

MATEMATIKA

Od krácení zlomků k řetězovým zlomkům

JIŘÍ WIDŽ

Gymnázium Sokolov

Úvod

V tomto článku si připomeneme krácení zlomků a přes Euklidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel se dostaneme k řetězovým zlomkům. Řetězové zlomky představují velice zajímavou oblast matematiky, která se však v současném učivu matematiky základní a střední školy téměř nevyskytuje. Na základní škole se objevuje jen několik málo příkladů na úpravu složeného zlomku, který má podobu řetězového zlomku. Středoškolská matematika je na tom podobně. Řetězové zlomky se zde objevují jen zřídka, a pokud se objeví, tak je to v učivu o složených zlomcích nebo při úpravách lomených výrazů.

1. Krácení zlomků a Eukleidův algoritmus

Racionálním číslem rozumíme každé reálné číslo, které lze zapsat ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Takový zlomek však není jediný, neboť ho lze vždy upravit. Úpravě zlomku

$$\frac{p}{q} = \frac{k \cdot p}{k \cdot q},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, říkáme *rozšiřování zlomku* celým nenulovým číslem k . Obrácené úpravě říkáme *krácení zlomku* celým nenulovým číslem k , tj.

$$\frac{p}{q} = \frac{k \cdot p}{k \cdot q},$$

kde $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Mezi všemi zlomky, jimiž lze zapsat určité racionální číslo, existuje právě jeden zlomek, jehož čítec je nesoudělný s jmenovatelem, tedy jejich největší společný dělitel je roven 1, tj. $(p, q) = 1$. Mluvíme pak o tom, že racionální číslo je zapsáno v *základním tvaru*. Jak převedeme zlomek do základního tvaru? Jedná se samozřejmě o úlohu nalezení největšího společného dělitele čítec a jmenovatele daného zlomku. Existuje několik postupů, jak tento největší společný dělitel dvou čísel najít. Uvedeme si dva postupy, se kterými se žáci seznamují na základní, resp. na střední škole. Nejdříve si ale musíme připomenout některé základní pojmy z teorie čísel.

O nenulovém celém čísle a říkáme, že dělí celé číslo b (neboli celé číslo b je dělitelné celým číslem a , nebo též celé číslo b je násobkem celého čísla a) právě tehdy, když existuje nenulové celé číslo c takové, že platí $a \cdot c = b$ (zapisujeme $a|b$).

Pro celá čísla a, b platí následující věta:

Věta 1 (věta o dělení se zbytkem)

Pro každé celé číslo a , a libovolné číslo b , $b \neq 0$, existují jednoznačně určená celá čísla q, r taková, že $a = b \cdot q + r$, $0 \leq r < b$. Číslo q se nazývá neúplný (částecný) podíl a číslo r zbytek při dělení čísla a číslem b .

Poznamenejme, že je dobré si uvědomit, že např. pro čísla $a = -7$, $b = 4$ dostáváme $-7 = (-2) \cdot 4 + 1$ a zbytek při dělení čísla -7 číslem 4 je číslo 1 (a ne -1).

Jestliže máme dvě nenulová celá čísla a, b , pak libovolné nenulové celé číslo m takové, že $m|a$ a $m|b$, se nazývá *společný dělitel* čísel a a b . Společný dělitel m , $m > 0$, nenulových celých čísel a, b , který je dělitelný libovolným společným dělitelem čísel a, b , se nazývá *největší společný dělitel* čísel a, b a značí se (a, b) .

Poznámka. Největší společný dělitel (a, b) přirozených čísel a, b je vždy kladný a je také vždy větší než libovolný jiný společný dělitel těchto čísel. V případě, že bychom připustili, že jedno z čísel a, b bude rovno nule, pak bude největší společný dělitel těchto čísel roven druhému, nenulovému, číslu. V případě, že číslo a dělí číslo b , pak největší společný dělitel těchto čísel je roven číslu a .

Věta 2 (základní věta aritmetiky)

Každé nenulové celé číslo a ($a \neq \pm 1$) lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$a = \pm 2^{u_2} \cdot 3^{u_3} \cdot 5^{u_5} \cdot 7^{u_7} \cdot 11^{u_{11}} \cdot \dots = \pm \prod_{p-\text{prvo}\check{\text{c}}\text{íslo}} p^{u_p},$$

kde exponenty $u_2, u_3, u_5, \dots$ jsou celá nezáporná čísla, z nichž konečný počet je různý od nuly. Tomuto zápisu říkáme kanonický rozklad čísla na součin prvočísel.

Z kanonického zápisu čísla na součin prvočísel vyplývá jeden ze způsobů, jak určit největší společný dělitel dvou celých čísel:

Věta 3

Jestliže $a = \pm \prod_{p-\text{prvo}\check{\text{c}}\text{íslo}} p^{u_p}$ a $b = \pm \prod_{p-\text{prvo}\check{\text{c}}\text{íslo}} p^{v_p}$, potom platí

$$(a, b) = \prod_{p-\text{prvo}\check{\text{c}}\text{íslo}} p^{\min(u_p, v_p)}.$$

Slovy vyjádřeno: největší společný dělitel (a, b) má ve svém prvočíselném rozkladu všechny společné prvočinitele rozkladů čísel a, b s nejmenším mocnitelem, který se v těchto rozkladech vyskytuje.

Větu 3 využijeme při řešení následujícího příkladu.

Příklad 1

Zapište zlomek $\frac{31\,668}{44\,370}$ v základním tvaru.

Řešení. Označme $a = 31\,668$ a $b = 44\,370$. Podle věty 2 platí:

$$a = 31\,668 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29 \text{ a } b = 44\,370 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 29.$$

Dále podle věty 3 dostaneme $(31\,668, 44\,370) = 2 \cdot 3 \cdot 29 = 174$.

Vrátíme-li se k zadání příkladu, tedy k převodu zlomku na základní tvar, dostáváme:

$$\frac{31\,668}{44\,370} = \frac{174 \cdot 182}{174 \cdot 255} = \frac{182}{255}.$$

Vzhledem k tomu, že platí $(c \cdot a, c \cdot b) = c \cdot (a, b)$, $c \neq 0$, můžeme největší společný dělitel čísel z příkladu 1 najít také takto:

$$\begin{aligned} (31\,668, 44\,370) &= 2 \cdot (15\,834, 22\,185) = 2 \cdot 3 \cdot (5\,278, 7\,395) = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 29 \cdot (185, 255) = 174 \cdot (185, 255) \end{aligned}$$

Protože čísla 182 a 255 jsou čísla nesoudělná, tj. $(182, 255) = 1$, je největší společný dělitel čísel 31 668 a 44 370 roven číslu 174, tj. platí $(31\,668, 44\,370) = 174 \cdot (182, 255) = 174 \cdot 1 = 174$.

Výpočet největšího společného dělitele dvou celých čísel pomocí výše uvedených způsobů je především u velkých čísel poměrně zdoluhavý a časově náročný. Používá se proto jen pro čísla s malou absolutní hodnotou nebo v případech, že víme, že některé z daných čísel je prvočíslo. Mnohem výhodnější je výpočet největšího společného dělitele dvou čísel pomocí *Eukleidova algoritmu*^{*)}, který je jedním z nejstarších a nejdůležitějších algoritmů teorie čísel.

Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou celých čísel najdeme v VII. knize *Základů* (str. 104, [4]):

*Jsou-li dána dvě čísla nestejná a odčítá-li se střídavě vždy menší od většího, když zbývající předcházejícího nikdy nedoměruje, dokud nezůstane jednotka, počáteční čísla budou navzájem kmenná.**)*

Příklad 2

Určete největší společný dělitel čísel 31 668 a 44 370.

Řešení:

Použijeme-li výše uvedený postup, tj. budeme od většího čísla odečítat číslo menší, dostaneme tento výsledek:

$$\begin{aligned} 44\,370 - 31\,668 &= 12\,702, \\ 31\,668 - 12\,702 &= 18\,966, \\ 18\,966 - 12\,702 &= 6\,264, \\ 12\,702 - 6\,264 &= 6\,438, \\ 6\,438 - 6\,264 &= 174, \\ 6\,264 - 174 &= 6\,092, \\ &\vdots \\ 348 - 174 &= 174, \\ 174 - 174 &= 0. \end{aligned}$$

^{*)} **Eukleidés z Alexandrie** (asi 340 – asi 278 př. n. l.) – řecký matematik, který kolem roku 300 př. n. l. shrnul většinu tehdejších matematických znalostí v knize *Základy* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*).

^{**) V [4] čísla kmenná představují čísla nesoudělná.}

Největším společným dělitelem číslem 31 668 a 44 370 je číslo 174.

Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel a, b je často používán ve tvaru postupného dělení.

Věta 4 (Eukleidův algoritmus)

Nechť a, b jsou přirozená čísla, $a \geq b$. Položme $r_0 = a$ a $r_1 = b$. Označme r_k , zbytek po dělení čísla r_{k+1} číslem r_{k+2} , tj. $r_k = r_{k+1} \cdot q_k + r_{k+2}$, $0 \leq r_{k+1} \leq r_k$ a $q_k \in \mathbb{N}$, pro $k = 0, 1, 2, \dots$. Po konečném počtu kroků dostaneme $r_{k+2} = 0$, tj. $r_k = r_{k+1} \cdot q_k$, a platí, že $r_{k+1} = (a, b)$. Číslům $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ říkáme neúplné podíly (viz věta 1).

Pokud bychom provedli důkaz této věty, dostali bychom postup, jak najít největší společný dělitel dvou přirozených čísel:

$$\begin{aligned} r_0 &= r_1 \cdot q_0 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 \cdot q_1 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2, \\ r_2 &= r_3 \cdot q_2 + r_4, & 0 \leq r_4 < r_3, \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= r_{k-1} \cdot q_{k-2} + r_k, & 0 \leq r_k < r_{k-1}, \\ r_{k-1} &= r_k \cdot q_{k-1} + r_{k+1}, & 0 \leq r_{k+1} < r_k, \\ r_k &= r_{k+1} \cdot q_k. \end{aligned}$$

Poznámka. Pomocí Eukleidova algoritmu najdeme největší společný dělitel dvou přirozených čísel. Algoritmus můžeme ale také použít pro nalezení největšího společného dělitele dvou nenulových celých čísel a, b . Protože pro dvě celá čísla a, b , z nichž aspoň jedno je různé od 0, platí $(a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b)$, stačí vzít v případě, že by některé z těchto čísel bylo záporné, pro výpočet největšího společného dělitele absolutní hodnotu tohoto čísla.

Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel nyní využijeme při krácení zlomku, který má v čitateli i jmenovateli velká čísla. Naším úkolem bude převést zlomek $\frac{9\,346\,260}{3\,382\,456}$ na zlomek v základním tvaru.

Příklad 3

Zapište zlomek $\frac{9\,346\,260}{3\,382\,456}$ v základním tvaru.

Řešení:

Nejprve najdeme největší společný dělitel čitatele a jmenovatele tohoto zlomku

$$9\,346\,260 = 3\,382\,456 \cdot 2 + 2\,581\,348,$$

$$3\,382\,456 = 2\,581\,348 \cdot 1 + 801\,108,$$

$$2\,581\,348 = 801\,108 \cdot 3 + 178\,024,$$

$$801\,108 = 178\,024 \cdot 4 + 89\,012,$$

$$178\,024 = 89\,012 \cdot 2 + 0.$$

Dostáváme $(9\,346\,260, 3\,382\,456)$, tj. platí $\frac{9\,346\,260}{3\,382\,456} = \frac{89\,012 \cdot 105}{89\,012 \cdot 38} = \frac{105}{38}$.

2. Řetězové zlomky

Eukleidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel má úzkou souvislost s převodem racionálního čísla na *řetězový zlomek*.

Řetězový zlomek si přiblížíme pomocí následujícího příkladu:

Mějme číslo $\frac{105}{38}$, které můžeme napsat takto:

$$\frac{105}{38} = 2 + \frac{29}{38} = 2 + \frac{1}{\frac{38}{29}}$$

Číslo $\frac{38}{29}$ zapíšeme v následujícím tvaru:

$$\frac{38}{29} = 1 + \frac{9}{29} = 1 + \frac{1}{\frac{29}{9}}$$

Pokračujeme v tomto postupu dále a dostaneme:

$$\frac{29}{9} = 3 + \frac{2}{9} = 3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}$$

Poslední úprava:

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

Pokud nyní s využitím předchozích výpočtů „složíme“ zlomek $\frac{105}{38}$, dostaneme:

$$\frac{105}{38} = 2 + \frac{1}{\frac{38}{29}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{9}{29}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{29}{9}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}}}$$

Zlomek

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$$

je příkladem *jednoduchého řetězového zlomku*.

Jak spočítáme hodnotu řetězového zlomku? Hodnotu, tj. racionální číslo, které odpovídá danému řetězovému zlomku, můžeme spočítat stejně, jako bychom počítali hodnotu složeného zlomku.

Například:

$$\begin{aligned} 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} &= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{3}}} = \\ &= 3 + \frac{1}{2 + \frac{3}{5}} = 3 + \frac{1}{\frac{13}{5}} = 3 + \frac{5}{13} = \frac{44}{13} \end{aligned}$$

Při vyjádření racionálního čísla $\frac{105}{38}$ složeným zlomkem jsme se dostali k řetězovému zlomku. Uvedme si proto jeho definici.

Definice 1

Jednoduchým konečným řetězovým zlomkem nazýváme zlomek typu

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_n}}}, \quad (1)$$

kde $q_0 \in \mathbb{Z}$; $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$ a zapisujeme ho ve tvaru $\alpha = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_n]$.

Například:

$$\frac{105}{38} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}} = [2; 1; 3; 4; 2]$$

Existují také i jednoduché nekonečné řetězové zlomky:

Definice 2

Jednoduchým nekonečným řetězovým zlomkem nazýváme zlomek typu

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}, \quad (2)$$

kde $q_0 \in \mathbb{Z}$; $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{N}$ a zapisujeme ho ve tvaru $\alpha = [q_0, q_1, q_2, \dots]$.

Příkladem nekonečného jednoduchého řetězového zlomku je zajímavý zlomek

$$[1; 1, 1, 1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Tento řetězový zlomek je roven číslu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, které je známo jako *zlatý řez* (více viz [5]).

Množina všech reálných čísel je tvořena čísly racionálními a iracionálními. Následující věta nám říká, že každému reálnému číslu odpovídá jistý řetězový zlomek.

Věta 5

Každému reálnému číslu α odpovídá právě jeden jednoduchý řetězový zlomek, který má za hodnotu toto číslo. Tento řetězový zlomek je konečný, je-li číslo α racionální; nekonečný, je-li číslo iracionální.

Vraťme se ještě k číslům $q_0, q_1, \dots$, z (1), popř. (2). Tato čísla jsou *neúplnými podíly* podle věty 4 (Eukleidův algoritmus).

Závěr

Na závěr tohoto článku se ještě krátce pozastavíme u tzv. *sblížených zlomků*. Tyto zlomky jsou pro teorii řetězových zlomků klíčovým pojmem.

Definice 3

Sblížené zlomky pro řetězový zlomek (1), resp. (2), jsou zlomky tvaru: $\frac{P_k}{Q_k}$, ($0 \leq k \leq n$) a platí pro ně

$$\frac{P_0}{Q_0} = q_0; \quad \frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1}; \quad \frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}; \quad \frac{P_3}{Q_3} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}}; \quad \text{atd.}$$

Pro čitatele a jmenovatele sblížených zlomků platí rekurentní vztahy

$$\begin{aligned} P_k &= q_k \cdot P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k &= q_k \cdot Q_{k-1} + Q_{k-2}, \end{aligned}$$

pro $k \geq 2$, s počátečními podmínkami $P_0 = q_0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = q_0 \cdot q_1 + 1$, $Q_1 = q_1$.

Příklad 4

Pojem sblížených zlomků si objasníme na zlomku $\frac{9\ 346\ 260}{3\ 382\ 456}$ z příkladu 3.

Řešení:

Neúplné podíly, které jsme získali v příkladu 3 použitím Eukleidova algoritmu, jsou $q_0 = 2$, $q_1 = 1$, $q_2 = 3$, $q_3 = 4$, $q_4 = 2$.

Podle definice 3 sestavíme tabulku sblížených zlomků pro řetězový zlomek $[2; 1, 3, 4, 2]$.

k	0	1	2	3	4
q_k	2	1	3	4	2
P_k	2	3	11	47	105
Q_k	1	1	4	17	38

Z výše uvedené tabulky můžeme vypočítat všechny sblížené zlomky pro daný řetězový zlomek:

$$\frac{P_0}{Q_0} = 2; \quad \frac{P_1}{Q_1} = 3; \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{11}{4}; \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{47}{11}; \quad \frac{P_4}{Q_4} = \frac{105}{38}.$$

Zajímavé je, že poslední sblížený zlomek, tj. zlomek $\frac{P_4}{Q_4}$, je roven zlomku $\frac{105}{38}$, který představuje základní tvar zlomku $\frac{9\ 346\ 260}{3\ 382\ 456}$. Pokud bychom chtěli zapsat zlomek $\frac{9\ 346\ 260}{3\ 382\ 456}$ ve tvaru řetězového zlomku, dostaneme stejné vyjádření jako pro zlomek $\frac{105}{38}$.

Sblížené zlomky řetězového zlomku mají celou řadu zajímavých vlastností, ale ty již nejsou obsahem tohoto článku.

„Řetězové zlomky jsou částí ‚ztracené matematiky‘, té matematiky, která je nyní považována za příliš obtížnou pro střední školy a příliš jednoduchou pro školy vysoké.“ ([1], str. 108)

Literatura

- [1] Beckmann, P.: Historie čísla π , Academia, Praha 1998.
- [2] Chinčín, A. J.: Řetězové zlomky, Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1952.
- [3] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, 8. vyd., Praha 2005.
- [4] Servít, F.: Eukleidovy Základy (Elementa), Jednota českých matematiků, Praha 1907.
- [5] Veselý, J.: Zlatý řez a co vše s ním souvisí, in Učitel matematiky, č. 3, roč. 6, JČMF, Praha 1998.

Prehľad niektorých typických chýb a nedostatkov žiakov 2. stupňa ZŠ v matematickej činnosti

VLADIMÍR STREČKO

Prešovská univerzita v Prešove, SLOVENSKO

Príspevok prináša prehľad niektorých typických chýb žiakov 2. stupňa ZŠ v matematickej činnosti. V závere článku sú uvedené výsledky analýzy písomných prác z matematiky realizovaných vo všetkých ročníkoch 2. stupňa ZŠ. Príspevok je určený najmä začínajúcim učiteľom matematiky.

Prieskum typických chýb žiakov 2. stupňa na ZŠ v matematickej činnosti sme uskutočnili v roku 2007 prostredníctvom testu pre žiakov a následnom spracovaní a vyhodnotení získaných údajov. Vzorku prieskumu tvorilo 455 žiakov zo škôl: ZŠ Mirka Nešpora v Prešove, ZŠ sv. Mikuláša v Prešove a ZŠ Kapušany. Skúmania sa zúčastnili žiaci 5. – 9. ročníka. Z toho počtu 81 žiakov 5. ročníka, 99 žiakov 6. ročníka, 86 žiakov 7. ročníka, 95 žiakov 8. ročníka a 94 žiakov 9. ročníka. Jednotlivé testy boli zvolené pre každý z daných ročníkov. Pre objektívnejšie výsledky sme v testoch zvolili skupinu A a skupinu B, ktoré sa od seba líšili minimálne. Test obsahoval tri príklady z oblasti algebry a teórie čísel, ktoré boli ľahšieho charakteru, zamerané na potvrdenie typických chýb žiakov.

Podmienkou úspešného riešenia každej matematickej úlohy je skutočnosť, aby žiak mal osvojené nevyhnutné základné poznatky z matematiky, t.j. matematický aparát. Žiak sa v matematickej činnosti obvyčajne dopúšťa piatich typov chýb odhliadnuc od chýb z nepozornosti. Jedná sa o tieto chýb:

1. žiak nepochopí zadanie matematickej úlohy, t.j. nevie vykonať jej analýzu, čiže nie je schopný voľne reprodukovať zadanie úlohy,
2. žiak si neuvedomuje podstatu úlohy, nevie na základe akých veličín a postupov sa má dopracovať k výsledku, tiež vynecháva určitú dôležitú informáciu formulovanú v úlohe,

3. žiak nevie nájsť myšlienku riešenia úlohy a zvolí na jej riešenie iný – nesprávny postup,
4. nesprávne uskutočnenie plánu riešenia, pričom žiak urobí chybu v numerických výpočtoch, porušuje platnosť matematických viet a nesprávne dosadzuje,
5. žiak neskontroluje výsledok riešenia úlohy ako aj každý svoj krok v postupe riešenia, nie je schopný komentovať a sformulovať svoj myšlienkový postup a odôvodniť svoje tvrdenia, t.j. typická je neschopnosť žiaka odpovedať na otázku „prečo?“.

Odstraňovanie typických chýb žiakov spočíva v prevencii, dôkladnom zvládnutí matematického aparátu žiakmi, v uvádzaní kontrapríkladov a experimentov vo vyučovaní matematiky učiteľmi a žiakmi. To, čo žiak v škole pochopí, musí sa doma naučiť a mnohé poznatky aj nacvičiť, aby nadobudol istú zručnosť v počítaní. Ovládať umenie matematizovať reálne situácie je proces pomalý, no osvojiteľný. Logické a matematické myslenie ako aj zvládnutie matematických metód sa odvíja o.i. aj od primárnej (vnútornej) motivácie žiakov, ale aj od trpezlivého a taktného prístupu učiteľa matematiky k žiakom, čo v praxi často chýba.

Niektoré typické chyby žiakov 2. stupňa ZŠ v matematickej činnosti uvádzame prehľadne vo vybraných tematických celkoch prostredníctvom postrehov, resp. konštatovaní z pozorovania matematicko-pedagogického procesu. Typické chyby žiakov 5. ročníka ZŠ sa prejavujú v tematickom celku *Opakovanie a prehĺbenie učiva matematiky z 1. – 4. ročníka ZŠ* v týchto smeroch:

Nesprávny prístup k porovnávaní prirodzených čísel. Napr. $\bigcirc \bigcirc \bigcirc > > \bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc$ ($3 > 4$). Prejavuje sa tu nesprávny transfer z reálneho života vzniknutý chybným prístupom k porovnávaní.

Zaokrúhľovanie postupne po jednotlivých rádoch. Napr. číslo 24 458 je treba zaokrúhliť na tisícky. Nesprávny postup spočíva v postupnom zaokrúhľovaní. $24\,458 \doteq 24\,460$, $24\,460 \doteq 24\,500$, $24\,500 \doteq 25\,000$ – dostávame chybný výsledok.

Zafixovanie si niektorých spojov sčítania chybne. Napr. $9 + 9 = 17$, $7 + 6 = 14$.

Nesprávny zápis sčítancov pod seba, nepochopenie číselnej sústavy.

Odčítanie čísel rôznych rádov, odčítanie dvojčíferných čísel s prechodom cez desiatku.

Nepochopenie podstaty násobenia, nezvládnutie zápisu písomného násobenia, chýbajú znalosti malej násobilky. Nepochopenie podstaty delenia.

Problém s číslami, v ktorých sa na niektorých rádoch vyskytujú nuly. Napr. $301 \cdot 6$ násobí ako $31 \cdot 6$ – chybne. Možnosť nápravy spočíva v pestovaní odhadu, určení približného výsledku.

Problém so slovnými úlohami s viacerými operáciami.

Nepresnosť rysovania. Žiak často narysuje kružnicu a až potom náhodne určí stred danej kružnice.

V tematickom celku *Desatinné čísla, operácie s desatinnými číslami* sa prejavujú typické chyby najmä:

Nesprávne podpisovanie desatinných čísel pri sčítaní a odčítaní.

Problém s číslami, v ktorých sa vyskytuje 0. Žiaci si často zjednodušia úlohu ako napr. číslo 3 216,07 je to isté ako číslo 3 216,7 – chybne; $0,2 \cdot 0,3 = 0,6$ – chybne.

Násobenie a delenie čísel desiatimi, stomi, tisícami v súvislosti so zväčšovaním a zmenšovaním. Tu je pre žiakov veľmi dôležitý tréning odhadu výsledku.

Neuvedomenie si, že ak násobíme číslom väčším ako 1, výsledok sa zväčšuje, ak násobíme menším ako 1, výsledok sa zmenšuje.

Učivo 6. ročníka môžeme prezentovať výskytom týchto typických chýb. V tematickom celku *Celé čísla, operácie s celými číslami* možno spomenúť tieto chyby:

Slabá orientácia na číselnej osi. Je dobré učiť žiakov, aby pracovali s obrázkom – náznakom na číselnej osi.

Typický príklad, ktorý spôsobuje žiakom terminologické problémy: „Určite nadmorskú výšku od hladiny svetového oceánu: najvyššie položené miesto na Zemi má výšku 8 848 m nad jeho hladinou, najnižšie 11 034 m pod jeho hladinou. Zapíš obidva údaje pomocou kladných a záporných čísel.“ V bežnej komunikácii hovoríme o hĺbke a používame pritom kladné čísla.

Problém so sčítaním a odčítaním kladného a záporného čísla, resp. oboch záporných čísel. Neuvedomenie si, že súčet dvoch navzájom opačných čísel sa rovná nule.

Zabúdanie na znamienkové pravidlá, najmä pri súčine dvoch záporných čísel.

Žiakom niekedy uniká fakt, že nulou nedelíme.

Úloha typu: „V izbe je $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, vonku je $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Aký je rozdiel teplôt?“ Túto úlohu žiaci často riešia výpočtom: $20\text{ }^{\circ}\text{C} - 10\text{ }^{\circ}\text{C} = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$, čo je nesprávne.

Tematický celok *Rovnobežnosť. Rovnobežník, lichobežník* sa vyznačuje týmito chybami:

Povrchné osvojenie si vlastností uhlov – súhlasné, vrcholové, susedné a striedavé. Nedostatočné osvojenie si vlastností rovnobežníka.

Problém s popisáním konštrukcie práce, mýlenie si geometrických symbolov. Možno vhodnou cestou je nechať žiakov napísať postup konštrukcie slovami, aby bolo jasné, v čom má daný žiak problém. Žiak nerozumie samotnej podstate konštrukčnej úlohy.

Nesprávne použitie vzorca a pri riešení úloh na výpočet obsahov a obvodov útvarov.

Úloha typu: „Zostroj lichobežník, ktorý má strany dlhé 6 cm, 5 cm, 4 cm, 3 cm.“ Podstata konštrukcie je v tom, že lichobežník rozdelíme na rovnobežník a trojuholník. Pre žiakov je objavenie a pochopenie tejto myšlienky pomerne náročné.

Problém s riešením zložitejších slovných úloh na výpočet obsahov a obvodov, kde je potrebná predstavivosť žiakov.

V učive 7. ročníka uvedieme nasledujúce tematické celky s prehľadom chýb žiakov. V tematickom celku *Racionálne čísla, operácie s racionálnymi číslami* možno konštatovať tieto chyby:

Časté numerické chyby pri sčítavaní a odčítavaní zlomkov. Žiaci pri sčítavaní zlomkov sčítavajú čitateľa s čitateľmi a menovateľa s menovateľmi, čo je nesprávne.

Problém určovania spoločného menovateľa pri sčítavaní a odčítavaní zlomkov.

Časté chyby v znamienkach. Je dôležité učiť žiakov pred samotným počítaním určiť znamienko výsledku (ak je počet záporných činiteľov nepárne číslo, výsledok bude záporný) a vyznačiť si ju napísaním znamienka pred budúci výsledok.

Nesprávny zápis úloh. Napr. žiaci $\frac{3}{5}$ z dĺžky cesty nenapíšu ako $\frac{3}{5}x$, ak x je neznáma (cesta), ale iba ako $\frac{3}{5}$.

Tematický celok *Výraz a jeho úprava* je reprezentovaný aj takýmito chybami:

Ťažkosti s chápaním premennej, neschopnosť zapísať slovné vyjadrenia ako výrazy s premennou. Napr. číslo o 13 menšie ako číslo b.

Problém s určením jednočlena a viacčlena pri výrazoch typu: $6a$; $5k - \frac{d}{4}$; $-8,3t : 3$. Pre žiakov je vhodné zakrúžkovať jednotlivé členy výrazu a potom ich podľa počtu členov výrazu pomenovať.

Časté chyby pri sčítavaní a odčítavaní výrazov. Napr.: $4x + 4 = 8x$, $5a - 5 = a$

Numerické chyby vo výpočtoch.

Nerešpektovanie znamienkových pravidiel. Pri odčítaní výrazov platí znamienkové pravidlo, že ak je pred zátvorkou znamienko mínus, všetky znamienka v zátvorke sa menia na opačné. Žiaci zväčša zmenia prvé znamienko, druhé už nie.

Napr. $(5x + 3) - (4x + 2) = 5x + 3 - 4x + 2 = x + 5$ – chybný výsledok.

Nerešpektovanie pravidla, že násobiť, deliť výraz číslom znamená vynásobiť, vydeliť týmto číslom každý člen výrazu. Žiaci väčšinou vynásobia, vydedia len prvý člen výrazu, na ostatné členy zabúdajú. Napr. $7(x + y) - 3 = 7x + y - 3$ (chybne).

Neuvedomenie si, že tretinu z výrazu počítame ako súčin tretiny a toho výrazu.

Problém alebo časté zabúdanie vyňať najväčšieho spoločného deliteľa pred zátvorku.

Tematický celok *Lineárne rovnice* obsahuje o.i. aj takéto chyby žiakov:

Nesprávna úprava rovníc, nesprávne osamostatnenie neznámej. Žiaci často riešia na základe chybnjej úpravy. Napr.

$$\begin{aligned} 12x &= 3 \quad / : 3 \\ x &= 4 \quad (\text{chybne}). \end{aligned}$$

Časté chyby v znamienkach, chybné odstraňovanie zátvoriek, zlomkov. Napr. $\frac{2x-14}{3} - \frac{3x-1}{5} = \frac{x-2}{2}$. V tejto úlohe majú žiaci problém určiť spoločného menovateľa čísel 3, 5, 2, aby mohli odstrániť zlomok. Taktiež si neuvedomujú význam znamienka mínus pred druhým zlomkom, resp. že násobiť výraz číslom znamená vynásobiť týmto číslom každý člen výrazu.

Numerické chyby vo výpočtoch, neoverenie výsledku skúškou správnosti.

Jedným z najväčších problémov, ktorý žiakom často bráni úspešne vyriešiť slovnú úlohu, je pochopenie textu.

Ťažkosti so zápisom slovných úloh pomocou premennej. Úloha typu: „Myslím si číslo. Jeho štvornásobok zmenším o 8 a výsledok vydělím 3. Dostanem 100. Ktoré číslo si myslím?“ Žiaci majú problém matematizovať text slovnej úlohy. Je to jeden z krokov, kde žiaci pri riešení slovných úloh zlyhávajú.

Chýbajú odpovede v slovných úlohách alebo neodpovedajú na danú otázku. Problém zapísania zvyšku pri niektorých slovných úlohách.

V učive *O percentách* sa pomerne často vyskytujú tieto chyby:

Nedostatočné zručnosti pri vzájomnom vzťahu zlomok – desatinné číslo – percento.

Neuvedomenie si rozdielu medzi pojmami „zlacnením o“ a „zlacnením na“, „zdražením o“ a „zdražením na“, „o koľko percent“ a „na koľko percent“.

Chybné zápisy s percentami pomocou trojčlenky. Žiaci nie vždy pod seba píšu číselné údaje a pod seba údaje s percentami.

Neuvedomenie si, že v percentovom počte je len priama úmernosť. Žiakov veľmi často pletie priama a nepriama úmernosť.

Nedodržiavanie textu slovnej úlohy. Napr.: „Z 1 800 vyrobených žiaroviek bolo 5 % chybných. Koľko vyrobených žiaroviek bolo bezchybných.“ Častá chyba je, že žiaci počítajú počet chybných namiesto počtu bezchybných žiaroviek. Túto chybu možno pripísať nepozornému čítaniu, je častá najmä pri záporne formulovaných otázkach. Úspešnosť riešenia by bola zrejme vyššia, ak by slovo bezchybných bolo v texte podčiarknuté.

Napr.: „V kine bolo 560 ľudí. 35 % z nich malo okuliare. Z toho počtu 25 % boli ženy. Koľko mužov v kine malo okuliare?“

Úloha nie je náročná, ale žiaci sa v nej zamotajú a obvykle určia zlé číslo ako výsledok.

Dôležité je učiť ich postupne zapisovať postup riešenia a ku každému číslu napísať, čo znamená.

Žiaci si často myslia, že ak A má o 30 % viac ako B, tak B má o 30 % menej ako A.

V 8. ročníku sa typické chyby vyskytujú zvlášť v nasledovných tematických celkoch. V tematickom celku *Mocniny a odmocniny* možno badať tieto chyby:

Nesprávne osvojovanie si pravidiel pri umocnení a odmocnení čísel; ťažkosti pri sčítavaní a odčítavaní, násobení a delení mocnín, chyby v znamienkach.

Napr. $(\frac{7}{15})^2 = \frac{49}{15}$ – nesprávne, žiaci si neuvedomujú význam zátvorky a zabúdajú umocniť aj menovateľa.

Zabúdanie na fakt, že $a^0 = 1$, $a \neq 0$.

Chyby z nepozornosti. Napr. $3^3 - 5^2 = 27 - 25 = 2$. Najčastejšou chybou je $3^3 - 5^2 = 9 - 25 = -16$, teda žiaci namiesto tretej mocniny počítajú druhú.

Inou chybou je $5^2 = 10$, $\sqrt{25 - 9} = 5 - 3 = 2$, $5^3 - 5^2 = 5^{3-2} = 5$, $5^3 + 5^2 = 10^5$.

V tematickom celku *Pytagorova veta* sa stretávame s týmito chybami:

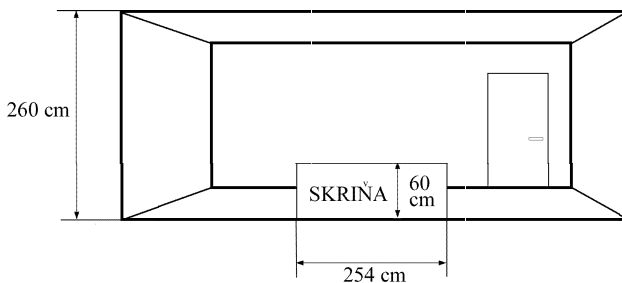
Nesprávne označenie prepony a odvesien v trojuholníku, z čoho vyplýva neadekvátne použitie Pytagorovej vety, resp. nesprávne dosadenie a vyjadrenie neznámej zo vzťahu.

Ťažkosť s použitím Pytagorovej vety, ak strany v trojuholníku sú označené ináč ako obvyklým spôsobom a , b , c .

Nedoriešenie úlohy, ponechávanie výsledku v tvare $c^2 = 49$.

Neuvedomenie si, že výška rovnostranného trojuholníka rozdeľuje trojuholník na dva zhodné pravouhlé trojuholníky.

Úloha typu: „Je izba dosť vysoká na to, aby sa dala postaviť k stene skriňa?“



Na túto otázku žiaci zvyčajne odpovedajú „áno“. Tvrdia, že ak výška izby je 260 cm a skriňa má iba 254 cm, potom sa dá skriňa postaviť. Neberú

do úvahy šírku skrine. Správne riešenie spočíva vo využití Pytagorovej vety. Po doriešení zistíme, že skriňa sa nedá postaviť, pretože uhlopriečka jej bočnej steny je väčšia ako výška izby.

Neschopnosť prísť na spôsob riešenia úloh, ktoré vyžadujú viacero krokov. Napr. zistiť dĺžku telesovej uhlopriečky kvádra, ak sú dané rozmery podstavy a jeho výška.

V tematickom celku *Úprava celistvých algebraických výrazov* možno uviesť tieto chyby:

Numerické chyby vo výpočtoch.

Chybné sčítavanie a odčítavanie výrazov. Neuvedenie si, že výrazy sčítavane, resp. odčítame tak, že sčítame, resp. odčítame koeficienty pri členoch s rovnakou premennou. Taktiež, že sčítavať a odčítavať môžeme iba tie mocniny, ktoré majú rovnaký základ a rovnaký exponent. Napr. $6x^5 - 2x^4 = 4x$ (nesprávne).

Nerešpektovanie znamienkových pravidiel, ak je pred zátvorkou znamienko mínus, všetky znamienka v zátvorke sa menia na opačné. Napr. $-(ab - 17b) - (3ab - 12) + 2b = -ab - 17b - 3ab - 12 + 2b = -4ab - 15b - 12$ (nesprávne).

Chybné násobenie, resp. delenie výrazov. Neuvedenie si, že mocniny tej istej premennej násobíme resp. delíme tak, že základ opíšeme a exponenty sčítame resp. odčítame. Napr. $x^{12}y^6 : x^3y^3 = x^4y^2$ (nesprávne). Neuvedenie si, že mnohočlen násobíme jednočlenom tak, že každý člen mnohočlena vynásobíme jednočlenom. Napr. $3x \cdot (x + y) - 5y \cdot (x - y) = 3x^2 + y - 5xy - y$ (nesprávne).

Ťažkosti s vynímaním najväčšieho deliteľa zo všetkých členov výrazu; neuvedenie si, že ak sa každý člen daného mnohočlena vydolí číslom (-1) , zmenia sa všetky znamienka mnohočlena, napr. $(x^2 - x) : (-x) = -x + 1 = 1 - x$

Nesprávne použitie vzorcov. Napr. $(\frac{1}{2}v + 3u)^2 = \frac{1}{4}v^2 + 9u^2$ (nesprávne). Pre pochopenie je dôležité odvodiť si niektoré vzorce na umocnenie súčtu, rozdielu a na rozdiel mocnín. Pri odvodzovaní možno použiť aj geometrickú interpretáciu.

Tematický celok *Riešenie lineárnych rovníc a nerovníc* prináša so sebou aj takéto chyby:

Nesprávne odstránenie zátvoriek, či zlomkov. Ak je pred zátvorkou znamienko mínus, všetky znamienka v zátvorke sa menia na opačné. Ak rov-

nicu násobíme číslom rôznym od nuly, násobíme týmto číslom každý člen rovnice, na čo žiaci zabúdajú.

Násobenie nerovnice záporným číslom bez zmeny znaku nerovnice.

Napr.

$$7x + 10 > 12x - 55,$$

$$-5x > -65,$$

$$x > 13. \quad (\text{nesprávne, lebo žiaci} \\ \text{zabudli zmeniť znak nerovnosti.})$$

Numerické chyby vo výpočtoch, neoverenie výsledku skúškou správnosti. Žiaci majú problém znázorniť si číselnú os a overiť si správnosť riešenia dosadením niekoľkých hodnôt do pôvodnej nerovnice.

Problém vyjadriť neznámu zo vzorca. Žiaci majú ťažkosti s operáciami s premennou.

Ťažkosti so zápisom slovných úloh, resp. problém zostaviť správnu rovnicu. Problém „matematizovať“ text slovnej úlohy. Užitočné je situáciu si znázorniť.

Chýbajú odpovede v slovných úlohách, často aj je, ale neodpovedá na otázku.

Značné problémy žiakom spôsobujú slovné úlohy o pohybe a o spoločnej práci.

Napokon, typické chyby žiakov v 9. ročníku prezentujeme len na tematickom celku *Úprava algebrických výrazov*. Ide o tieto chyby:

Chyby pri sčítavaní a odčítavaní výrazov. Ak je pred zátvorkou znamienko mínus, všetky znamienka v zátvorke sa zmenia na opačné.

Napr. $x^2 + 2x - (-x^2 - y) = x^2 + 2x + x^2 - y$ (nesprávne).

Chyby pri súčine mocnín tej istej premennej. Napr. $5x^2 \cdot 7x^3 = 35x^6$ (nesprávne).

Ťažkosti s úpravou výrazu na súčin; ťažkosti s nájdením najmenšieho spoločného násobku všetkých členov výrazu.

Chyby z nepozornosti. Dochádza k zámene druhej mocniny dvojčlena s druhou mocninou súčinu: $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

Chýbajú podmienky, kedy má lomený výraz s premennou v menovateli zmysel.

Žiaci krátia lomený výraz zo súčtu, resp. rozdielu skôr, než upravia čitateľa aj menovateľa na súčin.

Napr. $\frac{2x - (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)}$ alebo $\frac{2x+1}{x+1}$

Žiaci často píšu, že $x^2 + 1 = (x+1) \cdot (x-1)$ (nesprávne).

V ďalšom texte uvedieme znenie a výsledky testov realizovaných vo všetkých ročníkoch 2. stupňa ZŠ v rámci prieskumu.

(Pokračovanie)

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 149 a 150, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (17.) ročníku našeho časopisu.

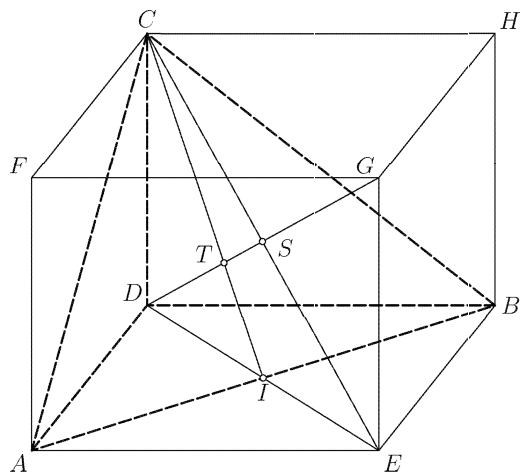
Úloha 149

Nechť $ABCD$ je čtyřstěn, jehož hrany při vrcholu D jsou navzájem kolmé. Označme S střed kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$ a T těžiště jeho stěny ABC . Dokažte, že bod T leží na přímce DS .

Erich Windischbacher (Graz)

Řešení:

Doplňme čtyřstěn $ABCD$ na kvádr $AEBDFGHC$ (viz obr.). Kulová plocha jemu opsaná má střed v průsečíku S tělesových úhlopříček GD a CE , prochází body A, B, C, D , proto je S středem kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$. Označme I průsečík stěnových úhlopříček AB a DE . Body S a I půlí úhlopříčky, na nichž leží. Dále si všimněme, že body C, D, I, E, G a S leží v jedné rovině, úsečky GD a CI jsou proto různoběžné, označme T jejich průsečík.



Úsečky CI a DS jsou těžnicemi trojúhelníku CDE , proto jeho těžiště T dělí úsečku CI v poměru 2:1. Úsečka CI je ale rovněž těžnice trojúhelníku ABC , bod T je tedy jeho těžištěm. Vidíme, že body D , T (těžiště stěny ABC čtyřstěnu $ABCD$) a S (střed kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$) leží na jedné přímce DG , což jsme chtěli dokázat.

Správné řešení zaslali *Josef Křišťan* z Plzně, *Simona Domesová* a *Lucie Mohelníková*, obě z GMK v Bílovci, *Jana Faltýnková* z CMG v Prostějově, *David Klačka* a *Hana Šormová*, oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Van Nhan Nguyen* a *Martin Výška*, oba z G v Praze 6, Nad Alejí, *Josef Ondřej* G v Rožnově p. R., *Josef Tkadlec* a *Tomáš Zeman*, oba z GJK v Praze 6.

Úloha 150

Nechť $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{R}$ značí po řadě množinu všech celých a reálných čísel. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna celá čísla x , y platí

$$f(3x - y)f(y) = 3f(x).$$

Pavel Calábek

Řešení:

Uvažujme dva případy:

a) Předpokládejme, že existuje celé číslo y_0 takové, že $f(y_0) = 0$. Dosazením y_0 za y ve daném vztahu dostáváme

$$3f(x) = f(3x - y_0)f(y_0) = f(3x - y_0) \cdot 0 = 0,$$

tedy $f(x) = 0$ pro všechna celá čísla x . Zkouškou snadno ověříme, že nulová funkce $f_0(x) = 0$ pro všechna celá čísla x je řešením dané funkcionální rovnice.

b) Funkce f je různá od nuly pro všechna celá čísla x . Dosazením x za y do daného vztahu dostáváme

$$f(2x)f(x) = 3f(x)$$

pro všechna celá čísla x . Vzhledem k tomu, že $f(x) \neq 0$ platí $f(2x) = 3$, tedy pro všechna sudá celá čísla s je $f(s) = 3$. Nyní necht x a y jsou v dané rovnici libovolná lichá čísla, potom $3x - y$ je sudé číslo a platí

$$3f(x) = f(3x - y)f(y) = 3f(y).$$

Proto pro všechna lichá čísla x a y platí $f(x) = f(y)$. V rovnici položíme $x = 0$, potom pro všechna lichá čísla y platí

$$f(0 - y)f(y) = 3f(0) = 9.$$

Je-li číslo y liché, je také $-y$ liché číslo, proto $f(y) = f(-y)$ a platí $f(-y)f(y) = 9$. Tedy $f(y) \in \{-3, 3\}$. Zkouškou snadno ověříme, že funkce $f_1(x) = 3$ pro všechna celá čísla x a funkce

$$f_2(x) = \begin{cases} 3 & x \text{ sudé} \\ -3 & x \text{ liché} \end{cases}$$

vyhovují dané funkcionální rovnici.

Existují právě tři funkce, které vyhovují zadanému vztahu, jsou to funkce f_0 , f_1 a f_2 .

Správné řešení zaslali *Josef Křišťan* z Plzně, *Jana Faltýnková* z CMG v Prostějově, *Jaromír Kala*, *David Klaška* a *Jiří Marek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Radek Marciňa* z G ChD v Praze 5, *Zborovská*, *Van Nhan Nguyen* a *Martin Výška*, oba z G v Praze 6, *Nad Alejí*, *Jitka Novotná* z GMK v Bílovci, *Josef Ondřej* G v Rožnově p. R., *Alexander Slávik* z G v Brně-Řečkovících, *Josef Tkadlec* a *Tomáš Zeman*, oba z GJK v Praze 6 a *Jan Vaňhara* z GLJ v Holešově,

Neúplné řešení zaslala *Hana Šormová* oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše.

Pavel Calábek