme zbytkem při dělení čísla u_n číslem m . Získáme tak posloupnost (r_n) , která je (podobně jako v předchozích úlohách) periodická počínaje prvním členem. Pro $n = 0$ je $r_0 = 0$. S ohledem na periodičnost posloupnosti (r_n) existuje tedy n přirozené takové, že $r_n = r_0 = 0$, což znamená, že u_n je dělitelné číslem m . Tím je důkaz ukončen.

Příklad 6

Uvažujme rekurentní posloupnost (u_n) , kde

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{1 - 2u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že tato posloupnost není periodická.

Řešení. Z rovnosti

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{1 - 2u_n} \quad \text{vyplývá} \quad u_n = \frac{u_{n+1} - 2}{1 + 2u_{n+1}}.$$

Odtud je patrné, že na základě znalosti určitého členu uvažované posloupnosti můžeme jednoznačně určit také členy předchozí (s nižším indexem). Uvažujme proto tuto posloupnost jako nekonečnou i pro klesající hodnoty

indexů n . Z poslední podmínky pro $n = 0$ přitom plyne $u_0 = 0$ (uvažovanou posloupnost lze tedy rozšířit o člen u_0). Pokud by tato rozšířená posloupnost (u_n) byla periodická, obsahovala by nekonečně mnoho členů rovných nule. Ukážeme, že takovou vlastnost však uvažovaná posloupnost nemá.

První člen uvažované posloupnosti $u_1 = 2$ lze přitom zapsat ve tvaru

$$u_1 = \frac{5a_1 + 2}{5b_1 + 1}, \quad \text{kde } a_1 = b_1 = 0.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u_1 + 2}{1 - 2u_1} = \frac{\frac{5a_1 + 2}{5b_1 + 1} + 2}{1 - 2 \cdot \frac{5a_1 + 2}{5b_1 + 1}} = \\ &= \frac{5a_1 + 10b_1 + 4}{5b_1 - 10a_1 - 3} = \frac{5(a_1 + 2b_1) + 4}{5(b_1 - 2a_1 - 1) + 2} = \frac{5a_2 + 4}{5b_2 + 2}, \end{aligned}$$

kde $a_2 = a_1 + 2b_1$ a $b_2 = b_1 - 2a_1 - 1$ jsou celá čísla. Nyní vyjádříme u_3 :

$$u_3 = \frac{u_2 + 2}{1 - 2u_2} = \frac{\frac{5a_2 + 4}{5b_2 + 2} + 2}{1 - 2 \cdot \frac{5a_2 + 4}{5b_2 + 2}} = \frac{5(a_2 + 2b_2 + 1) + 3}{5(b_2 - 2a_2 - 2) + 4} = \frac{5a_3 + 3}{5b_3 + 4},$$

kde $a_3 = a_2 + 2b_2 + 1$ a $b_3 = b_2 - 2a_2 - 2$ jsou rovněž celá čísla. Podobně zjistíme, že

$$u_4 = \frac{5a_4 + 1}{5b_4 + 3}, \quad u_5 = \frac{5a_5 + 2}{5b_5 + 1},$$

kde a_4, b_4, a_5, b_5 jsou celá čísla. Vzhledem k tomu, že členy u_1 a u_5 uvažované posloupnosti mají též tvar, mají též tvar také členy u_2 a u_6 atd. Odtud (a z tvaru jednotlivých členů posloupnosti (u_n)) je patrné, že žádné u_n nemůže být dělitelné číslem 5, a navíc žádný člen této posloupnosti (s případnou výjimkou u_0) není roven nule. Tím je úloha vyřešena.

Metodu doplnění (rošíření) dané číselné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ o členy s indexy menšími než 1 můžeme s výhodou použít při řešení celé řady úloh o číselných posloupnostech. Jako další ukázkou uvádíme následující příklad.

Příklad 7

Uvažujme posloupnost $2, 0, 0, 9, \dots$, jejíž všechny členy počínaje pátým jsou rovny číslu 9 na místě jednotek součtu všech čtyř předchozích členů této posloupnosti. Dokažte, že v uvažované posloupnosti existuje úsek (čtveřice po sobě jdoucích členů), který je roven čtveřici čísel $9, 5, 2, 4$ v tomto pořadí.

Řešení. Vzhledem k tomu, že počet všech (uspořádaných) čtveřic tvořených číslicemi desítkové soustavy je konečný, je uvažovaná posloupnost periodická. Ze zadání je patrné, že pro libovolné čtyři po sobě jdoucí členy této posloupnosti je jednoznačně určen také předchozí člen této posloupnosti (tj. člen s indexem o 1 menším, než má první člen uvažované čtveřice po sobě jdoucích členů posloupnosti). Danou posloupnost můžeme tedy považovat za nekonečnou s rostoucími, ale i s klesajícími indexy, tj. s indexy menšími než 1. Uvažujme nyní několik členů této rozšířené posloupnosti, které v ní figurují před čtveřicí $2, 0, 0, 9$. Uvažovaný úsek této posloupnosti má tedy tvar:

$$\dots, 9, 5, 2, 4, 0, 1, 7, 2, 0, 0, 9, \dots$$

Vzhledem k tomu, že daná posloupnost je periodická, existuje v ní úsek $9, 5, 2, 4$. Tím je úloha vyřešena.

Následující dvě neřešené úlohy poslouží zájemcům o problematiku periodických posloupností jako vhodné procvičení této tematiky.

Příklad 8

Dokažte, že mezi libovolnými $(m-1)^2 + 2$ po sobě jdoucími členy Fibonacciho posloupnosti přirozených čísel (viz příklad 4) existuje vždy aspoň jedno číslo dělitelné m .

Příklad 9

Uvažujme posloupnost (b_n) , která je definována následujícím způsobem

$$b_{3n} = u_n \quad (\forall n \geq 1), \quad b_{3n+1} = 1 \quad (\forall n \geq 0), \quad b_{3n+2} = 0 \quad (\forall n \geq 0).$$

Dokažte, že tato posloupnost není periodická.

Literatura

- [1] *Markuševič, A. I.*: Vozvratiteľnyje posledovatel'nosti (rusky). Moskva, Nauka, 1975.
[2] *Calábek, P. – Švrček, J.*: Rekurentní posloupnosti v geometrii. MFI, roč. 12, 2002/2003, č. 10, s. 577 – 584.

Součet nekonečné mocninné řady, jejíž koeficienty jsou Fibonacciho čísla

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V článku [1] byl odvozen vzorec pro n -tý člen Fibonacciho posloupnosti, která byla určena rekurentním vztahem $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pro všechna přirozená $n > 1$ a počátečními podmínkami $a_0 = a_1 = 1$.

Nebudou-li indexy členů této posloupnosti začínat nulou, ale číslem jedna, tj. budou-li počáteční podmínky $a_1 = a_2 = 1$ a bude-li uvedený rekurentní vztah platit pro všechna přirozená $n > 2$, dostaneme stejnou posloupnost 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., ale vzorec pro a_n odvozený v [1] přejde na tvar

$$a_n = (b^n - c^n)/\sqrt{5}, \quad \text{kde} \quad b = (1 + \sqrt{5})/2, \quad c = (1 - \sqrt{5})/2.$$

Pomocí tohoto výsledku odvodíme vzorec pro součet $s(x)$ nekonečné mocninné řady, jejíž koeficienty jsou čísla Fibonacciho:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + 21x^8 + \dots$$

Dosazením za koeficienty $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ dostaneme

$$s(x) = [(b-c)x + (b^2 - c^2)x^2 + (b^3 - c^3)x^3 + \dots + (b^n - c^n)x^n + \dots]/\sqrt{5},$$

neboli

$$s(x) \cdot \sqrt{5} = (bx + b^2x^2 + b^3x^3 + \dots + b^nx^n + \dots) - (cx + c^2x^2 + c^3x^3 + \dots + c^nx^n + \dots).$$

Obě tyto nekonečné geometrické řady mají konečný součet, je-li kvocient každé z nich v absolutní hodnotě menší než jedna, tj. když platí $|bx| < 1$ a $|cx| < 1$; avšak vzhledem k tomu, že je $b > c$, vystačíme s podmínkou

$$|bx| < 1, \quad \text{tj.} \quad |x| < 1/b = (\sqrt{5} - 1)/2.$$

Za tohoto předpokladu podle známého vzorce pro součet nekonečné geometrické řady platí

$$s(x) \cdot \sqrt{5} = bx / [(1 - bx) - cx / (1 - cx)],$$

neboli

$$s(x) \cdot \sqrt{5} = (b - c)x / [1 - (b + c)x + bcx^2].$$

Protože je

$$b - c = \sqrt{5}, \quad b + c = 1, \quad bc = -1,$$

dostáváme po dosazení

$$s(x) = \frac{x}{(1 - x - x^2)}.$$

Dokázali jsme tak větu:

Pro součet $s(x)$ nekonečné mocninné řady, jejíž koeficienty jsou čísla Fibonacciho, za předpokladu $|x| < (\sqrt{5} - 1)/2$ platí

$$s(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \dots = \frac{x}{(1 - x - x^2)}.$$

Dosadíme-li do tohoto výsledku za x čísla, která jsou v absolutní hodnotě menší než $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618033\dots$, můžeme pro Fibonacciho čísla $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ získat zajímavé rovnosti. Platí např.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{8}{2^6} + \frac{13}{2^7} + \dots = s\left(\frac{1}{2}\right) = 2,$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} - \frac{5}{2^5} + \frac{8}{2^6} - \frac{13}{2^7} + \dots &= s\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{5}, \\
\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{8}{10^6} + \frac{13}{10^7} + \dots &= \\
&= s\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{10}{89}.
\end{aligned}$$

Čtenář si jistě povšiml, že k odvození součtu této nekonečné řady jsme vůbec nepotřebovali znát součet $s_n(x)$ jejích prvních n členů, protože jsme využili vzorce pro součet nekonečné geometrické řady. Tento součet $s_n(x)$ nyní pro úplnost odvodíme. Zřejmě platí:

$$s_n(x) \cdot \sqrt{5} = (bx + b^2x^2 + b^3x^3 + \dots + b^nx^n) - (cx + c^2x^2 + c^3x^3 + \dots + c^nx^n),$$

odkud za předpokladu

$bx \neq 1$ a $cx \neq 1$, tj. pro $x \neq 1/b = (\sqrt{5} - 1)/2$ a $x \neq 1/c = -(\sqrt{5} + 1)/2$, ze známého vzorce pro součet prvních n členů geometrické řady dostaneme

$$s_n(x) \cdot \sqrt{5} = bx(b^n x^n - 1)/(bx - 1) - cx(c^n x^n - 1)/(cx - 1),$$

neboli

$$\begin{aligned}
&s_n(x) \cdot \sqrt{5} = \\
&= [(b - c)x + bc(b^n - c^n)x^{n+2} - (b^{n+1} - c^{n+1})x^{n+1}]/[(bcx^2 - (b + c)x + 1)].
\end{aligned}$$

Po dosazení

$$b - c = \sqrt{5}, \quad b + c = 1, \quad bc = -1, \quad b^n - c^n = a_n\sqrt{5}, \quad b_{n+1} - c_{n+1} = a_{n+1}\sqrt{5}$$

docházíme k závěru

$$s_n(x) = (x - a_n x^{n+2} - a_{n+1} x^{n+1})/(1 - x - x^2).$$

Pro součet $s_n(x)$ prvních n členů mocninné řady, jejíž koeficienty $a_1, a_2, a_3, \dots$ jsou Fibonacciho čísla, za předpokladu $x \neq (\sqrt{5} - 1)/2$ a $x \neq -(\sqrt{5} + 1)/2$ platí

$$s_n(x) = (x - a_n x^{n+2} - a_{n+1} x^{n+1})/(1 - x - x^2).$$

(Odvození vzorce $s_n(x)$ pro $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ a $x = -(\sqrt{5} + 1)/2$ si čtenář může provést sám nebo si je vyhledat ve [2].)

Podobně jako u vzorce pro součet $s(x)$ nekonečné řady můžeme dosazením za x do $s_n(x)$ získat některé vztahy pro Fibonacciho čísla. Platí např.:

$$s_n(1) = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \dots + a_n = (1 - a_n - a_{n+1})/(-1) = a_{n+2} - 1,$$

$$\begin{aligned} s_n(-1) &= -1 + 1 - 2 + 3 - 5 + \dots + (-1)^n a_n = -1 - (-1)^{n+1}(-a_n + a_{n+1}) = \\ &= (-1)^n a_{n-1} - 1. \end{aligned}$$

Všimněme si ještě na závěr, že pro dobré studenty by odvození součtu uvedené mocninné řady i součtu jejích prvních n členů (pokud budou znát vzorec pro n -tý člen Fibonacciho posloupnosti) nemuselo být velkým problémem.

Literatura

- [1] *Calda, E.*: Mocninné řady a posloupnosti zadané rekurentně. MFI, roč. 16, 2006/07, č. 7, s. 391-396.
- [2] *Vorobjev, N. N.*: Čísla Fibonačči. Izdatelstvo Nauka, Moskva 1984, 5. vydání.

O výsledcích jednoho matematického testu

DANIELA BLAŽKOVÁ

Pedagogická fakulta UP, Olomouc

V listopadu 2007 se na Katedře matematiky Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci uskutečnilo testování základních matematických znalostí a dovedností studentů oboru Učitelství matematiky. Testy byly vytvořeny prostřednictvím systému Claroline (*Open Source licence*).

Claroline je manažerský systém kursů postavený na webovém základu a bez problémů funguje na všech běžně dostupných webových prohlížečích. Vývoj probíhal na základě pedagogických zkušeností a potřeb učitelů. Kromě škol Claroline využívají také tréninková centra, různé asociace a firmy.

Claroline neslouží jen k testování, ale k vytváření různých cvičení a výukových materiálů (např. pracovní listy), ke komunikaci vyučujícího s žáky atd. Více informací lze získat na adrese: <http://www.claroline.net> (anglická verze).

Průběh testování a podoba testů

Testů se zúčastnili studenti Učitelství 1. stupně a studenti Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ. V tabulce 1 jsou uvedeny počty testů použitých pro vyhodnocení výsledků testování.

Tab. 1 (Počty testů použitých pro vyhodnocení výsledků testování)

	Muži	Ženy	Σ
1. stupeň	6	86	92
2. stupeň	55	71	126
Σ	61	157	218

Cílem testování bylo zjistit úroveň základních matematických znalostí a dovedností, proto byly úlohy sestaveny z učiva základní a střední školy. Testy byly tvořeny úlohami dvojího typu – výběrem z několika nabízených možností a doplněním požadovaného údaje, např. znamének, čísla, číselného výrazu nebo výrazu s neznámou.

Z hlediska obtížnosti byl test pro obě skupiny rozdělen do dvou částí – snazší část A a obtížnější část B, obě s časovým limitem 30 minut. Bodové ohodnocení jednotlivých částí je uvedeno v tabulce 2.

Tab. 2 (Bodové hodnocení)

	Test A	Test B	Σ
1. stupeň	40	20	60
2. stupeň	20	20	40

Těžší část testu pro studenty Učitelství 1. stupně představovala současně lehčí část pro studenty Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ.

V dalším textu se budeme věnovat pouze části testu společné oběma skupinám.

Zadání testu

- 1) Zjednodušte co nejvíce, tj. výraz napište jako jedno celé číslo.

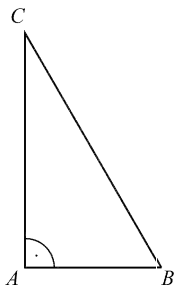
$$\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} =$$

- 2) Vyjádřete výsledek ve tvaru celého čísla.

$$125^{\frac{1}{3}} =$$

- 3) Je dáno $a = 2$, $b = -1$. Vyjádřete H , platí-li $\frac{1}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

- 4) Trojúhelník ABC je pravoúhlý (viz obr.). Jaká je velikost úhlu ABC ve stupních, je-li $|AC| = 6\sqrt{3}$ cm, $|BC| = 12$ cm.



Velikost úhlu ABC je _____°.

- 5) Míč padá z výšky 12 metrů. Dopadne na zem a odrazí se do tří čtvrtin původní výšky. Stejným způsobem skáče i nadále, pokaždé se odrazí do tří čtvrtin předcházející výšky. Jaké výšky dosáhne míč po třech dopadech?
- 6) Rozložte na součin, tj. napište ve tvaru např. $(x-2)(x+3)$ kvadratický trojčlen

$$x^2 - 7x + 12 =$$

- 7) Tom, Dick a Harry se mezi sebou mají podělit o 575 liber. Souhlasí s tím, že Tom dostane o 19 liber víc než Dick a Dick dostane o 17 liber víc než Harry. Kolik liber dostane Tom?
- 8) Vypočítejte a výsledek vyjádřete jako desetinné číslo.

$$(4,2 \cdot 10^{-3}) : (0,7 \cdot 10^2) =$$

- 9) V sáčku je 5 červených kuliček, 4 modré kuličky a 3 bílé kuličky. Kuličky vytahujeme postupně a nevracíme je zpět. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhnete dvě červené kuličky při prvních dvou tazích?
- 10) Délku všech hran krychle vynásobíme třemi. Kolikrát se zvětší povrch krychle?
- 11) V sáčku je velký počet bonbónů, které jsou pěti druhů. Jaký je minimální počet bonbónů, který musíte vytáhnout ze sáčku (se zavřenýma očima), aby byla jistota, že alespoň 3 z nich budou stejného druhu?
- 12) Popište každé z následujících tvrzení. K dispozici máte tyto možnosti – *vždy pravdivé, někdy pravdivé, vždy nepravdivé*.
Čtyřúhelníky mají 4 strany. _____
Čtverec je obdélník. _____
Lichoběžník má alespoň jednu osu symetrie. _____
- 13) Jsou tato tvrzení pravdivá (P) nebo nepravdivá (N)? Zatrhněte správnou odpověď.

Jestliže druhá mocnina reálného čísla je 49, původní číslo je 7. P N

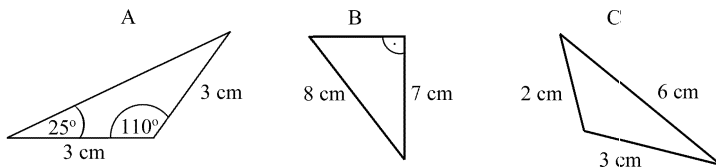
Všechna prvočísla jsou lichá. P N

Délky stran trojúhelníku jsou a , b , c . Jestliže $a^2 + b^2 = c^2$, pak trojúhelník obsahuje pravý úhel. P N

Vynásobením kladného čísla jiným kladným číslem vždy získáme číslo, které je větší než původní číslo. P N

- 14) Cena televizního přístroje vzrostla o 20 %. Při prodeji byla snížena o 20 %. Jaké je srovnání takto vzniklé ceny s cenou původní? Nová cena přístroje je:
- a) stejná b) nižší c) vyšší

- 15) Který z těchto tří trojúhelníků může být opravdu sestrojen? Obrázky nejsou ve skutečném měřítku.



Z těchto trojúhelníků může být sestrojen pouze trojúhelník _____.

Výsledky testování

V tabulce 3 jsou uvedeny výsledky, kterých testování studenti dosáhli v jednotlivých otázkách.

Tab. 3 (Výsledky testu)

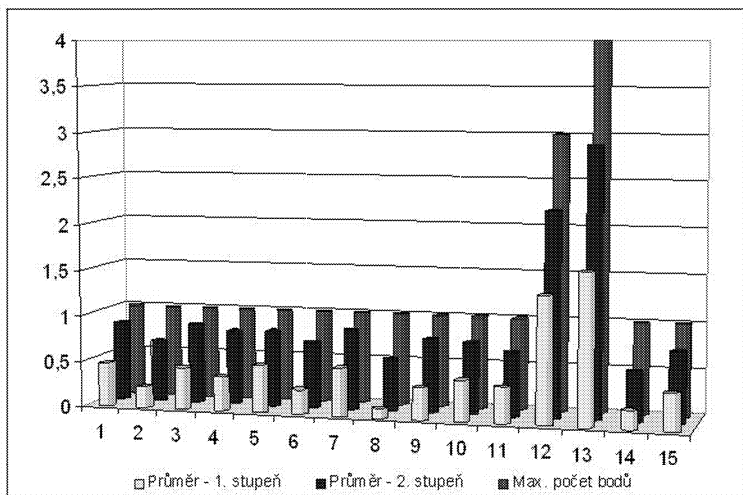
Č. ot.	Typ úlohy	Max. počet bodů	Úspěšnost v % 1. st. ZŠ	Úspěšnost v % 2. st. ZŠ
1	Úprava číselného výrazu s odmocninou	1	47	87
2	Mocniny s racionálním exponentem	1	23	67
3	Vyjádření neznámé z rovnice	1	46	87
4	Goniometrické funkce – určení velikosti úhlu	1	37	81
5	Slovní úloha – násobení racionálních čísel	1	51	83
6	Rozklad trojčlenu na součin dvojčlenů	1	27	71
7	Slovní úloha – lineární rovnice o jedné neznámé	1	52	87
8	Vyjádření hodnoty číselného výrazu	1	11	57
9	Určení pravděpodobnosti daného jevu	1	35	80
10	Objem krychle	1	46	78
11	Losovací	1	39	69
12	Určit pravdivost/nepravdivost daných tvrzení	3	46	74
13	Určit pravdivost/nepravdivost daných tvrzení	4	41	73
14	Procenta – procentová část, porovnávání částí	1	21	55
15	Rozhodnout, zda lze sestrojit daný trojúhelník	1	41	77

Pro studenty Učitelství 1. stupně byla nejobtížnější úloha číslo 8, tj. určení hodnoty číselného výrazu, v němž se vyskytují desetinná čísla v součinu s celočíselnými mocninami čísla 10. Úspěšnost při řešení je jen 11 %.

Úlohou s druhým nejhorším výsledkem je úloha č. 14 na procentový počet, která je současně úlohou s nejhorším dosaženým výsledkem u studentů Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ (úspěšnost řešení byla 55 %).

Nejlépe řešenou úlohou v obou skupinách je úloha č. 7 – slovní úloha, jejíž řešení vede na lineární rovnici o jedné neznámé.

Výsledky testu odpovídají předpokladu, že studenti Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ by měli dosáhnout lepších výsledků. U žádné z otázek není výsledný průměr nižší než průměr u studentů Učitelství 1. stupně. Rozdílnost průměrů byla ověřena pomocí Studentova t-testu, který potvrdil statisticky významný rozdíl mezi průměry obou skupin studentů.



Graf 1 (Srovnání výsledků ve společné části testu)

Problémy v průběhu testování

V průběhu vlastního testování se jako nejzávažnější problém projevila neschopnost studentů přečíst zadání úlohy s porozuměním textu a dodržet pokyny pro vyplnění odpovědí. Přečíst si důkladně a správně zadání úlohy je ale nejdůležitějším krokem k úspěšnému vyplnění testu, protože zadaná odpověď musí být v přesně požadovaném tvaru.

Počítač při vyhodnocení srovná předem zadané odpovědi s odpověďmi studenta, pokud se jakkoliv liší, počítač odpověď vyhodnotí jako nesprávnou. Typickými příklady jsou nedodržení požadovaného počtu desetinných míst nebo nesprávné vložení mezery do odpovědi.

Co jsme zjistili

Podle výzkumu PISA z roku 2006 mají čeští žáci osvojeno velké množství přírodovědných poznatků a teorií, ale samostatné uvažování o přírodovědných problémech a jejich zkoumání (tvorba hypotézy, využití různých výzkumných metod a postupů, získávání a interpretace data, formulace závěrů apod.) jim činí velké problémy. Ve zprávě z výzkumu se uvádí, že pravděpodobnou příčinou těchto zjištění je způsob výuky přírodovědných předmětů v České republice, protože důraz je kladen více na shromažďování a reprodukci teoretických znalostí než na podstatu přírodovědného zkoumání a uvažování.

Podobné závěry jsme zjistili také při tomto testování. Pokud úloha vyžadovala pouze reprodukci nějakého poznatku, byl výsledný průměr poměrně vysoký (kolem 70 % z maximálního počtu bodů). Jestliže bylo podstatou úlohy vyvozování, využití určitých vztahů nebo logický úsudek, výsledný průměr klesl na velmi nízkou úroveň (10 – 30 % z maximálního počtu bodů).

V souladu s výsledky dosaženými v mezinárodních výzkumech (PISA, TIMSS, ...) se u studentů projevily velké problémy s porozuměním čtenému textu. Ukázalo se, že nejobtížnější byla transformace textu do matematického problému a jeho následné řešení. Neméně závažným problémem byla neschopnost dodržovat uvedené instrukce.

Samotní studenti po ukončení testu hovořili o tom, že byl objektivně jednoduchý, ale nějtěžší pro ně bylo „vzpomenout si“ na základní postupy řešení, protože vědomosti získané v matematice na základní škole byly překryty vědomostmi z nových, náročnějších partií středoškolské matematiky. Z toho vyplývá, jak je důležité neustále (periodicky) opakovat rovněž učivo ze základní školy. Studenti Učitelství matematiky pro 2. stupeň ZŠ mají v navazujícím magisterském studiu předmět „Elementární matematika“, kde se zabývají právě úlohami z učiva matematiky na základní škole. I zde se často stává, že nejsou schopni užít elementární postupy a zadané úlohy řeší pomocí postupů, které se naučili až při studiu na střední a vysoké škole.

Dalo by se říci, že testování nepřineslo žádné nové poznatky. Téměř každý učitel matematiky si uvědomuje, že úroveň znalostí a vědomostí žáků našich škol neustále klesá a klesá rovněž zájem žáků naučit se něčemu novému. V matematice (i v dalších přírodních vědách) je situace natolik vážná, že se stále intenzivněji hledají způsoby, jak vzniklou situaci zlepšit.

Návrh řešení

Jedním z nových způsobů, jak zvýšit zájem žáků a studentů o přírodní vědy, byl projekt MŠMT ČR – STM-Morava (Soutěže tvořivosti mládeže, plný název *Výzkum nových metod soutěží tvořivosti mládeže zaměřených na motivaci pro vědecko výzkumnou činnost v oblasti přírodních věd, obzvláště v oborech matematických, fyzikálních a chemických*). Více informací najdou zájemci na adrese: <http://www.upol.cz/projects/souteze-up/prirodovedne-souteze/stm-morava/>. Jedním z podúkolů při řešení uvedeného projektu byly také „Hrátky s matematikou“. Jeho cílem bylo najít vhodné motivační aktivity pro zvýšení oblíbenosti matematiky na základních školách. Jako jedna z těchto motivačních aktivit byla testována oblast matematických i nematematických her.

Hra je přirozenou součástí lidského života, ve škole však nestačí jen hrát si. Žáci (studenti) musí pochopit, že bez jejich aktivního přístupu k výuce matematiky nebude proces učení dostatečně efektivní. Důležitou roli zde opět sehrává motivace. Učitel může motivaci posílit především vhodným výběrem úloh použitých ve výuce. Nácvik a osvojení matematických dovedností je sice nezbytnou podmínkou dalšího matematického vzdělávání, ale přemíra stereotypních úloh (např. sečti desetinná čísla, vynásob zlomky, vyřeš rovnici) má pro žáka účinek mnohdy negativní.

Jestliže žák neustále řeší pouze nereálné matematické úlohy, jež nemají bezprostřední uplatnění v praktickém životě, jeho zájem o matematiku dříve či později klesne. Matematika by však měla „běžnému uživateli“ sloužit především k řešení běžných životních situací. Na tomto místě si lze položit otázku: Proč tedy žák nemůže častěji řešit úlohy, které by představovaly „matematizaci“ jisté reálné situace a řešení opět popisovalo reálnou situaci? Odpověď je nasnadě: Takových úloh není v našich sbírkách dostatek a jejich vyhledávání nebo tvorba je pro učitele poměrně náročná činnost, a to nejen časově. Lze se domnívat, že častější zařazování tzv. *realistických*, příp. *pararealistických* úloh, viz [4], by zajisté pomohlo zlepšit nejen úroveň matematických znalostí a dovedností, ale také vztah žáků (studentů) k matematice.

Slovní úlohy v matematice poskytují největší prostor pro procvičování schopnosti porozumět textu a interpretovat jej. Žáci (studenti) je však příliš nemají v oblibě, snad právě proto, že neumí s textem dostatečně pracovat a že nevědí, který z naučených (často nepochopených) algoritmů mají použít.

Nabízejí se i jiná řešení, která vyžadují aktivitu žáků (studentů). Po osvojení určitých algoritmů (např. sčítání zlomků, písemné dělení) mohou sami vytvořit krátkou slovní úlohu tak, aby vycházela z reálné situace a jejíž řešení mají předem dáno. Z textu takové slovní úlohy pak bude patrné, zda žák (student) dané učivo pochopil.

Netypické, a o to víc zajímavé, jsou tzv. otevřené úlohy, viz [5]. Učitelé a někteří žáci, kteří jsou zvyklí na aktuální podobu matematiky, je však za matematické úlohy nepovažují. Jedná se o úlohy, které si žáci v rámci rozsahu probíraného učiva sami navrhnou. Tento typ úloh je vhodný například při nácvičku algoritmů typu sčítání, odčítání, apod. Jejich použití ale není omezeno jen na uvedené případy. Otevřené úlohy mohou mít také podobu slovních úloh, v nichž je zadána reálná situace, přičemž je otevřený konec textu (není přitom zadán konkrétní úkol v úloze). Úkolem žáka je situaci rozvinout a vyřešit úlohu, která z jím navrženého textu vyplývá. Opět je rozvíjena schopnost porozumět textu, který navíc vytvořili sami žáci. Otevřené slovní úlohy jsou vhodnější pro domácí žákovskou práci, třeba i dlouhodobějšího charakteru.

Závěr

Uvedené návrhy představují pochopitelně jen dílčí řešení současného stavu ve výuce matematiky. Má-li dojít k výraznému zlepšení celé situace, je potřeba provést některé změny. Lze jednoznačně konstatovat, že s potřebnými změnami je nutno začít již na fakultách připravujících učitele matematiky. Je přitom zcela pochopitelné, že učitelé matematiky s víceletou praxí často nejsou ochotni zásadním způsobem změnit některé své stereotypní návyky a mladí, nezkušení učitelé jsou nuceni přizpůsobit zaběhnutému stylu práce. Poměrně brzy tak ztrácejí své představy o tom, že matematiku lze vyučovat pro žáky přitažlivějším způsobem. K očekávané pozitivní změně lze dospět za předpokladu, že zejména mladí učitelé matematiky (absolventi VŠ) budou schopni a ochotni využít především znalostí o moderních vyučovacích metodách získaných v průběhu svého vysokoškolského studia.

Literatura

- [1] Oficiální webové stránky projektu Claroline [online], dostupné na adrese: <http://www.claroline.net>
- [2] *Chrástka, M.*: Metody pedagogického výzkumu. Grada, Praha 2007.
- [3] Výsledky mezinárodního výzkumu PISA 2006 [online], publikováno 6. 12. 2007, citováno 12. 9. 2008, dostupné na stránkách <http://www.ceskaskola.cz/Ceskaskola>
- [4] *Siwek, H.*: Czynnosciowe nauczanie matematyki. WSIP, Warszawa 1998.
- [5] *Deringer, P.*: Offene Mathematikaufgaben im Grundschulunterricht, In: Matematika 3 – Matematické vzdělávání z pohledu žáka a učitele primární školy. VUP, Olomouc 2008.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 151 a 152, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (18.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 151

Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a^2b^2}{c^4 + 2b^3c} + \frac{b^2c^2}{a^4 + 2c^3a} + \frac{c^2a^2}{b^4 + 2a^3b} \geq 1.$$

Dále zjistěte, kdy nastává rovnost.

Petr Kaňovský

Řešení:

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí pro kladná reálná čísla a, b, c

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} \geq 2 \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = 2 \frac{b}{c},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$. Odtud dostáváme, že platí

$$\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} \geq \frac{c^2}{b^2} + 2 \frac{b}{c}$$

a tedy i

$$\frac{\frac{a^2}{c^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} \leq \frac{\frac{a^2}{c^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{2b}{c}} = \frac{a^2 b^2}{c^4 + 2b^3 c}.$$

Užitím principu cyklické záměny platí také

$$\frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} \leq \frac{b^2 c^2}{a^4 + 2c^3 a} \quad \text{a} \quad \frac{\frac{c^2}{b^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} \leq \frac{c^2 a^2}{b^4 + 2a^3 b},$$

přičemž rovnost nastane, právě když $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$ a $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Užitím těchto tří nerovností tak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{a^2 b^2}{c^4 + 2b^3 c} + \frac{b^2 c^2}{a^4 + 2c^3 a} + \frac{c^2 a^2}{b^4 + 2a^3 b} &\geq \\ &\geq \frac{\frac{a^2}{c^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} + \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} + \frac{\frac{c^2}{b^2}}{\frac{c^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2}} = 1, \end{aligned}$$

což jsme měli dokázat. Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když nastane rovnost ve všech třech užitých nerovnostech, tj. když $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, tedy právě když $a = b = c$.

Jiné řešení (podle Josefa Tkadlece):

Pro kladná reálná čísla a, b, c platí identita

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \right)^2 &= \left(\frac{c^2}{b^2} + 2 \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{a^2}{c^2} + 2 \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b^2}{a^2} + 2 \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \right) = \\ &= \frac{c^3 + 2b^3}{b^2 c} + \frac{a^3 + 2c^3}{c^2 a} + \frac{b^3 + 2a^3}{a^2 b}. \end{aligned}$$

Podle Cauchyho nerovnosti platí

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^2 b^2}{c^4 + 2b^3 c} + \frac{b^2 c^2}{a^4 + 2c^3 a} + \frac{c^2 a^2}{b^4 + 2a^3 b} \right) \left(\frac{c^3 + 2b^3}{b^2 c} + \frac{a^3 + 2c^3}{c^2 a} + \frac{b^3 + 2a^3}{a^2 b} \right) &\geq \\ &\geq \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \right)^2 \end{aligned}$$

a užitím výše dokázané identity odtud dostaneme dokazovanou nerovnost. Rovnost v ní nastane, právě když

$$\frac{\frac{a^2 b^2}{c^4 + 2b^3 c}}{\frac{b^2 c}{c^3 + 2b^3}} = \frac{\frac{b^2 c^2}{a^4 + 2c^3 a}}{\frac{c^2 a}{a^3 + 2c^3}} = \frac{\frac{c^2 a^2}{b^4 + 2a^3 b}}{\frac{a^2 b}{b^3 + 2a^3}},$$

odkud výpočtem (který nebudeme uvádět) dostaneme, že $a = b = c$.

Správné řešení zaslali: *Josef Ondřej* G v Rožnově p. R., *Josef Tkadlec* z GJK v Praze 6 a *Jan Vaňhara* z GLJ v Holešově.

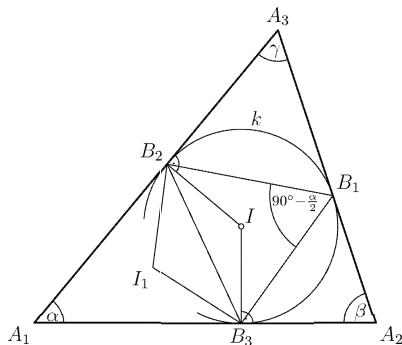
Úloha 152

Nechť B_1, B_2, B_3 jsou dotykové body kružnice vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$ po řadě se stranami A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 . Označme dále I_1, I_2, I_3 středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům $A_1B_3B_2, A_2B_1B_3, A_3B_2B_1$. Jsou-li úhly $B_2B_1B_3$ a $I_1I_2I_3$ shodné, je trojúhelník $A_1A_2A_3$ rovnoramenný. Dokažte.

Jaroslav Švrček

Řešení:

Většina řešení, která redakce obdržela, byla založena na skutečnosti, že body I_1, I_2 a I_3 leží na kružnici k vepsané libovolnému trojúhelníku $A_1A_2A_3$, jejíž střed označíme I . Tento fakt nyní dokážeme (obr. 1).

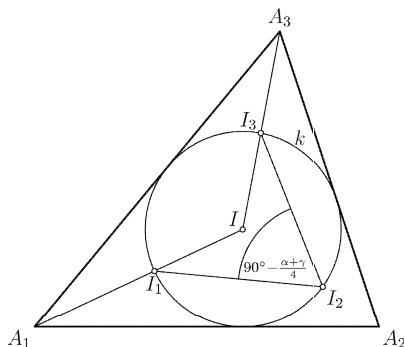


Obr. 1

Označme α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku $A_1A_2A_3$ po řadě při vrcholech A_1, A_2, A_3 . Jelikož A_1B_2I a A_1B_3I jsou shodné pravoúhlé trojúhelníky, je velikost úhlu B_2IB_3 rovna $180^\circ - \alpha$. Tomuto středovému úhlu odpovídá na kružnici k obvodový úhel $B_2B_1B_3$, jeho velikost je tedy $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Navíc je trojúhelník $A_1B_3B_2$ rovnostranný a velikosti vnitřních úhlů při základně B_2B_3 jsou $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Osy vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku při základně B_2B_3 s ní svírají shodné úhly o velikosti $45^\circ - \frac{\alpha}{4}$ a protínají se ve středu I_1 kružnice jemu vepsané. Velikost úhlu $B_2I_1B_3$ je proto $180^\circ - 2(45^\circ - \frac{\alpha}{4}) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Body B_1 a I_1 leží v opačných polovinách vyřazených přímkou B_2B_3 , součet velikostí úhlů $B_2B_1B_3$ a $B_2I_1B_3$

je 180° , tedy tyto čtyři body B_2 , B_1 , B_3 a I_1 leží na jedné kružnici. Touto kružnicí je kružnice k opsaná trojúhelníku $B_1B_2B_3$. Tedy bod I_1 leží na kružnici k . Podobně ukážeme, že na ní leží i body I_2 a I_3 . Tím jsme ukázali, že body I_1 , I_2 a I_3 leží na kružnici vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$.

Nyní určíme velikost úhlu $I_1I_2I_3$ (obr. 2).



Obr. 2

Středy I_1 a I_3 kružnic vepsaných trojúhelníkům $A_1B_3B_2$ a $A_3B_2B_1$ leží na osách vnitřních úhlů trojúhelníku $A_1A_2A_3$ při vrcholech A_1 a A_3 , které se protínají ve středu I kružnice k . Velikost úhlu A_3A_1I je $\frac{\alpha}{2}$, velikost úhlu A_1A_3I je $\frac{\gamma}{2}$, proto velikost úhlu A_1IA_3 je $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Tomuto středovému úhlu kružnice k odpovídá obvodový úhel $I_1I_2I_3$, jeho velikost je $90^\circ - \frac{\alpha}{4} - \frac{\gamma}{4}$.

Jsou-li úhly $B_2B_1B_3$ a $I_1I_2I_3$ shodné, platí pro jejich velikosti $90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{4} - \frac{\gamma}{4}$, odtud již dopočítáme $\frac{\gamma}{4} = \frac{\alpha}{4}$, tedy $\alpha = \gamma$. Trojúhelník $A_1A_2A_3$ je proto rovnoramenný, což jsme měli dokázat.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Simona Domesová*, *Miroslav Klímoš*, *Lucie Mohelníková* a *Eliška Nekvapilová*, všichni z GMK v Bílovci, *Jana Faltýnková* z CMG v Prostějově, *Tomáš Kocáb* z G v Košicích, *Poštová*, *Radek Marciňa* z GChD v Praze 5, *Zborovská*, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Van Nhan Nguyen* a *Martin Výška*, oba z G v Praze 6, *Nad Alejí*, *Josef Ondřej* G v Rožnově p. R., *Samuel Říha*, *Hana Šormová* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, t.ř. Kpt. Jaroše, *Alexander Slávik* z G v Brně-Řečkovících, *Josef Tkadlec*, *Jakub Töpfer* a *Tomáš Zeman*, všichni z GJK v Praze 6.

Pavel Calábek