

# MATEMATIKA

## Úlohy o derivacích a integrálech ze starších učebnic

ZDEŇKA HENCOVÁ

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Každý učitel matematiky při přípravě výuky často sáhne do knihovny pro nejrůznější matematické sbírky, aby si vytvořil zásobu úloh k procvičení právě probíraného tématu. Pokud mezi zmíněné kantory také patříte, určitě jste již zjistili, že se mnohé úlohy v různých pramenech opakují nebo jsou pouze drobně obměněny. I když je dobré mít připravenou zásobu typově podobných příkladů, není na škodu výuku občas nějakým způsobem zpestřit a oživit.

Jednou z cest, jak získat tyto nové podněty, je využití starších učebnic matematiky, a to nejen díky odlišnostem v obsahu probíraného učiva a metodice výkladu.

Starší úlohy mohou zaujmout především volbou zpracovaných témat a netradičních matematických aplikací, ale také krásným dobovým jazykem.

Uvedme tedy několik zajímavých úloh z problematiky infinitezimálního počtu, kterými by bylo možné zpestřit hodiny matematiky vyhrazené tomuto tématu. Abychom úlohám ponechali jejich kouzlo, uvedeme jejich zadání v původním znění. Řešení již pochopitelně podáme dnes obvyklými postupy a současnou terminologií. Pro ilustraci mezipředmětových vztahů uvádíme též dva příklady s fyzikální tematikou.

**Příklad 1** (viz [1], str. 257)

*Dokažte, že úsek tečny křivky  $y = ax^{-n}$  (pro  $n$  celé kladné), ležící mezi osami souřadnic, je dotykovým bodem jejím rozdělen v poměru  $n : 1$ .*

*Řešení.* V zadání se mlčky předpokládá, že  $a$  je *nenulové* reálné číslo. S ohledem na souměrnost dvojice křivek lišících se pouze znaménkem koeficientu  $a$  vyšetříme pouze případy, kdy  $a > 0$ . Dále vzhledem k symetriím křivek  $y = ax^{-n}$  (osová souměrnost podle souřadnicové osy  $y$  pro  $n$  sudá, středová souměrnost podle počátku pro  $n$  lichá) zaměříme pozornost pouze na tečny s bodem dotyku v I. kvadrantu.

Tečna ke křivce  $y = y(x)$  s bodem dotyku  $T[x_0, y_0]$  je přímka daná rovnicí

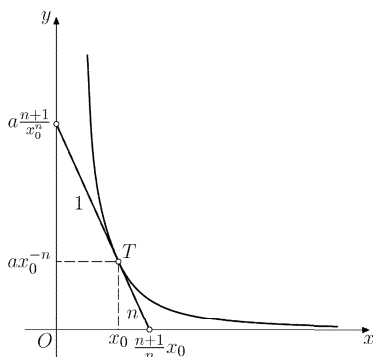
$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

jejíž směrnice  $k$  je rovna hodnotě první derivace  $y'_0$  funkce  $y$  v bodě  $x_0$ . V naší úloze je

$$y_0 = ax_0^{-n} \quad \text{a} \quad y'_0 = -anx_0^{-(n+1)}.$$

Tečna má tedy rovnici

$$y - ax_0^{-n} = -anx_0^{-(n+1)}(x - x_0).$$



Obr. 1

Tuto rovnici upravíme na úsekový tvar:

$$\frac{x}{\frac{ax_0^{-n}(n+1)}{anx_0^{-(n+1)}}} + \frac{y}{ax_0^{-n}(n+1)} = 1,$$

$$\frac{x}{\frac{n+1}{n}x_0} + \frac{y}{a\frac{n+1}{x_0^n}} = 1.$$

Tečna tedy vytíná na ose  $x$  úsek délky

$$\frac{n+1}{n} x_0,$$

na ose  $y$  úsek délky

$$a \frac{n+1}{x_0^n}$$

(připomínáme předpoklady  $a > 0$  a  $x_0 > 0$ ).

Vedme nyní bodem dotyku  $T$  rovnoběžky se souřadnicovými osami. Tyto přímký nám společně s tečnou vymezí dva podobné pravoúhlé trojúhelníky, jejichž přepony jsou právě zkoumané úseky tečny (ležící mezi osami a rozdělené dotykovým bodem  $T$ ), viz obr. 1.

Z podobnosti těchto trojúhelníků vyplývá, že úseky tečny křivky vymezené souřadnicovými osami a dotykovým bodem  $T$  budou ve stejném poměru jako odpovídající si dvojice odvěsen těchto trojúhelníků. Hledaný poměr určíme například jako poměr délek odvěsen rovnoběžných s osou  $x$ :

$$x_0 : \left( \frac{n+1}{n} x_0 - x_0 \right) = x_0 : x_0 \left( \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n} \right) = 1 : \frac{1}{n} = n : 1.$$

Ke stejnému výsledku bychom samozřejmě museli dojít také v případě, že bychom vyšetřovali poměr délek odvěsen rovnoběžných s osou  $y$ .

## **Příklad 2** (viz [2], str. 156)

*Určete geometrické místo bodů, v nichž křivky  $y = \lambda x^n$  mají při proměnlivém  $\lambda$  (a stálém  $n$ ) tečny svírající s osou  $+x$  úhel  $\alpha$ .*

**Řešení.** V zadání úlohy nejsou specifikovány hodnoty měnícího se koeficientu  $\lambda$ , pevného exponentu  $n$  a směrového úhlu  $\alpha$ , který má mít zřejmě rovněž konstatní hodnotu. V našem řešení budeme předpokládat, že  $n$  je dané celé číslo různé od nuly,  $\alpha$  je daný úhel,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$  ( $\alpha \neq 90^\circ$ ) a  $\lambda$  probíhá množinu všech reálných čísel různých od nuly.

Víme, že tečna ke grafu funkce  $y = \lambda x^n$  s bodem dotyku  $[x_0, y_0]$  má směrnici  $k = n\lambda x_0^{n-1}$ , jež se rovná tangentě úhlu mezi tečnou a kladnou poloosou  $x$ . Hledáme tedy množinu všech bodů  $[x, y]$  splňujících tuto podmínku:

Existuje  $\lambda \neq 0$  tak, že  $y = \lambda x^n$  a zároveň  $n\lambda x^{n-1} = \operatorname{tg} \alpha$ . Protože  $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ , plyne z druhé rovnosti  $x \neq 0$ , a proto i  $y \neq 0$  z první rovnosti. Z rovnosti zlomků

$$\lambda = \frac{y}{x^n} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{nx^{n-1}}$$

zjišťujeme, že bod  $[x, y]$  leží na přímce o rovnici

$$n \cdot y - \operatorname{tg} \alpha \cdot x = 0,$$

přitom  $[x, y] \neq [0; 0]$ .

Ukažme nyní, že naopak každý bod  $[x, y]$  nalezené přímky (různý od bodu  $[0; 0]$ ) patří do hledané množiny. Protože  $x \neq 0$  a  $y \neq 0$ , lze rovnici přímky zpět přepsat do rovnosti zlomků

$$\frac{y}{x^n} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{nx^{n-1}},$$

jejichž společná hodnota  $\lambda$  je různá od nuly. Pro ni tedy platí obě rovnosti  $y = \lambda x^n$  a  $n\lambda x^{n-1} = \operatorname{tg} \alpha$ , takže bod  $[x, y]$  má požadovanou vlastnost.

**Příklad 3** (viz [2], str. 156)

*Na křivce  $y = \frac{a}{x^2}$  jest nalézt bod, jehož normála jde počátkem.*

*Řešení.* Normála ke křivce  $y = y(x)$  v jejím bodě  $[x_0, y_0]$  má rovnici

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0),$$

kde  $y'_0$  je hodnota první derivace funkce  $y$  v bodě  $x_0$ . Pro křivku  $y = \frac{a}{x^2}$  má tato derivace hodnotu

$$y'_0 = -\frac{2a}{x_0^3},$$

takže normála má rovnici

$$y - \frac{a}{x_0^2} = \frac{x_0^3}{2a}(x - x_0).$$

Taková přímka prochází počátkem, právě když její rovnici vyhovuje dvojice hodnot  $x = 0$  a  $y = 0$ . Dosazením do výše uvedené rovnice dostaneme

$$-\frac{a}{x_0^2} = \frac{x_0^3}{2a}(-x_0),$$

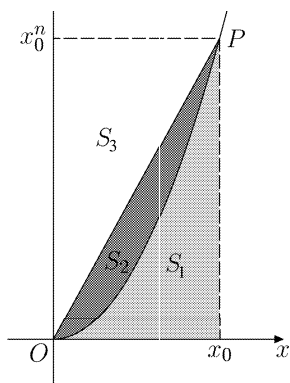
odkud

$$x_0 = \pm \sqrt[6]{2a^2} \quad \text{a} \quad y_0 = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}.$$

**Příklad 4** (viz [2], str. 166)

*Dokažte, že u paraboly  $y = x^n$  ( $n$  celé kladné) dělí oblouk křivky  $OP$  a tětiva  $OP$  obdélník, jehož stranami jsou souřadnice bodu  $P$ , v poměru  $2 : (n - 1) : (n + 1)$ .*

*Řešení.*



Obr. 2

Souřadnice libovolného bodu  $P$  paraboly  $y = x^n$  ( $n$  celé kladné) jsou  $[x_0, x_0^n]$ , přitom s ohledem na symetrii můžeme předpokládat, že  $x_0 > 0$ . Rozdělení obdélníku podle textu úlohy vidíte na obrázku, kde jsme obsahy jednotlivých částí označili  $S_1, S_2, S_3$ , zatímco obsah celého obdélníku je roven  $S_0 = x_0 \cdot x_0^n = x_0^{n+1}$ . Pro výpočet obsahu  $S_1$  užijeme určitého integrálu:

$$S_1 = \int_0^{x_0} x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{x_0} = \frac{x_0^{n+1}}{n+1},$$

$$S_2 = \frac{1}{2}S_0 - S_1 = \frac{x_0^{n+1}}{2} - \frac{x_0^{n+1}}{n+1} = x_0^{n+1} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right] = x_0^{n+1} \frac{n-1}{2(n+1)},$$

$$S_3 = \frac{1}{2}S_0 = \frac{x_0^{n+1}}{2}.$$

Pro poměr uvažovaných obsahů tedy platí

$$S_1 : S_2 : S_3 = \frac{x_0^{n+1}}{n+1} : x_0^{n+1} \frac{n-1}{2(n+1)} : \frac{x_0^{n+1}}{2} = 2 : (n-1) : (n+1).$$

**Příklad 5** (viz [2], str. 156)

*Jak by bylo třeba zvoliti velikost válcových mincí (daného objemu), aby se co nejméně opotřebovaly?*

*Řešení.* Ačkoli není v zadání přesně specifikováno, čím se poměřuje opotřebování mincí, můžeme se oprávněně domnívat, že se jedná o jinou formulaci problému nalézt minci daného objemu s minimálním povrchem.

Protože mince je válcového tvaru, platí pro její objem  $V$  a povrch  $S$  vzorce

$$V = \pi r^2 v \quad \text{a} \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi r v,$$

kde při daném objemu  $V$  hledáme poloměr  $r$  a výšku  $v$  té válcové mince, která má minimální povrch  $S$ .

Ze vzorce pro objem vyjádříme výšku mince v závislosti na jejím poloměru

$$v = \frac{V}{\pi r^2}$$

a dosadíme ji do vzorce pro povrch

$$S = 2\pi r \left( r + \frac{V}{\pi r^2} \right) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Hledáme minci s minimálním povrchem, určíme tedy bod minima funkce  $S$  v závislosti na proměnné  $r \in (0; \infty)$ . Z vyjádření její derivace

$$S'(r) = 4\pi r - 2V \frac{1}{r^2} = 2r \left( 2\pi - \frac{V}{r^3} \right)$$

plyne, že  $S'(r) < 0$  pro  $r \in (0; r_0)$  a  $S'(r) > 0$  pro  $r \in (r_0; \infty)$ , kde  $r_0$  je kořen rovnice

$$2\pi - \frac{V}{r^3} = 0, \quad \text{tedy} \quad r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Funkce  $S = S(r)$  je proto klesající na  $(0; r_0)$  a rostoucí na  $(r_0; \infty)$ . Povrch mince je tedy minimální při poloměru  $r_0$  a výšce

$$v_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Vypočtené rozměry jsou v poměru  $v_0 : r_0 = 2 : 1$ , zatímco u skutečných mincí je  $v_0 \ll r_0$ , takže podmínka minimálního povrchu se při praktickém navrhování mincí nebere v potaz.

### **Příklad 6** (viz [2], str. 156)

*Intensity dvou zdrojů světelných se mají k sobě jako 1 : 8, vzdálenost jejich je 6 m; který bod na spojnici jich je nejméně osvětlen?*

**Řešení.** Jak je ze zadání patrné, jsou pro vyřešení příkladu nutné jisté znalosti z optiky. Uvedme proto nejprve vztah pro osvětlení  $E$  místa ve vzdálenosti  $r > 0$  od zdroje o intenzitě  $I$

$$E = \frac{I}{r^2}.$$

Hledáme některé místo na spojnici dvou zdrojů. Pro každý bod této spojnice je výsledné osvětlení rovno součtu osvětlení od obou zdrojů

$$E = E_1 + E_2.$$

Bude-li vzdálenost hledaného místa od prvního zdroje s intenzitou  $I_1$  rovna  $x$  metrů, pak vzdálenost tohoto místa od druhého zdroje o intenzitě  $8I_1$  je  $6 - x$  metrů, tudíž jeho osvětlení je dáno vztahem

$$E = \frac{I_1}{x^2} + \frac{8I_1}{(6 - x)^2}.$$

Hledáme-li bod s minimálním osvětlením, jedná se o úlohu na vyšetření minima funkce  $E(x)$  na intervalu  $x \in (0; 6)$ . Pro derivaci funkce  $E(x)$  platí

$$\frac{dE(x)}{dx} = \left[ -\frac{2}{x^3} + \frac{16}{(6-x)^3} \right] I_1.$$

Možné body extrémů hledáme jako nulové body první derivace (která zde existuje)

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{2}{x^3} + \frac{16}{(6-x)^3} \right] I_1 &= 0, \\ \left( \frac{2}{6-x} \right)^3 &= \frac{1}{x^3}, \\ \frac{2}{6-x} &= \frac{1}{x}, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

V bodě  $x = 2$  má funkce  $E$  minimum (takže bod minimálního osvětlení je vzdálen 2 m od prvního zdroje), protože druhá derivace funkce  $E$  je kladná dokonce pro každé  $x \in (0; 6)$

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} = I_1 \left( \frac{6}{x^4} + \frac{48}{(6-x)^4} \right) > 0.$$

### **Příklad 7** (viz [3], str. 54)

*Určete úhrnný tlak na svislou stěnu mající tvar rovnoramenného lichoběžníku o základnách  $z_1 > z_2$  a výšce  $v$  ( $z_1$  horější základna).*

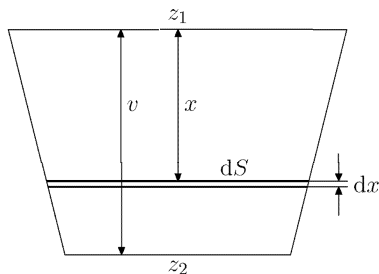
**Řešení.** Zadání tohoto příkladu (doplněno a vyjádřeno současným jazykem) požaduje určit výslednou tlakovou sílu, která působí na svislou stěnu tvaru lichoběžníku umístěnou v tekutině o hustotě  $\rho$  (považujeme ji ve všech místech tekutiny za neměnnou). Hladina této tekutiny je v úrovni horní základny lichoběžníku.

Jak z fyziky víme, je tlak  $p$  uvedené tekutiny na zkoumanou stěnu přímo úměrný hloubce  $x$  daného místa pod hladinou tekutiny:

$$p = x \cdot \rho \cdot g \quad (0 \leq x \leq v),$$

kde  $g$  vyjadřuje hodnotu tíhového zrychlení (kterou v tomto příkladu považujeme samozřejmě také za konstantní).

Místa stejného tlaku (jaký je v dané hloubce  $x$ ) představují elementární plošku  $dS$  svislé stěny (ve stejné hloubce  $x$ ), kterou můžeme považovat za obdélník o šířce  $z_1 + \frac{z_2 - z_1}{v}x$  a výšce  $dx$  (viz obr. 3).



Obr. 3

Tlakovou sílu  $dF$  působící na popsanou plošku  $dS$  lze proto vyjádřit vztahem

$$dF = p dS = x \rho g \left( z_1 + \frac{z_2 - z_1}{v} x \right) dx.$$

Výslednou tlakovou sílu  $F$  pak určíme sečtením všech sil  $dF$  působících na jednotlivé elementární plošky, tedy integrací

$$\begin{aligned} F &= \int dF = \int_0^v x \cdot \rho \cdot g \cdot \left( z_1 + \frac{z_2 - z_1}{v} x \right) dx = \\ &= \rho \cdot g \cdot \left[ z_1 \frac{x^2}{2} + \frac{z_2 - z_1}{v} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^v = \frac{\rho g v^2}{6} (z_1 + 2z_2). \end{aligned}$$

## Literatura

- [1] Bydžovský, B. – Teplý, S. – Vyčichlo, F.: Sbírká úloh z matematiky pro IV.–VII. třídu středních škol, JČSMF, Praha 1936.
- [2] Vojtěch, J.: Geometrie pro VII. třídu reálků, Jednota českých matematiků, Praha 1912.
- [3] Bydžovský, B. – Vojtěch, J.: Matematika pro nejvyšší třídu reálků, Jednota českých matematiků, Praha 1912.

# Prehľad niektorých typických chýb a nedostatkov žiakov 2. stupňa ZŠ v matematickej činnosti

VLADIMÍR STREČKO

Prešovská univerzita v Prešove, SLOVENSKO

(Dokončení)

Príkladom č. 1 v piatom ročníku sme sa pokúšali overiť, či žiak uprednostní operáciu násobenia pred operáciou sčítania. Ukázalo sa že až 34,09 % žiakov A skupiny a 35,14 % žiakov B skupiny tento fakt nerešpektovalo. Najčastejšou chybou bolo, že dané čísla najprv sčítali a až potom vynásobili. Príkladom č. 2 sme na jednoduchom výbere úlohy verifikovali, či má žiak problémy s odčítavaním čísel s prechodom cez desiatku. Ukázalo sa, že 20,45 % žiakov A skupiny a 18,92 % žiakov B skupiny naozaj urobilo očakávanú chybu. Tiež sa potvrdilo, že žiaci nie sú pozorní a namiesto odčítavania sčítavajú. Domnievame sa, že ak by šlo o rádovo väčšie čísla, percento výskytu chýb by sa zvýšilo. Príkladom č. 3 sme zisťovali, či žiak uprednostní operáciu delenia pred operáciou odčítania. Ukázalo sa, že 38,64 % žiakov A skupiny a 27,03 % žiakov B skupiny zlyhalo na tom, že neuprednostňujú dané operácie a tiež sú presvedčení o tom, že 4:4, resp. 2:2 sa rovná nule.

## Test aplikovaný v 5. ročníku

| Skupina A                      | Skupina B                      |
|--------------------------------|--------------------------------|
| Vypočítajte:                   | Vypočítajte:                   |
| <b>Pr. 1</b> $5 + 2 \cdot 3 =$ | <b>Pr. 1</b> $4 + 2 \cdot 3 =$ |
| <b>Pr. 2</b> $13 - (2 + 4) =$  | <b>Pr. 2</b> $15 - (4 + 3) =$  |
| <b>Pr. 3</b> $16 - 4 : 4 =$    | <b>Pr. 3</b> $12 - 2 : 2 =$    |

Príkladom č. 1 v šiestom ročníku sme testovali, či žiak uprednostní operáciu delenia pred operáciou sčítania. 44 % žiakov A skupiny a 42,86 % žiakov B skupiny urobilo v tomto príklade chybu. Najčastejšou chybou

bolo neuprednostnenie operácii a problém deliť číslo desiatkou. Príkladom č. 2 sme zisťovali, či žiak správne odčítava. Ukázalo sa, že 28 % žiakov A skupiny a 28,57 % žiakov B skupiny sa pri výpočte pomýlilo. Príkladom č. 3 sme overovali, či žiak rešpektuje znamienkové pravidlá. 52 % žiakov A skupiny a 46,94 % žiakov B skupiny urobilo chybu. Najčastejšou chybou bolo ponechanie kladného znamienka pri súčine záporného a kladného čísla, a tiež sa potvrdilo chybné sčítavanie desatinných čísel.

### Test aplikovaný v 6. ročníku

| Skupina A                             | Skupina B                             |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| Vypočítajte:                          | Vypočítajte:                          |
| <b>Pr. 1</b> $885 + 330 : 10 =$       | <b>Pr. 1</b> $623 + 250 : 10 =$       |
| <b>Pr. 2</b> $96 - (43 + 17) =$       | <b>Pr. 2</b> $98 - (38 + 22) =$       |
| <b>Pr. 3</b> $-2 \cdot (3,5 + 1,5) =$ | <b>Pr. 3</b> $-3 \cdot (4,5 + 3,5) =$ |

Príkladom č. 1 v siedmom ročníku sme testovali, či žiaci adekvátne odstránia zátvorku a doriešia príklad. Ukázalo sa, že tento problém malo 42,86 % žiakov A skupiny a 45,95 % žiakov B skupiny. Príkladom č. 2 sme skúmali, či žiaci uprednostnia operáciu násobenia pred operáciou sčítania a odčítania, tiež akú hodnotu dostanú pri delení kladného a záporného čísla. 57,14 % žiakov A skupiny a 64,86 % žiakov B skupiny urobilo uvedenú chybu. Príkladom č. 3 sme chceli zistiť, do akej miery si žiaci poradia s väčším počtom operácií. Príklad sa ukázal byť nesmierne náročný, čo sa odrazilo na veľkom počte chybných výsledkov. Daný príklad vyriešilo 81,63 % žiakov A skupiny a 75,68 % žiakov B skupiny chybné. Najčastejšou chybou bolo nesprávne odstránenie zátvoriek, nesprávne sčítanie a odčítanie desatinných čísel, neuprednostnenie násobenia a delenia pred sčítaním a odčítaním.

### Test aplikovaný v 7. ročníku

| Skupina A                                                  | Skupina B                                                 |
|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Vypočítajte:                                               | Vypočítajte:                                              |
| <b>Pr. 1</b> $-630 - (-25) =$                              | <b>Pr. 1</b> $-560 - (-25) =$                             |
| <b>Pr. 2</b> $(-2 + 8,3 - 6) : (-4) =$                     | <b>Pr. 2</b> $(-6 + 9,2 + 4) : (-2) =$                    |
| <b>Pr. 3</b> $3 + (1,8 + 4,2) : 3 - 2 \cdot (2,5 - 3,5) =$ | <b>Pr. 3</b> $-2 \cdot (1,5 - 3) - (9,8 + 2,2) : 3 + 1 =$ |

Príkladom č. 1 v ôsmom ročníku sme na základe špeciálne utvorených príkladov zisťovali, či žiakov nepovedie k vytvoreniu si vlastných pravidiel počítania. Tvrdenie sa nám potvrdilo v A skupine na 39,22 % a v B skupine na 68,18 %. Najčastejšou chybou v skupine A bolo, že žiaci odčítali  $x$  a výsledok im ostal 3, resp.  $3x - x = 2$ . V skupine B žiaci nevideli možnosť iného riešenia a napísali výsledok  $a$ . Správne riešenie sme uznali aj tým žiakom, ktorí nevyňali 5 pred zátvorku a napísali, že výraz sa nedá odčítať. Príkladom č. 2 sme sledovali, či žiaci správne odstránia zátvorku. Ukázalo sa, že 56,86 % žiakov A skupiny a 50 % žiakov B skupiny urobilo chybu. Okrem nesprávneho odstránenia zátvoriek sa vyskytli aj numerické chyby vo výpočte. V príklade č. 3 sme sledovali, či žiaci používajú správy algoritmus pri úprave zlomkov. Ťažkosti malo 45,10 % žiakov A skupiny a 56,82 % žiakov B skupiny.

### Test aplikovaný v 8. ročníku

| Skupina A                                    | Skupina B                              |
|----------------------------------------------|----------------------------------------|
| Upravte výrazy:                              | Upravte výrazy:                        |
| <b>Pr. 1</b> $3x - x =$                      | <b>Pr. 1</b> $5a - 5 =$                |
| <b>Pr. 2</b> $2 \cdot (5a + 5) - (3a + 6) =$ | <b>Pr. 2</b> $9x - 3 \cdot (6 + 5x) =$ |
| <b>Pr. 3</b> Upravte zložený zlomok:         | <b>Pr. 3</b> Upravte zložený zlomok:   |
| $\frac{4}{\frac{2}{3}} =$                    | $\frac{\frac{2}{3}}{4} =$              |

Príkladom č. 1 v deviatom ročníku sme testovali, či žiaci správne odstránia zátvorku. Ukázalo sa, že 39,22 % žiakov A skupiny a 41,86 % žiakov B skupiny sa zmýlilo. Najčastejšou chybou bolo nezmenenie znamienka druhého člena v zátvorke. Analogicky v príklade č. 2 sme zisťovali, či sa žiaci po istých krokoch výpočtu dopracujú k správne výsledku. Až 58,82 % žiakov A skupiny a 53,49 % urobilo pri výpočte chybu. Najčastejšie k chybe došlo pri odstránení zlomku a následnom nezmenení znamienka. Takisto sa prejavili numerické chyby z nepozornosti. Nakoniec príkladom č. 3 sme overovali, či žiaci vidia v danom príklade známy vzorec na druhú mocninu dvojčlena. Zistili sme, že 41,18 % žiakov A skupiny a 55,81 % žiakov B skupiny si daný vzorec neuvedomilo. Najčastejšie žiaci umocnili prvý člen výrazu a sčítali s druhým členom výrazu, ktorý taktiež umocnili.

## Test aplikovaný v 9. ročníku

| Skupina A                                        | Skupina B                                         |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Upravte:                                         | Upravte:                                          |
| <b>Pr. 1</b> $5 - (7 - 4x) - 7 \cdot (4x + 1) =$ | <b>Pr. 1</b> $6 - (-7 + 2x) - 2 \cdot (8x - 1) =$ |
| <b>Pr. 2</b> $\frac{8x-4}{2} - \frac{2-3x}{3} =$ | <b>Pr. 2</b> $\frac{6x+2}{2} - \frac{14x-3}{7} =$ |
| <b>Pr. 3</b> $(9 - 6x)^2 =$                      | <b>Pr. 3</b> $3(8x + 6)^2 =$                      |

Na záver príspevku uvedieme príčiny žiackych chýb, navrhujeme taktiku vyhýbania sa chybám, poukážeme na klimatické a metodologické aspekty zaobchádzania s chybami, uvedieme vplyv učiteľovej reedukácie na strategické správanie žiaka.

Učitelia udávajú ako najčastejšiu príčinu chýb v matematickej činnosti žiakov nedostatok cviku. Mnohí pripisujú tieto chyby aj na vrub určitej povrchnosti, nesústredenosti, resp. lenivosti žiakov. Žiaci si väčšinou uzakonili akési súkromné pravidlá, o ktorých učiteľ nič nevie. Bez podrobnejšieho vypytovania sa žiaka nemôžeme vo všeobecnosti nič určité o príčine chyby povedať. Jedna a tá istá chyba môže mať u rôznych žiakov rôzne príčiny. Presnejšiu informáciu o príčinách chýb môže dať vo všeobecnosti až rozhovor so žiakmi alebo písomné opytovanie.

Chyby z „bezmyšlienkovitosti“ alebo niečoho podobného sú zriedkavé a žiaci vo všeobecnosti pri svojich chybách na niečo myslia. Veľká časť chýb nie je náhodná, ale „systematická“, pričom žiaci rozvíjajú svoju vlastnú logiku. Čo si pri chybách myslia, často nie je nerozumné, len nesúhlasí mnohokrát s tým, čo je v matematike obvyklé. Príčina, pre ktorú žiaci rozvíjajú svoju vlastnú „logiku“, tkvie jednoducho v tom, že nedodržiavajú, neuskutočňujú určité konvencie v matematike. Matematika je plná konvencií. Mnohé z nich sú pre nás také samozrejmé, že už na ne ani nemyslíme, ba si ich ani neuvedomujeme. Preto sa mnohé konvencie vo vyučovaní ani nespomenú alebo nepovedia dosť jasne. Do istej miery sa očakáva, že ich žiaci rozpoznajú sami od seba. Napríklad, že násobenie a delenie má prednosť pred sčítaním a odčítaním. Aj správne riešenie úloh môže byť založené na úplne „falošných“ predstavách žiakov o premenných, výrazoch. Netušené myšlienkové pochody môžu mať veľa príčin a sú pravdepodobne častejšie, ako by sme si želali. Vo väčšine prípadov zostávajú však myšlienkové pochody pred učiteľom skryté. Relatívna neprístupnosť žiackych myšlienok má šťastí pôvod v okrajových podmienkach vyučovania mate-

matiky v jeho súčasnej forme. Veľké počty žiakov, neustála časová tieseň a málo možnosti vnútorného diferencovania sťažujú individuálny prístup ku žiakovi. Žiaci tým dostávajú aj relatívne málo príležitostí ukázať svoje nedostatky. Rozhovory so žiakmi a písomné dotazníky sú skôr neobvyklé a mnohokrát sú spojené s ťažkosťami.

Rozoznávame proti sebe dve koncepcie učenia sa: učenie ako kopírovanie a učenie ako konštruovanie.

Pri učení ako kopírovaní ide o didaktickú ideológiu, ktorá v podstate pozostáva z toho, že vopred „očistená látka“ sa možno s najlepšou prípravou žiakom predvedie a pokiaľ možno sa „bez šumu“ akýmsi druhom kopírovania na nich preniesie. Chyby tu pociťujeme ako poruchy tohto kopírovacieho procesu, a preto sa im podľa možnosti vyhýbame. Bližšie skúmanie žiackych myšlienok pociťujeme ako nepotrebné, pretože sa celkom sústreďujeme na kopírovací proces a od neho odchyľujúce sa žiacke myšlienky tiež cítime ako poruchy.

Naproti tomu pri učení ako konštruovaní ide o didaktickú koncepciu, ktorá pozostáva z toho, že učiteľ látku ponúkne a pomkne žiaka ku konfrontácii s učebnou látkou, pričom žiak si musí nakoniec pochopenie látky vykonštruovať vlastnou činnosťou. Individuálne myšlienky žiakov sú rozhodujúce, pretože nejde len o „ponuku“ učiteľa, ale aj o to, čo s tým žiak urobí. Učiteľovou úlohou je preto aj získať spätné hlásenie o stave žiackych konštrukcií. V dnešnej dobe na niektorých školách ešte stále panuje didaktická ideológia učenia sa ako kopírovania. Tomu zodpovedá aj obvyklé správanie sa voči chybám: vyhnúť sa chybám za každú cenu, zo strachu, žeby sa mohlo u žiakov čosi falošné fixovať alebo čosi falošné nacvičiť. Často veríme, že chybám žiakov sa najlepšie vyhneme tak, že im ukážeme čo najmenej chýb. Z toho vyplýva, že vo vyučovaní sa na chyby okamžite poukáže, vždy sa vysvetlí, prečo je niečo nesprávne a potom sa to „vymaže“. Podrobný rozhovor so žiakom, v ktorom by vyšli najavo príčiny jeho chyby, je neobvyklý a mnohí žiaci by si také dodatočné „vítanie“ vysvetľovali ako zlomyseľnosť učiteľa. Iste každý žiak pozná typické učiteľské správanie: túžobne očakávať istú žiacku odpoveď, a keď ju žiak po dlhšom čase povie, tak to nezničiť nejakými ďalšími podotázkami, t.j. neobjaviť prípadné chyby v jeho myslení. Žiaci vo väčšine prípadov veľmi rýchlo prevezmú strach z odhalenia chýb. Často žiak veľmi pozorne sleduje učiteľa, aby z jeho vyjadrení alebo výrazu tváre hneď v zárodku rozoznal, či začína postupovať chybne. Pretože o chybách sa má čo „najmenej“ hovoriť, tak učiteľské komentáre k chybám sú často krátke a hutné. Napríklad ako

poznámky: „Nezmysel!“, „Čo to je?“, „Tak nemožno krátiť!“ atď. Takéto poznámky síce prehľbujú zlé svedomie žiaka, ale sotva mu pomáhajú vyhnúť sa v budúcnosti týmto chybám. Ak sa pomoc učiteľa obmedzí len na takéto poznámky, tak sa správa voči chybám nekonštruktívne. Taktika vyhýbania sa chybám môže mať aj kladné stránky, prekáža však učeniu sa z chýb. K učeniu sa z chýb nestačí samotné zistenie chýb, musíme sa zaujímať aj o ich pôvod. Takýto záujem, konfrontácia sú však možné iba vtedy, keď chyby sú prípustné a pozitívne k nim pristupujeme. Príklad na pozitívny prístup k chybám: Je známe, že obľúbený je tento druh chýb:  $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ . Väčšinou sa na takúto chybu len poukáže, v najlepšom prípade na číselných príkladoch sa vysvetlí, že príslušný vzťah vo všeobecnosti neplatí. Mohlo by sa však spraviť viac. Ak žiak takúto chybu urobí, tak sa ho môžeme spýtať, ako uvažoval a rozobrať vznik chyby s celou triedou.

Nie vždy je možné určiť typ chyby, pretože napríklad učiteľ ju nepozná alebo chyba je ťažko zovšeobecniteľná. Možnosti chýb v matematickej činnosti sú okrem toho príliš početné. Znalosť typických chýb je síce užitočná, okrem toho bude však potrebné, aby sa žiaci skôr učili v nejakej metarovine rozpoznávať vlastné chyby. Mnohé z toho asi nie je možné na vyučovaní. Isté však je, že takéto učenie je možné vtedy, keď sa uskutočňuje konfrontácia s chybami. Aby učiteľ v takomto učebnom procese mohol zasiahnuť, musí sa informovať o žiackych myšlienkach. Vhodnými prostriedkami na to sú rozhovory, dotazníky, diskusie počas vyučovania. Nemuseli by to byť vždy dlhotrvajúce rozhovory, často stačia krátke otázky ako: „Čo si si pri tom myslel?“, „Ako si na to prišiel?“, „Môžeš výsledok vysvetliť?“, „Môže ešte niekto vysvetliť, ako na to mohol prísť?“, „Za akých predpokladov by to bolo správne?“ atď. Cieľom učiteľa by stále malo byť uchopiť korene chyby pri každom jednotlivom žiakovi, aby sa nemusel uspokojiť s povrchnou liečbou symptómov. Neúspešnému žiakovi môže účinne pomôcť tým, že ho učí s chybou zápojiť. Učí ho vlastne chybu: uzrieť, pomenovať, analyzovať a opraviť.

Pozitívny prístup k chybám predpokladá určitú dôveru medzi učiteľom a žiakmi, atmosféru, ktorá dovoľuje hovoriť aj o nesprávnom. Existujú učitelia, ktorí tvrdia, že interview, dotazníky, alebo rozhovory počas vyučovania výrazne zlepšili atmosféru v ich triede. Žiaci cítia, že ich berú vážnejšie a majú pocit, že sa môžu aktívnejšie zapájať do vyučovacieho procesu. Pri iných prístupoch má učiteľ pri pýtaní sa na chyby vždy pravdu, žiak sotva môže postaviť niečo proti prísnej logike matematiky pravda – nepravda.

Mali by sme sa však snažiť o taký prístup k chybám, pri ktorom žiak aspoň čiastočne môže mať pravdu. Svoje vlastné myšlienkové pochody, a teda príčiny svojich chýb, pozná predsa najlepšie on sám, aj keď si ich hneď neuvedomuje. Učiteľ má predovšetkým vziať myšlienky a logiku žiaka na vedomie. Potom mu má pomôcť revidovať jeho úvahy.

Tlak nepripúšťať chyby odzrkadľuje scholastické komponenty vyučovania. V popredí stojí sprostredkovanie stabilného, do vysokej miery bezpečného, vedeckého systému. Keď sa rozhoduje o učebných plánoch, tak sa často kladie otázka: „Je to bezpečné poznanie?“ Pri tomto chápaní sa zdá byť veda statickým systémom. Tento systém sa neustále obohacuje novými poznatkami, ale už na získané znalosti sa dívame ako konečné a nemenné. Chyby v tomto systéme nemôžu byť dovolené. V novovekom, predovšetkým prírodnými vedami poznamenanom chápaní zdá sa veda skôr ako dynamický systém. Hypotézy a teórie nie sú konečné, môžu a musia sa podľa okolností meniť, predovšetkým keď neobstoja pri experimentálnom preverení. Chyby sa pritom do istej miery pripúšťajú. Mnohokrát si uvedomujeme, že použitá hypotéza alebo teória platí len približne.

Je dôležité si uvedomiť, že už nestačí sa učiť z chýb minulosti, nemôžeme si ďalej dovoliť byť múdri len zo škôd. Musíme sa učiť predvídavo. Znamená to čo najlepšie vytyšiť možné budúce chyby a poučiť sa z nich skôr, ako vzniknú. Je dôležité naučiť sa na chyby čo najrýchlejšie reagovať a čo najrýchlejšie sa z nich poučiť, to znamená zvýšiť našu flexibilitu týkajúcu sa postoja k novej situácii.

Opísaná systematická a trpezlivá reedukčná práca učiteľa so žiakmi pri naša svoje „ovocie.“ Pomaly a postupne sa mení žiakov postoj k chybe. Zmena presahuje úzky rámec matematiky a zasahuje celú kognitívnu sféru žiaka, ba dokonca ovplyvňuje aj žiakovu osobnosť. V prvej etape je žiak trochu rozpačitý, nevie, či sa tu na neho „nešije nejaká búda.“ Proces demystifikácie chyby sa niekedy predĺži i na pol roka, najmä ak naráža na predsudky rodičov. Po prvom konkrétnom úspechu, najmä ak ho učiteľ náležite emotívne zdôrazní, začne žiak s učiteľom spolupracovať. Neklamným signálom úspešného zavŕšenia tejto etapy je žiakova odvaha priznať si chybu. V písomnej práci takého žiaka sa neraz objaví veta „mám tam chybu, ale neviem kde“. Žiak, ktorý pred pol rokom veľmi starostlivo v písomke zaškrtať jeden riadok, aby nevyšla na povrch hlúposť, ktorú napísal, ten žiak sa ku chybe hlási. Dokonca sa obracia na učiteľa, aby mu ukrytú chybu pomohol nájsť. To je učiteľova veľká výhra v zápase s predsudkami.

V druhej etape práce s chybou si učiteľ kladie za cieľ naučiť žiaka poznávať vlastné myšlienkové pochody, odhaľovať v nich príčiny prípadných chýb najmä takých, ktoré sa objavujú systematicky, hľadať cesty ako sa chýb nedopúšťať. Účinné býva priznanie učiteľa: „aj ja som túto chybu robil, ale potom som skúsil ...“. Signálom úspešného zavŕšenia tejto etapy sú debaty, ktoré o vlastných chybách medzi sebou vedú žiaci. V tretej etape dochádza k presunu kompetencií. Vedúcu úlohu i hlavnú zodpovednosť v záporení s chybou mal doteraz učiteľ. Teraz si ju berie na seba žiak. Už vie, ako s chybou zápasíť a má radosť z toho, že ho chyba nemôže zdeptať. Snaží sa túto stratégiu prenášať aj na iné svoje činnosti – školské i mimoškolské. Ak je žiak komunikačne dobre disponovaný, snaží sa svoju novú schopnosť núkať súrodencom a kamarátom.

Sme presvedčení o tom, že prekonanie predsudkov v oblasti žiackych chýb môže významne posunúť kvalitu práce našich škôl. K tomu môžu a mali by prispieť všetky predmety, ale veľa možností má vyučovací predmet matematika, lebo svojou exaktnosťou a abstraktnosťou dáva možnosti na výskyt chýb.

Analýza výskytu typických chýb žiakov 2. stupňa ZŠ v matematickej činnosti a príčiny ich výskytu súvisia s:

- prechodom žiakov z 1. na 2. stupeň ZŠ, ktorý sa skúma ako špecifický fenomén v teórii vyučovania matematiky,
- učivom matematiky a jej abstraktnosťou, pričom sa skúma obsah, rozsah a ciele učiva,
- motiváciou matematickej činnosti, v ktorej absentuje motivácia historickými poznámkami, ale aj iné faktory motivácie,
- osobnosťou učiteľa matematiky, ktorý často nerešpektuje didaktické princípy vo vyučovaní a podlieha formalizmu vo svojej práci vyžadujúc len jeden postup riešenia matematickej úlohy,
- osobnosťou žiaka (klesá záujem o matematiku ako vyučovací predmet, najmä vo vyšších ročníkoch ZŠ, prevláda nedostatočná domáca príprava žiakov, narastá záporný postoj k matematike, typická je klesajúca úroveň zručností, takzvanej rutiny v osvojení a aplikácii matematického aparátu, závažná je nízka miera flexibility v riešení matematických úloh, vedomostí žiakov sú neuvedomené, teda formálne, žiaci mnohokrát nevedia komentovať postup riešenia matematickej úlohy),
- aplikáciou vyučovacích metód, pri ktorej prevládajú klasické modely vyučovania v piatich fázach – motivácia expozícia, fixácia, aplikácia

- a klasifikácia, bez použitia experimentov, heuristickej besedy, riešenia problémov a diskusie o nich,
- koncepciou vyučovania, kde dominuje koncepcia dogmatická a zabúda sa na diferencované, skupinové, alternatívne, rozvíjajúce, problémové, či humanistické vyučovanie spojené s aktivizáciou žiakov a rozvíjaním ich kreativity,
  - aplikáciou didaktických princípov, pričom rezervu vidíme v používaní princípu výchovnosti, systematickosti, názornosti, dôkladnosti, individuálneho prístupu, uvedomenosti, aktivity a trvalosti,
  - nedostatočným využívaním didaktických prostriedkov, učebných pomôcok a matematických násteniek, či všetkých foriem matematických súťaží, nielen MO,
  - aplikáciou diktátov vo vyučovaní matematiky, čo značne zvyšuje mieru matematických zručností žiakov.

Chceme akcentovať, že v matematicko-pedagogickom procese existujú dve kategórie tzv. typických chýb:

1. typické chyby žiakov v matematickej činnosti,
2. typické chyby žiakov vo formulovaní matematických definícií a viet.

Tento jav je potrebné špecifikovať, skúmať jeho príčiny a prispievať k redukcii chýb každodenným bojom s formalizmom v práci žiakov aj učiteľov na každom type aj stupni školy.

## Literatúra

- [1] *Fisher, R.*: Človek a matematika. Bratislava: SPN, 1992. 336s. ISBN 80-08-0139-5.
- [2] *Gábor, O. a kol.*: Teória vyučovania matematiky. Bratislava: SPN, 1989. 328s. ISBN: 80-08-00285-9.
- [3] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky 2. Bratislava: SPN, 1989. 560s. ISBN 80-08-00014-7.
- [4] *Hejný, M. – Michalcová, A.*: Skúmanie matematického riešiteľného postupu. Bratislava: Metodické centrum, 2001. 188 s. ISBN 80-8052-085-2.
- [5] *Strečko, V.*: Výber z didaktiky matematiky. Prešov: Náuka, 2004. 65s. ISBN 80-89038-27-1.

# Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 3. 2009 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v  $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

## Úloha 155

Mařenka se podívala na Pepovy známky z matematiky. Zjistila, že kdyby se mu nezapočítaly dvě nejlepší známky, zhoršil by jeho průměr známek o 0,5. Aby se mu průměr naopak zlepšil o 0,5, nesměla by mu započíst osm nejhorších známek. Jaký by měl Pepa průměr známek, kdyby mu nezapočítala jednu nejlepší a tři nejhorší známky?

*Radek Horenský*

## Úloha 156

Do transportního kontejneru ve tvaru kváдру, jehož dno má rozměry  $9 \times 9$  a který má výšku 8 (všechny údaje jsou v dm), je třeba naskládat kazety několika typů:  $A$  – dno  $2 \times 3$ , výška 1, cena 700 Kč/ks,  $B$  – dno  $2 \times 4$ , výška 1, cena 1000 Kč/ks,  $C$  – dno  $3 \times 3$ , výška 1, cena 1100 Kč/ks,  $S$  – dno  $1 \times 1$ , výška 2, cena 200 Kč/ks. Prázdný prostor lze vyplnit reklamními kazetami, kostkami  $R$  o rozměrech  $1 \times 1 \times 1$ , cena 50 Kč/ks. Z kazet  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (po jedné od každého z těchto tří druhů) lze navíc po doručení kontejneru do prodejny sestavit dárkový komplet  $K$  v ceně 2990 Kč. Kzety mají být v bedně uloženy tak, aby:

- od každého z druhů  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $S$ ,  $R$  byl poslán alespoň jeden kus,
- všechny kazety byly do kontejneru uloženy dnem dolů,
- při prodeji obsahu kontejneru se dosáhlo co největší tržby.

Nakreslete plán uložení kazet do jednotlivých vrstev, uveďte výslednou tržbu a dokažte, že je nejvyšší možná.

*Stanislav Trávníček*

Dále uvádíme bilanci za uplynulý (15.) ročník této rubriky, který je zároveň pátým ročníkem dalšího cyklu dlouhodobé soutěže. Redakce ob-

držela celkem 95 úplných nebo částečných řešení od 36 jednotlivců (alespoň jednu vyřešenou úlohu druhého cyklu přitom zaslalo 108 řešitelů). Za každou úplně vyřešenou úlohu řešitel obdržel 6 bodů, za částečně vyřešenou 3 body;  $k$ -násobným laureátem této rubriky se stane řešitel, který získá od 11. ročníku alespoň  $k$ -násobek čísla 93 (rubrika byla založena v roce 1993).

Pořadí řešitelů po pátém ročníku druhého cyklu dlouhodobé soutěže:

1. *Anton Hnáth* z Moravan (219 b.), 2. *Miroslav Hübsch* z Prahy 5 (156 b.),
3. *Vladimír Pavel* z Blovic (141 b.), 4. *Karol Gajdoš* z Trnavy (129 b.),
5. *Jozef Mészáros* z Jelky (120 b.) 6. *Jaroslav Hančl* z GMK v Bílovci (102 b.),
7. *Miroslav Klímoš* z GMK v Bílovci, *Marek Pechal* z G Zlín, Lesní čtvrť a *Jan Uhlík* z G Brno, tř. Kpt. Jaroše, (všichni 78 b.).

*Pavel Calábek*

---

## Zajímá Vás historie matematiky a vědy?

### Nakladatelství MATH Publishing nabízí knihy:

- **Cesta k integrálu** (překlad z ruštiny, autor V. A. Nikiforovskij) – historie určitého integrálu od Archiméda k Riemannovi. Kniha zachycuje 2000 let vývoje pojmu určitého integrálu na životě a díle matematiků. Podobná kniha takového rozsahu v češtině dosud nevyšla (více viz MFI roč. 17, č. 2, s. 126).
- **Historie analýzy** (editor Hans Niels Jahnke, originál vydalo v němčině nakladatelství Spektrum Akademischer Verlag a v USA American Mathematical Society) – historie matematické analýzy od antiky do 20. století (více viz MFI roč. 17, č. 10, s. 630).
- **Eukleides: Základy** – druhá nejvýznamnější kniha po bibli, podle které se učí a studuje geometrie od dob antiky; česky jen jednou v roce 1907.

Nabízíme další knihy s podobnou tematikou.

Navštivte naše webovské stránky:

<http://www.mathpublishing.eu/index.htm>

Kontakt: 605 848 934