MATEMATIKA

Některé vlastnosti tětivových n-úhelníků

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Ptolemaiova věta představuje užitečný nástroj pro hledání metrických vztahů v tětivových n-úhelnících. Uvedeme několik příkladů, přičemž se nejprve zaměříme na vlastnosti pravidelných n-úhelníků. Místo obvykle uváděné formulace Ptolemaiovy věty [le1] budeme používat její výhodný přepis (viz též [le4]) do tvaru následující věty.

Věta 1

Jestliže bod X leží na tom oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC, který neobsahuje bod A, pak při obvyklém označení délek stran trojúhelníku platí

$$|AX| \cdot a = |BX| \cdot b + |CX| \cdot c. \tag{1}$$

Věta 2

Nechť X je bod kratšího oblouku A_1A_n kružnice opsané pravidelnému n-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$, kde $n = 3k$ a k je přirozené číslo. Pak bod X má od k nejvzdálenějších vrcholů stejný součet vzdáleností jako od zbývajících vrcholů:

$$\sum_{r=k+1}^{2k} |XA_r| = \sum_{i=1}^{k} |XA_i| + \sum_{j=2k+1}^{n} |XA_j|. \tag{2}$$

Důkaz. Součtem vztahů, jež získáme aplikací věty 1 na bod X a rovnostranné trojúhelníky $A_jA_{j+k}A_{j+2k}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, obdržíme přímo (2).

Věta 3

Nechť $A_1A_2\ldots A_n$ je pravidelný n-úhelník s lichým počtem stran a X libovolný bod kratšího oblouku A_1A_n kružnice n-úhelníku opsané. Pak součet vzdáleností bodu X od vrcholů s lichými indexy je roven součtu jeho vzdáleností od vrcholů se sudými indexy.

Důkaz. Označme a délku strany $n-$úhelníku, $u = |A_1A_3| = |A_2A_4| = \cdots = |A_{n-1}A_1| = |A_nA_2|$ a $|XA_i| = d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Postupným vypsáním vztahu (1) pro bod X a trojúhelníky $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}A_n$, $A_1A_{n-1}A_n$ a $A_1A_2A_n$ zjistíme, že platí

$$\begin{aligned}
a(d_1 + d_3) &= ud_2\,,\\
ud_3 &= a(d_2 + d_4)\,,\\
a(d_3 + d_5) &= ud_4\,,\\
ud_5 &= a(d_4 + d_6)\,,\\
&\vdots\\
a(d_{n-2} + d_n) &= ud_{n-1}\,,\\
ud_n + ad_1 &= ad_{n-1}\,,\\
ud_1 + ad_n &= ad_2\,.
\end{aligned}$$

Všechny tyto vztahy sečteme a dostaneme tak rovnost

$$(2a + u)(d_1 + d_3 + \cdots + d_n) = (2a + u)(d_2 + d_4 + \cdots + d_{n-1})\,,$$

z níž plyne

$$d_1 + d_3 + \cdots + d_n = d_2 + d_4 + \cdots + d_{n-1}\,,$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznamenejme, že tvrzení z úloh 6 a 7 ve článku [2] představují speciální případy předchozích dvou vět. Jak uvidíme v úloze 3 na konci článku, je analogie věty 3 pro sudá n poněkud složitější.

Zajímavou větu pro obecné tětivové n-úhelníky dokázal nedávno vietnamský matematik *Bui Quang Tuan*, viz [5], resp. [3] pro $n = 3$.

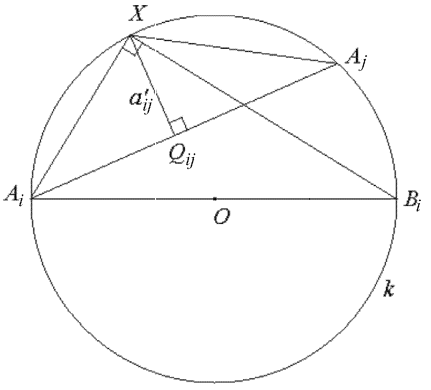
Věta 4

Nechť $A_1A_2\ldots A_n$ je tětivový n-úhelník a X vnitřní bod toho oblouku A_1A_n kružnice n-úhelníku opsané, který neobsahuje další vrcholy n-úhelníku. Označme a'_{ij} vzdálenost bodu X od přímky A_iA_j, $a_{ij} = |A_iA_j|$ a položme $R_{ij} = a_{ij}/a'_{ij}$. Pak platí

$$R_{1n} = R_{12} + R_{23} + \ldots + R_{(n-1)n}. \tag{3}$$

Důkaz. Nechť Q_{ij} je pata kolmice z bodu X na některou z přímek A_iA_j (obr. 1). V trojúhelníku XA_iA_j je aspoň jeden z vnitřních úhlů XA_jA_i a XA_iA_j ostrý. Zvolme indexy tak, aby to byl první z nich, a označme B_i obraz bodu A_i v souměrnosti podle středu opsané kružnice $k(O, r)$. Obvodové úhly XA_jA_i a XB_iA_i jsou shodné. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků XA_jQ_{ij} a A_iB_iX plyne

$$\frac{a'_{ij}}{|XA_i|} = \frac{|XA_j|}{2r}. \tag{4}$$

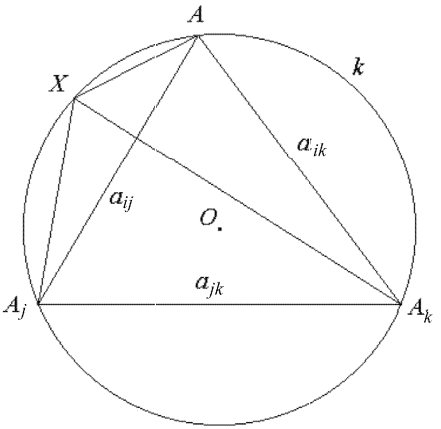


Obr. 1

Nechť je navíc uvnitř toho oblouku A_iA_j, který neobsahuje X, vrchol A_k (obr. 2). S využitím předchozího vztahu lze položit

$$|XA_k| = |XA_i| \cdot |XA_k| \cdot \frac{1}{|XA_i|} = c_{ijk} \cdot \frac{1}{a'_{ij}}, \tag{5}$$

kde $c_{ijk} = |XA_i| \cdot |XA_j| \cdot |XA_k|/2r$.



Obr. 2

Vztah (1) má pro naši situaci tvar $a_{ij}|XA_k| = a_{jk}|XA_i| + a_{ki}|XA_j|$. Nahraďme v něm délku $|XA_k|$ pravou stranou vztahu (5) a délky $|XA_i|$, $|XA_j|$ odpovídajícími výrazy vzniklými cyklickou záměnou indexů. Po vydělení získané rovnosti nenulovým číslem c_{ijk} obdržíme

$$R_{ij} = R_{jk} + R_{ki}. \tag{6}$$

Postupným vypsáním tohoto vztahu pro bod X a trojúhelníky $A_nA_1A_2$, $A_nA_2A_3, \ldots, A_nA_{n-2}A_{n-1}$ obdržíme soustavu podmínek

$$R_{1n} = R_{12} + R_{2n}, R_{2n} = R_{23} + R_{3n}, \ldots, R_{(n-2)n} = R_{(n-2)(n-1)} + R_{(n-1)n},$$

z níž plyne (3). Tím je důkaz proveden.

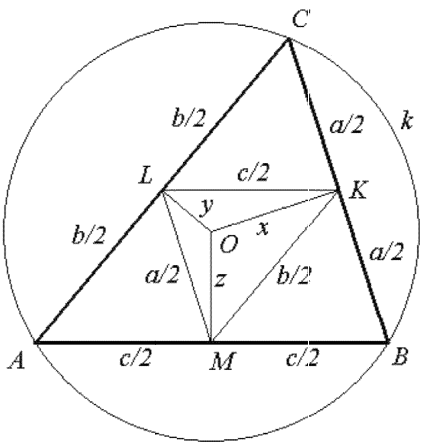
Každý n-úhelník lze vhodně zvolenými úhlopříčkami rozdělit na $n-2$ trojúhelníků. Následující věty se týkají kružnic vepsaných takovým trojúhelníkům.

Věta 5

Nechť x, y a z jsou vzdálenosti středu O kružnice $k(O;r)$ opsané trojúhelníku ABC od přímek BC, CA a AB (v daném pořadí) opatřené znaménkem „+“, pokud bod O i trojúhelník ABC leží na téže straně od té hraniční přímky trojúhelníku, od níž vzdálenost měříme, a znaménkem „−“ v opačném případě. Pak

$$x + y + z = r + \rho, \tag{7}$$

kde ρ je poloměr kružnice trojúhelníku ABC vepsané.



Obr. 3

Důkaz. Uvažujme nejprve ostroúhlý trojúhelník ABC (obr. 3). Součet obsahů trojúhelníků BCO, CAO a ABO se rovná obsahu trojúhelníku ABC. Platí tedy

$$\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2} = \frac{(a+b+c)\rho}{2} \tag{8}$$

Zřejmě je $|AO| = |BO| = |CO| = r$, $|LM| = a/2$, $|MK| = b/2$ a $|KL| = c/2$. Navíc jsou čtyřúhelníky $AMOL$, $BKOM$ a $CLOK$ tětivové, neboť každý z nich je sjednocením dvou pravoúhlých trojúhelníků se společnou přeponou. Rovnosti (1) pro bod X a trojúhelníky AML, BKM a CLK mají tvar

$$\frac{cy}{2} + \frac{bz}{2} = r \cdot \frac{a}{2}, \quad \frac{az}{2} + \frac{cx}{2} = r \cdot \frac{b}{2}, \quad \frac{bx}{2} + \frac{ay}{2} = r \cdot \frac{c}{2}.$$

Součtem předchozích tří rovností a vztahu (8) obdržíme

$$\frac{(a+b+c)(x+y+z)}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot (r+\rho).$$

Odtud bezprostředně plyne (7).

Pro tupoúhlé trojúhelníky lze důkaz provést analogicky. Má-li například trojúhelník ABC tupý úhel při vrcholu A, je $x < 0$, a pro obsahy platí

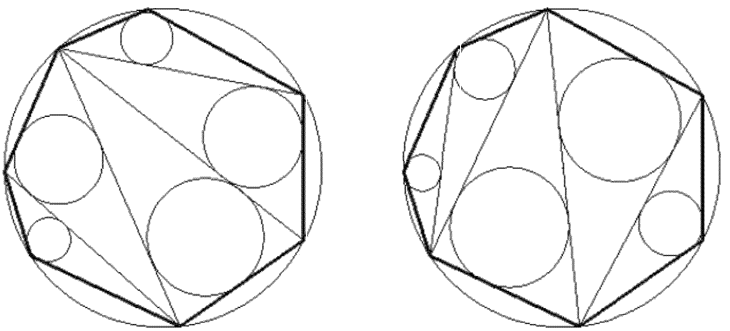
$$S_{ABO} + S_{CAO} - S_{BCO} = S_{ABC}\,.$$

Je tedy $-S_{BCO} = -\frac{1}{2}(-x)a = \frac{1}{2}ax$. Proto dospějeme opět ke vztahu (8). Zbytek důkazu je stejný jako pro ostroúhlý trojúhelník.

Věta 6

Nechť $n-3$ neprotínajících se úhlopříček n-úhelníku $A_1A_2\ldots A_n$, který je vepsán do kružnice $k(O;r)$, rozděluje n-úhelník na $n-2$ trojúhelníků. Poloměry kružnic vepsaných těmto trojúhelníkům označme ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_{n-2}$ a vzdálenosti bodu O od stran uvažovaného n-úhelníku označme dále d_1, $d_2, \ldots, d_n$. Pak je součet těchto vzdáleností je nezávislý na výběru úhlopříček a platí:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = (n-1)r + \sum_{i=1}^{n-2} \rho_i \tag{9}$$



Obr. 4

Dvě z možných rozdělení tětivového sedmiúhelníku na pět trojúhelníků představuje obr. 4. Z věty plyne, že při rozdělení libovolného tětivového n-úhelníku na $n-2$ trojúhelníků nezavisí součet poloměrů kružnic vepsaných všem vzniklým trojúhelníkům na způsobu rozdělení, ale je dán jen velikostí a tvarem n-úhelníka.

Tato věta je důsledkem věty 5. Vztah (9) vznikne součtem rovností (7) napsaných pro všechny trojúhelníky rozkladu. Každá vzdálenost bodu O od některé z dělících uhlopříček se ve výsledném součtu vyskytuje dvakrát, jednou s kladným a podruhé se záporným znaménkem. Dělící úhlopříčka A_rA_s je totiž společnou stranou právě dvou z uvažovaných trojúhelníků, které leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou A_rA_s. Proto se vzhledem ke znaménkové konvenci z věty 5 všechny vzdálenosti bodu O od úhlopříček n-úhelníku $A_1A_2\ldots A_n$ při sčítání vyruší.

Tímto jsme zakončili malý pohled do geometrie tětivových n-úhelníků a na závěr předkládáme čtenářům několik úloh k samstatnému procvičení této problematiky.

1. Dokažte, že v pravidelném devítiúhelníku $ABCDEFGHI$ platí

$$|AF| = |AB| + |AC|\,.$$

2. Dokažte, že v pravidelném sedmiúhelníku $ABCDEFG$ platí

$$\frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|}\,.$$

3. Nechť $A_1A_2\ldots A_n$ je pravidelný $n-$úhelník se sudým počtem stran a X libovolný bod kratšího oblouku A_1A_n kružnice jemu opsané. Dokažte, že rozdíl součtu vzdáleností bodu X od vrcholů s lichými indexy a součtu jeho vzdáleností od vrcholů se sudými indexy je roven číslu

$$\frac{2a(|A_{n-1}X| - |A_nX|)}{2a+u}\,,$$

kde $a = |A_1A_2|$ a $u = |A_1A_3|$.

4. Nechť X je bod uvnitř kratšího oblouku BC kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC a Y průsečík úseček BC a AX. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{|XY|} = \frac{1}{|BX|} + \frac{1}{|CX|}\,.$$

(Návod: Využijte vztah (1) a podobnost trojúhelníků ABY a CXY.)

Literatura

[1] *Leischner, P.*: Ptolemaiova věta. MFI, roč. 15 (2005/06), č. 3.
[2] *Leischner, P.*: Ptolemaiova nerovnost. MFI, roč. 15 (2005/06), č. 7.
[3] *Leischner, P.*: Ptolemaiova nerovnost v geometrii trojúhelníku. MFI, roč. 17. (2007/08), č. 8.
[4] *Škljarskij, D. O. – Čencov, N. N. – Jaglom, I. M*: Izbrannye zadači i teoremy elementarnoj matematiky, časť 2 – geometrija (planimetrija). GITTL, Moskva 1952.
[5] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PointOnCircumcircle2.shtml

O číslech k, m, n, pro něž platí:

$$(1+2+3+\ldots+k)+(1+2+3+\ldots+m)=(1+2+3+\ldots+n)$$

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Budeme-li určovat součty s_n prvních n členů posloupnosti přirozených čísel pro různá n, všimneme si brzy, že pro některá čísla k, m, n udávající počty prvních členů těchto posloupností platí $s_k + s_m = s_n$. Pro ilustraci si můžeme ověřit, že je například

$$s_2 + s_2 = s_3, \qquad s_3 + s_5 = s_6, \qquad s_5 + s_6 = s_8, \qquad s_4 + s_9 = s_{10}.$$

V tomto článku se pokusíme některá čísla k, m, n najít a odpovědět na otázku:

Existuje přirozených čísel k, m, n, pro něž je $s_k + s_m = s_n$, konečně nebo nekonečně mnoho?

K zodpovězení této otázky si pozorně prohlédněme následující tabulku, ve které jsou vypočteny součty s_n prvních n členů posloupnosti přirozených čísel pro $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 20$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
s_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210

Všimneme-li si, že

$$s_3 + s_5 = s_6,$$
$$s_6 + s_9 = s_{11},$$
$$s_9 + s_{13} = s_{16},$$

získáme dojem, že pro všechna přirozená čísla i platí

$$s_{3i} + s_{4i+1} = s_{5i+1}.$$

Tato domněnka je pravdivá, neboť

$$s_{3i} + s_{4i+1} = 3i(3i+1)/2 + (4i+1)(4i+2)/2 = (25i^2 + 15i + 2)/2,$$
$$s_{5i+1} = (5i+1)(5i+2)/2 = (25i^2 + 15i + 2)/2.$$

Dokázali jsme tak:

Čísel k, m, n, pro něž platí $s_k + s_m = s_n$, existuje nekonečně mnoho; patří k nim všechna čísla $k = 3i$, $m = 4i+1$, $n = 5i+1$, kde i je libovolné přirozené číslo.

Tento výsledek ovšem neznamená, že nalezené trojice čísel k, m, $n - i$, když jich je nekonečně mnoho, jsou všechny trojice, které mají danou vlastnost. Prohlédneme-li si znovu předcházející tabulku, zjistíme, že je

$$s_2 + s_2 = s_3,$$
$$s_5 + s_6 = s_8,$$
$$s_8 + s_{10} = s_{13},$$
$$s_{11} + s_{14} = s_{18},$$

takže se zdá, že pro všechna přirozená čísla i platí

$$s_{3i-1} + s_{4i-2} = s_{5i-2}.$$

I tato domněnka je pravdivá, protože

$$s_{3i-1} + s_{4i-2} = (3i-1) \cdot 3i/2 + (4i-2)(4i-1)/2 = (25i^2 - 15i + 2)/2,$$
$$s_{5i-2} = (5i-2)(5i-1)/2 = (25i^2 - 15i + 2)/2.$$

Tím je dále dokázáno:

K číslům k, m, n, pro něž platí $s_k + s_m = s_n$, patří také všechna čísla $k = 3i - 1$, $m = 4i - 2$, $n = 5i - 2$, kde i je libovolné přirozené číslo.

Všimněme si ještě, že všechna čísla k, m, n, která jsme dosud získali, měla tvar $3i + a$, $4i + b$, $5i + c$, kde a, b, c byla určitá celá čísla. Protože $(3i)^2 + (4i)^2 = (5i)^2$, zdá se, že by mohla vyhovovat i některá čísla tvaru

$$k = 5i + r, \quad m = 12i + s, \quad n = 13i + t, \quad r, s, t \in \mathbb{Z},$$

neboť i pro ně platí

$$(5i)^2 + (12i)^2 = (13i)^2.$$

Podíváme-li se ještě jednou na naši tabulku a vypočteme-li součty s_{21}, s_{23}, s_{33} a s_{36}, zjistíme, že je

$$\begin{aligned} s_4 + s_9 &= s_{10}, \\ s_9 + s_{21} &= s_{23}, \\ s_{14} + s_{33} &= s_{36}, \end{aligned}$$

odkud usoudíme, že pro všechna přirozená čísla asi platí

$$s_{5i-1} + s_{12i-3} = s_{13i-3}.$$

O správnosti se přesvědčíme snadno:

$$\begin{aligned} (5i-1) \cdot 5i/2 + (12i-3)(12i-2)/2 &= (169i^2 - 65i + 6)/2, \\ (13i-3)(13i-2)/2 &= (169i^2 - 65i + 6)/2. \end{aligned}$$

Zjistili jsme tak:

Mezi čísla k, m, n, pro něž platí $s_k + s_m = s_n$, patří i čísla $k = 5i - 1$, $m = 12i - 3$, $n = 13i - 3$, kde i je libovolné přirozené číslo

Získané výsledky sice nepředstavují žádný velký matematický objev, ale při vhodné příležitosti by mohly doplnit výuku tématu o aritmetických posloupnostech. Zájemci z řad studentů i učitelů se mohou pokusit určit některé další trojice přirozených čísel k, m, n, vyhovující dané podmínce, případně vyřešit úlohu, která s tématem tohoto článku úzce souvisí:

Určete počet všech přirozených čísel x, y, z různých od jedné, pro něž platí

$$\binom{x}{2} + \binom{y}{2} = \binom{z}{2}.$$

Pravdomluvní a lháři

JIŘÍ MAZUREK

Gymnázium a SOŠ, Orlová

V posledních letech využívá stále větší procento vysokých škol k přijímacím zkouškám takzvané testy studijních předpokladů (TSP), viz např. [1]. Jejich součástí jsou i specifické úlohy, v nichž jisté osoby buď mluví pravdu nebo lžou. Tyto úlohy se na střední škole běžně neprobírají a řada studentů ani netuší, jak by se při nich mělo postupovat. Důsledkem je, že podobné úlohy studenti v TSP přeskakují a jejich šance na přijetí tak klesají...

Tento článek poskytuje návod, jak řešit jednodušší úlohy o „pravdomluvných a lhářích". Předpokládá jen základní znalosti z výrokové logiky a tematicky navazuje na článek [2], který se věnoval tzv. *analytickému myšlení*.

Úloha 1

Sešly se tři dívky: Aneta, Žaneta a Eva. Aneta prohlásila, že Žaneta mluví vždy pravdu. Eva řekla, že Žaneta je lhářka. Žaneta prohlásila, že obě zbývající dívky jsou lhářky. Která dívka hovoří pravdu?

a) jen Aneta

b) jen Eva

c) jen Žaneta

d) všechny tři

e) pouze Aneta a Eva

Všechny možnosti pravdomluvnosti/lhaní dívek zobrazíme do tabulky. Pokud daná dívka mluví pravdu, přiřadíme jí hodnotu 1; pokud lže, přiřadíme jí hodnotu 0. Máme tedy celkem 8 možností. Písmena A, E a Ž značí jednotlivé dívky, vA, vE a sŽ jejich výroky:

A	E	Ž	vA	vE	$vŽ$
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
0	1	1			
1	0	0			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

Pokud budou výroky dívek ve shodě s jejich pravdomluvností resp. lhaním, napíšeme do odpovídajícího pole tabulky „fajfku“, pokud ne, napíšeme „spor“. Řádek tabulky, který obsahuje alespoň jeden spor, pak z množiny řešení vyloučíme.

- Na prvním řádku tabulky jsou všechny dívky pravdomluvné ($A = E = Ž = 1$). Začněme výrokem Anety: „Žaneta mluví vždy pravdu“. Aneta je pravdomluvná, tedy i Žaneta je pravdomluvná, a to souhlasí s předpoklady. Do pole pod vA nakreslíme fajfku (viz následující tabulka). Jako druhá hovoří Eva: „Žaneta je lhářka.“ Eva mluví pravdu, proto je Žaneta lhářka. Ale podle předpokladu je Žaneta pravdomluvná! To je spor, a do pole pod vE napíšeme „spor“. Předpoklad, že všechny tři dívky hovoří pravdu, tedy logicky není možný (výrokem Žanety se už nemusíme zabývat).
- Na druhém řádku je $A = E = 1$, $Ž = 0$. Začněme opět výrokem Anety. Z něj plyne, že Žaneta je pravdomluvná. Ale to je spor s předpokladem $Ž = 0$. Ani druhý řádek tabulky není logicky možný.
- Na třetím řádku je $A = Ž = 1$, $E = 0$. Výrok Anety je v pořádku, Žaneta je pravdomluvná. Eva tvrdí: „Žaneta je lhářka.“ Víme však, že Eva lže. Proto je Žaneta pravdomluvná, což souhlasí s předpokladem $Ž = 1$. Nakonec máme výrok Žanety: „Obě zbývající dívky jsou lhářky.“ Žaneta je pravdomluvná, proto Aneta i Eva jsou lhářky. Ale to je spor s předpokladem $A = 1$. V posledním poli na třetím řádku tabulky se nám objeví spor, a také tento řádek z pohledu řešení úlohy zamítáme:

A	E	Ž	vA	vE	$vŽ$
1	1	1	✓	spor	
1	1	0	spor		
1	0	1	✓	✓	spor
0	1	1			
1	0	0			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

Po analogickém rozboru zbylých pěti řádků dostaneme tento výsledek:

A	E	Ž	vA	vE	$vŽ$
1	1	1	✓	spor	
1	1	0	spor		
1	0	1	✓	✓	spor
0	1	1	spor		
1	0	0	spor		
0	1	0	✓	✓	✓
0	0	1	spor		
0	0	0	✓	spor	

Zadání úlohy vyhovuje pouze šestý řádek (ten jediný neobsahuje žádný spor). To znamená, že Aneta je lhářka, Eva mluví pravdu a Žaneta lže, což lze zapsat jako uspořádanou trojici hodnot $(0; 1; 0)$.

Z nabízených odpovědí je tedy správně odpověď b).

„Tabulková“ metoda řešení je poměrně pracná a časově náročná. Proto si ukážeme ještě jinou metodu řešení. V ní na začátku *přijmeme určitý předpoklad a ověříme jej*:

- Nechť $A = 1$ (Aneta je pravdomluvná): Pak z vA plyne, že $Ž = 1$, a z $vŽ$ dostáváme spor: A by mělo být 0, ale podle předpokladu je A rovno 1. Proto *musí být* $A = 0$ (viz následující předpoklad).
- Nechť $A = 0$ (Aneta lže): potom máme $Ž = 0$. Protože Žaneta lže, alespoň jedna ze zbývajících dívek je pravdomluvná. Aneta to být nemůže, nezbývá tedy, než aby to byla Eva: $E = 1$.

Dostali jsme jediné řešení úlohy: $(0; 1; 0)$, které se shoduje s řešením pomocí tabulky.

Úlohu lze také řešit způsobem typickým pro testy: dosazováním odpovědí do zadání úlohy. Otestujeme odpovědi a) až e), zda-li neobsahují spor. S trochou štěstí lze „narazit“ na správnou odpověď už na začátku.

Pokud má úloha jen jedno řešení, je užití druhé metody rychlé a pohodlné. Pokud je však logicky přípustných řešení více, dochází k určitému „řetězení“ předpokladů...

Úloha 2

Domorodci v jistém kraji buď neustále mluví pravdu nebo neustále lžou. Sešli se domorodci A, B a C. Domorodec A prohlásil: „Mezi námi je jeden lhář a dva pravdomluvní.“ Domorodec B na to odpověděl: „Všichni jsme pravdomluvní.“ Která z následujících odpovědí je pravdivá?

a) B nemůže být lhář

b) A nemůže být lhář

c) Je-li A pravdomluvný, je pravdomluvný i C

d) A a C nemohou být pravdomluvní oba

e) A nemůže být pravdomluvný

Řešme úlohu pomocí předpokladů. Značení osob a jejich výroků zůstává stejné. Začněme výrokem, který je jednodušší – výrokem domorodce B:

- Nechť $B = 1$: pak $A = C = 1$. To je ovšem spor s vA, který tvrdí, že pouze dva z nich jsou pravdomluvní. *B tudíž nemůže být 1.*
- Nechť $B = 0$: protože B lže, alespoň jeden domorodec je lhář. Nic dalšího s určitostí nevíme, přijmeme proto další předpoklad:
- Nechť $A = 1$: podle vA má být jeden lhář a dva pravdomluvní, proto $C = 1$. Tato možnost, zapsaná v abecedním pořadí jako $(1; 0; 1)$, neobsahuje žádný spor a patří tudíž do množiny řešení. Ale možná to není jediné řešení! Co když bude $A = 0$?
- Nechť $A = 0$: z vA plyne, že počet lhářů není roven jedné. Ale to je již splněno, neboť i $B = 0$. Pro domorodce C neplynou ze zadání žádné další omezující podmínky, může být $C = 0$ i $C = 1$. Dostáváme tak další dvě řešení: $(0; 0; 1)$ a $(0; 0; 0)$.

Pokud bychom úlohu řešili tabulkou, dostali bychom tři bezesporné řádky. A správná odpověď na otázku v zadání je c).

Úlohy mohou být dále komplikovány tím, že některé osoby mohou někdy lhát a někdy hovořit pravdu ...

Úloha 3

V karavaně cestují tři druhy osob: *pravdomluvní*, kteří mluví vždy pravdu, *lháři*, kteří vždy lžou, a *beduíni*, kteří někdy mluví pravdu a někdy lžou. Sejdou se Alí a Hasan. Alí prohlásí: „Hasan je lhář.“ Hasan na to řekne: „Alí je pravdomluvný.“ Které z následujících tvrzení je určitě pravdivé?

a) Hasan je lhář.

b) Hasan je pravdomluvný.

c) Alí nemůže být pravdomluvný.

d) Alí není lhář.

e) Oba jsou beduíni.

Zaveďme si pro beduíny pravdivostní hodnotu $1/2$. V tabulce se potom objeví pod písmeny A a H všechny kombinace 0, $1/2$ a 1, což dává celkem 9 logických možností a tedy 9 řádků. Bezesporné ale budou jen tyto tři:

A	H	vA	vH
$1/2$	0	✓	✓
0	$1/2$	✓	✓
$1/2$	$1/2$	✓	✓

Stejný výsledek získáme i metodou předpokladů. Začněme např. Hasanem (pokud bychom začali Alím, došli bychom ke stejnému výsledku):

- Nechť $H = 0$: potom z vH plyne $A = 0$ nebo $A = 1/2$.
  - Nechť $A = 0$: z vA dostáváme spor.
  - Nechť $A = 1/2$: vA je v pořádku (A zrovna lže). Máme tak první řešení: $(1/2; 0)$.
- Nechť $H = 1$: z vH plyne $A = 1$, ale z vA dostáváme spor.
- Nechť $H = 1/2$: z vH nevyplývá pro A žádná hodnota. Musíme proto otestovat všechny tři možnosti:
  - Nechť $A = 1$: z vA dostáváme spor.
  - Nechť $A = 1/2$: z vA neplyne spor, máme druhé řešení ve tvaru $(1/2; 1/2)$.
  - Nechť $A = 0$: z vA neplyne spor, máme třetí řešení $(0; 1/2)$.

Nalezli jsme tři logicky přípustná řešení, která odpovídají řádkům v tabulce 4. Správná odpověď na otázku v zadání úlohy je tedy opět c).

Literatura

[1] http://www.muni.cz/study/admission/tsp
[2] *J. Mazurek*: Jak řešit testy SCIO? MFI, roč. 17(2007/2008) č. 3, s. 144 – 151.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení zašlete nejpozději do 10. 1. 2009 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

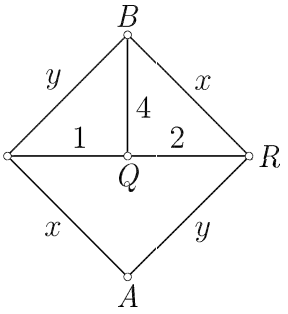
Úloha 153

Najděte všechny dvojice reálných čísel (x, y) vyhovující soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 2x^3 + \ \ y^3 &= 6, \\ 8x^2y + xy^2 &= 12. \end{aligned}$$

Jaromír Šimša

Úloha 154



Na obrázku je schéma cest mezi místy A, B, P, Q, R i s údaji o jejich délce v kilometrech. Určete nejkratší cestu z A do B v závislosti na reálných hodnotách $x, y \in \langle 1; 8\rangle$ (trojúhelníkové nerovnosti nemusejí být splněny). V rovině proměnných xy vyznačte výsledné podmínky.

Stanislav Trávníček