

MATEMATIKA

Rovnice s neznámou pod odmocninou

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Jestliže se studenty na střední škole probíráme rovnice s neznámou pod odmocninou, mohou mít problémy s pochopením některých jevů, které jsou u těchto rovnic pro ně nové. V podstatě jde o tyto okruhy problémů:

- Má se zjišťovat definiční obor rovnice a k čemu se využije?
- Jak to, že někdy přibude jakýsi „falešný kořen“ rovnice?
- Jak správně provádět zkoušku?

Učitel se studenty zpravidla projde a vysvětlí různé případy, propočítá úvodní příklady a pak se přejde k vytvoření vhodného algoritmu standardní metody (viz [4]). Ideální je, když studenti použití tohoto algoritmu bezpečně zvládnou, a to s porozuměním, tj. dovedou rozpoznat, kdy je výhodnější použít k vyřešení rovnice nebo určitého kroku algoritmu jiný postup. Proto je zapotřebí, aby studenti, alespoň ti v matematice pokročilejší, poznali různé vnější souvislosti, které jim umožní nadhled nad konkrétními problémy. O některých těchto souvislostech zde krátce pojednáme.

1. Důsledkové úpravy

Uvažujme rovnici (r) s definičním oborem $D(r)$. Ekvivalenční úpravy rovnice (k oběma stranám rovnice přičítáme tentýž výraz s definičním oborem $D \supset D(r)$, obě strany rovnice násobíme týmž nenulovým výrazem s definičním oborem $D \supset D(r)$) transformují postupně původní rovnici (r) v rovnice $(r_1), (r_2), \dots, (r_n)$ a provádíme je tak, abychom obor pravdivosti (r_n) již dovedli určit. Rovnice (r_n) bývá ve školních úlohách zpravidla kvadratická nebo přímo tvaru např. $x = 3$. Přitom platí

$$(r) \Leftrightarrow (r_1) \Leftrightarrow (r_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (r_n),$$

takže obor pravdivosti (množina všech řešení) rovnice (r) je týž jako u výsledné rovnice (r_n) .

Důsledkové úpravy rovnice (obě strany rovnice násobíme týmž výrazem s definičním oborem $D \supset D(r)$, rovnici umocníme) při řešení rovnice různě střídáme s úpravami ekvivalenčními a platí

$$(r) \Rightarrow (r_1) \Rightarrow (r_2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (r_n).$$

Každý kořen rovnice (r) je tak kořenem i výsledné rovnice (r_n) , ale obráceně to platit nemusí. Např. rovnice $x = 1$ má obor pravdivosti $\{1\}$, ale rovnice $x^2 = 1$, kterou dostaneme jejím umocněním, má obor pravdivosti $\{1; -1\}$, přibyl sem „falešný“ kořen -1 . Je tedy zřejmé, že při řešení rovnic s použitím důsledkových úprav se případných těchto falešných kořenů musíme zbavit.

2. Definiční obor rovnice a množina přípustných hodnot

Rovnice s neznámou pod odmocninou se zpravidla probírají po rovnicích s neznámou ve jmenovateli. Oba typy rovnic mají společné to, že při jejich řešení provádíme důsledkové úpravy a mohou tak přistupovat „falešná“ řešení, že tedy ne všechna čísla, která při řešení rovnice „vypočteme“, jsou řešením dané rovnice. Proto vždy ještě musíme nějakým způsobem zjišťovat, zda a která vypočtená čísla jsou pro danou rovnici (r) skutečně řešením.

Máme na výběr dvě alternativy:

- (I) Zjistit, které hodnoty neznámé jsou přípustné, tj. vyloučit nepřípustné hodnoty; přitom přípustnými hodnotami neznámé rozumíme ty hodnoty, za nichž jsou všechny operace potřebné k řešení rovnice ekvivalenční (k oběma stranám přičíst tentýž výraz, obě strany rovnice násobit týmž nenulovým výrazem, umocnit rovnici, jejíž obě strany jsou nezáporné), tj. řešit rovnici na množině P všech přípustných hodnot.
- (II) Provést zkoušku, kterou potvrdíme nebo vyloučíme, že dané zkoušené číslo je řešením.

U rovnic s neznámou ve jmenovateli volí učebnice i učitelé zpravidla první možnost a po zapsání rovnice (správně) požadují, aby studenti na počátku řešení zapsali podmínku „čemu se nesmí rovnat x “, např. pro rovnici

$$\frac{x+5}{x-2} - 2 = \frac{x+2}{x-2} + 1$$

je touto podmínkou nerovnost $x \neq 2$. Množina P přípustných hodnot je zde $P = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ a je vlastně definičním oborem dané rovnice. V množině P jsou tedy všechny operace prováděné při obvyklém řešení této rovnice ekvivalenční, tj. všechny rovnice, které dostáváme postupem řešení jsou navzájem ekvivalentní a mají tedy stejná řešení (kořeny). Případná zkouška je již jen ověřením, že jsme se při řešení nespletli.

Nebylo by však vůbec chybou, kdybychom na počátku procesu řešení nezapisovali „podmínky“, ale na jeho konci provedli zkoušku jako součást řešení, tj. dosazením vypočtených čísel x_i do levé strany a pravé strany původní rovnice se přesvědčili, zda $L(x_i) = P(x_i)$. Pokud by nám při zkoušce vyšel někde jmenovatel roven nule, prostě by to znamenalo, že dané zkoušené číslo x_i není řešením dané rovnice. Výjimkou by byl jen případ, kdy by nám vyšlo „řešením rovnice je každé číslo“, protože zde by zkouška, zda skutečně každé číslo je řešením dané rovnice, prakticky znamenala zjišťování množiny P přípustných hodnot jako množiny všech řešení. Takže stejně jako v prvním případě by např. rovnice

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x}{x+1} \quad (1)$$

vedla k závěru, že řešením rovnice je každé číslo s výjimkou čísla -1 .

U rovnic s neznámou pod odmocninou volí učebnice a učitelé zpravidla standardně druhou možnost, tj. neurčují množinu P přípustných hodnot, ale na konci řešení provádějí zkoušku jako povinnou součást řešení.

Určování množiny P přináší totiž někdy drobné komplikace; důvodem je zejména to, že u těchto rovnic zpravidla nestačí za množinu všech přípustných hodnot vzít definiční obor rovnice. Od prvků množiny P přípustných hodnot musíme rovněž požadovat, aby každé umocnění rovnice bylo ekvivalenční úpravou, tj. aby před umocněním byly obě strany rovnice nezáporné. Jsou-li tedy na množině P všechny prováděné úpravy ekvivalenční, pak všechny kořeny nalezené v množině P jsou platné a zkouška už není povinnou součástí řešení.

I když chceme rovnice s neznámou pod odmocninou řešit standardní metodou, bývá někdy stanovení množiny P přípustných hodnot docela užitečné. Např. u rovnice

$$\sqrt{5-5x} = \sqrt{3x-11}$$

z učebnice [1] zapíšeme-li podmínky $(5-5x \geq 0) \wedge (3x-11 \geq 0)$, tj. $(x \leq 1) \wedge (x \geq \frac{11}{3})$, vidíme, že množinou P (je to zde přímo definiční

obor rovnice) je množina prázdná, $P = \emptyset$. Takže bez jakéhokoli řešení můžeme ihned učinit závěr rovnice nemá řešení. Přitom při dodržení běžného postupu řešení by studenti rovnici umocnili, vypočetli by, že $x = 2$, a prováděli by zkoušku, při níž by zjistili, že $L = \sqrt{-5}$, $P = \sqrt{-5}$, takže by ještě navíc mohli upadnout v pochybnost, jestli přece jen není $L = P$ a číslo 2 kořenem původní rovnice.

Podívejme se nyní na rovnici

$$\sqrt{x-2} = 8-x. \quad (2)$$

Definičním oborem této rovnice je interval $\langle 2; +\infty \rangle$. Pro stanovení množiny P však máme ještě jednu podmínku, a to, aby i pravá strana rovnice byla nezáporná, tj. $8-x \geq 0$. Množina P je tedy interval $P = \langle 2; 8 \rangle$. Jestliže nyní rovnici (2) umocníme, je to v množině P ekvivalenční úprava. Řešíme

$$\begin{aligned} x-2 &= (8-x)^2, \\ x-2 &= 64-16x+x^2, \\ x^2-17x+66 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením získané kvadratické rovnice dostaneme dva její kořeny: 6 a 11. Zjistíme, že $6 \in P$, $11 \notin P$, takže rovnice (2) má jeden kořen 6.

Vyřešme ještě rovnici

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = 5. \quad (3)$$

Definiční obor rovnice dostaneme z podmínek $(2x-1 \geq 0) \wedge (x-1 \geq 0)$, tj. $D(r) = \langle 1; +\infty \rangle$. Obě strany rovnice jsou nezáporné, můžeme umocnit:

$$2x-1 + 2\sqrt{(2x-1)(x-1)} + x-1 = 25$$

a po úpravě máme

$$2\sqrt{(2x-1)(x-1)} = 27-3x.$$

Podmínka $27-3x \geq 0$, tj. $x \leq 9$ spolu s definičním oborem $D(r)$ nám dává $P = \langle 1; 9 \rangle$. Vidíme tedy, že množinu P nelze vždy zjistit hned ne počátku

ze zadané rovnice, ale zde jsme ji dostali až po prvním umocnění. Rovnici znovu umocníme:

$$\begin{aligned}4(2x^2 - 3x + 1) &= 729 - 162x + 9x^2, \\ x^2 - 150x + 725 &= 0.\end{aligned}$$

Řešením této rovnice dostaneme dva kořeny 145 a 5. Přitom $145 \notin P$, $5 \in P$, takže daná rovnice má jediný kořen 5.

Poznámka. Ale pozor: Kdybyste chtěli rovnici (3) umocnit ve tvaru

$$\sqrt{x-1} = 5 - \sqrt{2x-1},$$

pak byste touto metodou nemuseli dostat (a zde nedostali) správný výsledek, protože není zajištěna nezápornost pravé strany.

3. Proč a jak přibývají postranní (falešné) kořeny

Jestliže řešíme nějakou rovnici (r) s neznámou pod odmocninou standardní metodou, dostaneme ve školních příkladech po umocnění nebo po dvojím umocnění zpravidla kvadratickou rovnici (r') a ten její kořen, který není kořenem výchozí rovnice, je jakýsi *postranní* kořen rovnice (r) resp. (r'). V některých případech je vznik postranních kořenů zřejmý. Např. při řešení rovnice (2) jsme po umocnění dostali rovnici

$$x - 2 = (8 - x)^2. \quad (2')$$

Jestliže bychom však řešili rovnici

$$\sqrt{x-2} = (x-8). \quad (2^*),$$

dostali bychom po umocnění též výsledek (2). Rovnice (2), (2*) tvoří tedy takovou dvojici rovnic, že (vzhledem k umocnění jako důsledkové úpravě) každý kořen rovnice (2) i každý kořen rovnice (2*) je kořenem rovnice (2'). A protože rovnice (2) je pro nás hlavní (tu jsme chtěli řešit), nabízí se pro rovnici (2*) označení *postranní rovnice*. Její kořeny *mohou být* postranními kořeny rovnice (2). V našem případě existuje postranní kořen 11 a ten je kořenem postranní rovnice (2*).

Postranní kořeny mohou a nemusejí existovat. Např. při řešení rovnice

$$\sqrt{x} = x \quad (4)$$

dostáváme po umocnění

$$x = x^2 \quad (4')$$

se dvěma kořeny 0, 1, které jsou kořeny také výchozí rovnice (4), zatímco postranní rovnice

$$\sqrt{x} = -x \quad (4^*)$$

má pouze kořen 0, takže rovnice (4) nemá postranní kořeny.

Uvažujme nyní složitější případ. Řešme rovnici

$$\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+6}. \quad (5)$$

Po umocnění máme postupně

$$\begin{aligned} 2x-5 + 2\sqrt{(2x-5)(x+1)} + x+1 &= x+6, \\ \sqrt{(2x-5)(x+1)} &= 5-x. \end{aligned} \quad (5')$$

Po opětém umocnění máme

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 5 &= 25 - 10x + x^2, \\ x^2 + 7x - 30 &= 0, \end{aligned}$$

s kořeny 3 a -10 . Zkouškou zjistíme, že kořenem rovnice (5) je pouze číslo 3, takže číslo -10 je postranním kořenem; kořenem rovnice (5') jsou již obě čísla 3 i -10 , tedy postranní kořen „vznikl“ při *prvním* umocnění, tj. při přechodu od rovnice (5) k rovnici (5'). Hledejme postranní rovnici. Rovnice (5) je typu

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C},$$

kde A , B , C jsou nezáporné výrazy, a její 2. mocnina je

$$A + 2\sqrt{AB} + B = C. \quad (6)$$

Rovnice typu

$$\sqrt{-A} - \sqrt{-B} = \sqrt{-C},$$

kde A , B , C jsou nekladné výrazy, má druhou mocninu

$$-A - 2\sqrt{AB} - B = -C,$$

kteřá je (po vynásobení číslem -1) formálně shodná s rovnicí (6). Z tohoto poznatku plyne, že rovnice

$$\sqrt{-(2x-5)} - \sqrt{-(x-1)} = \sqrt{-(x+6)} \quad (5^*)$$

je postranní rovnicí při řešení rovnice (5) a skutečně se lze zkouškou přesvědčit, že číslo 11 je jejím kořenem. Po umocnění obě rovnice (5), (5*) přejdou v rovnici (5).

4. Zkouška při řešení rovnice s neznámou pod odmocninou

Zkouška při standardním řešení rovnic s neznámou pod odmocninou může někdy přivodit nečekané problémy. Ukažme si to na řešení rovnice

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 4. \quad (7)$$

Po umocnění máme

$$\begin{aligned} x+3+2\sqrt{(x+3)(2x-1)}+2x-1 &= 16, \\ 2\sqrt{2x^2+5x-3} &= 14-3x \end{aligned} \quad (7')$$

Po druhém umocnění máme

$$\begin{aligned} 4(2x^2+5x-3) &= 196-84x+9x^2, \\ x^2-104x+208 &= 0. \end{aligned}$$

Kořeny této rovnice jsou $x_1 = 52 + 8\sqrt{39}$, $x_2 = 52 - 8\sqrt{39}$.

Zkouška pro kořen x_1 je jednoduchá. Lehce zjistíme, že $x_1 + 3 > 100$, $2x_1 - 1 > 100$, takže $L(x_1) > 10 + 10$, zatímco $P = 4$, tedy $L(x_1) \neq P$; x_1 tedy není kořenem rovnice (7).

Zkouška pro kořen x_2 žádá zjistit, jak je to s hodnotou

$$L(x_2) = \sqrt{55 - 8\sqrt{39}} + \sqrt{103 - 16\sqrt{39}}. \quad (8)$$

Na kalkulačce vypočteme

$$\sqrt{55 - 8\sqrt{39}} = 2,244\,998, \quad \sqrt{103 - 16\sqrt{39}} = 1,755\,002,$$

takže

$$L(x_2) = 2,244\,998 + 1,755\,002 = 4,000\,000.$$

Můžeme být spokojeni? Ne, 4,000 000 je číslo zaokrouhlené, které je snad rovno čtyřem, ale možná, že ne. Vezměme si na pomoc přesnější kalkulačku. Dostaneme

$$\sqrt{55 - 8\sqrt{39}} = 2,244\,997\,998\,398\,41,$$

$$\sqrt{103 - 16\sqrt{39}} = 1,755\,002\,001\,601\,65,$$

odkud $L(x_2) = 4,000\,000\,000\,000\,06$. I když si můžeme být prakticky jisti, že výsledek je 4, matematický důkaz to není. Je tedy třeba najít jinou metodu.

V učebnici [2] je v historické poznámce uveden vzorec, který arabští matematikové znali již před 1000 lety (viz též [3]); pro $a^2 > b$ platí

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}. \quad (9)$$

Ukážeme si, že tento vzorec umožňuje řádné provedení zkoušky řešení naší rovnice (7).

Ve výrazu $\sqrt{55 - 8\sqrt{39}}$ je $a = 55$, $b = 64 \cdot 39 = 2\,496$, tedy $a^2 = 3\,025 > 2\,496$, $a^2 - b = 529$, $\sqrt{a^2 - b} = 23$, takže podle (9) je

$$\sqrt{55 - 8\sqrt{39}} = \sqrt{\frac{55 + 23}{2}} - \sqrt{\frac{55 - 23}{2}} = \sqrt{39} - \sqrt{16} = \sqrt{39} - 4.$$

Ve výrazu $\sqrt{103 - 16\sqrt{39}}$ je $a = 103$, $b = 256 \cdot 39 = 9\,984$, tedy $a^2 = 10\,609 > 9\,984$, $a^2 - b = 625$, $\sqrt{a^2 - b} = 25$, takže podle (9) je

$$\sqrt{103 - 16\sqrt{39}} = \sqrt{\frac{103 + 25}{2}} - \sqrt{\frac{103 - 25}{2}} = \sqrt{64} - \sqrt{39} = 8 - \sqrt{39}.$$

Z těchto výsledků a z (8) dostáváme

$$L(x_2) = \sqrt{39} - 4 + 8 - \sqrt{39} = 4 = P.$$

Připomeňme znovu, že zkoušku lze nahradit zjištěním, že x_2 je prvkem množiny P přípustných hodnot: Ze zadání (7) určíme definiční obor podmínkou $x \geq \frac{1}{2}$, kterou pak doplníme ještě podmínkou $14 - 3x \geq 0$ z rovnice (7'), takže množina přípustných hodnot $P = \langle \frac{1}{2}; \frac{14}{3} \rangle$. Platí $x_2 = 52 - 8\sqrt{39} \doteq 2,04$. Zaokrouhlení neovlivňuje skutečnost, že $x_2 \in P$, takže x_2 je kořenem rovnice (7).

Na závěr si ještě uvedme rovnici

$$2\sqrt{x^2 - 5x + 6,25} = 5 - 2x.$$

Definičním oborem dané rovnice je $\mathbb{R}$. Standardní řešením dostaneme

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 5x + 6,25) &= 25 - 20x + 4x^2, \\ 0x^2 + 0x + 0 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této rovnice je každé číslo, takže pro zjištění řešení dané rovnice je třeba zjistit množinu P přípustných hodnot. Podmínka pro nezápornost pravé strany je $5 - 2x \geq 0$, takže $P = (-\infty; \frac{5}{2}]$. Množinou všech řešení dané rovnice je tedy množina P .

Vidíme, že při vylučování postranních kořenů se mohou uplatnit obě alternativy (I), (II).

L i t e r a t u r a

- [1] Matematika pro gymnázia (Rovnice a nerovnice). Prometheus, Praha 2002.
- [2] Matematika pro gymnázia (Funkce). Prometheus, Praha 2002.
- [3] *Trávníček, S.*: O jistých složených iracionalitách. MFI r. 17 (2007/08), č. 2, s. 6570.
- [4] *Trávníček, S.*: K technologii vyučování matematice (O algoritmech). MFI 8 (1998/99), č. 8, str. 449 – 461.

Matematika v škole a trocha konštruktivismu

DUŠAN JEDINÁK

Trnavská univerzita v Trnave, SLOVENSKO

Úvod

Vyučovací predmet *matematika* už v základnej škole a potom vo väčšej miere v strednej škole nevyhnutne vyžaduje učenie sa s porozumením, aby si študujúci vytvárali svoje vlastné chápanie matematických javov a súvislostí. Ak je učenie sa proces konštruovania poznatkových štruktúr, tak vyučovanie školskej matematiky vyžaduje pravidelné vytváranie takých situácií, v ktorých študent uskutočňuje svoj vlastný intelektuálny výkon (porozumenie je vždy subjektívne konštruované). Voľne povedané: učiaci sa človek má v primeranej miere hlbšie porozumieť základným abstraktným matematickým pojmom a súvislostiam medzi nimi. Pretože matematika je myšlienková štruktúra popísaná systémom axiém, definícií a viet aj so svojimi dôkazmi, tak pri vyučovaní a učení sa školskej matematiky je zvlášť dôležité a nevyhnutné postupné získanie vhladu do celej problematiky (motivácie, separované modely, univerzálne modely, abstraktné vedomosti a ich štrukturalizácia). Bez hlbšieho vnútorného záujmu a výrazne kladného vôľového postoja, osobitých myšlienkových foriem a pomerne špecifických postupov usudzovania i argumentácie, abstraktnej predstavivosti a systematickej pojmovej výstavby nemožno uspieť ani v budovaní elementárnych základov matematickej kultúry.

Päť úloh

Po viacročných skúsenostiach z didaktickej prípravy budúcich učiteľov matematiky pre ZŠ odporúčam všetkým učiteľom matematiky, aby so svojimi žiakmi a študentmi vyskúšali hore spomínaný prístup aj na dolu uvedených školských matematických úlohách z oblasti uplatnenia základných vedomostí z elementárnej teórie čísiel, ktoré uvádzam aj s jednoduchými náznakmi ich riešenia. Iné prístupy a ďalšie možné riešenia prenechávam vám a vašim žiakom.

To vedel už Euklides

Už od čias antických Grékov sa za *dokonalé čísla* považujú tie prirodzené čísla, ktorých súčet všetkých ich deliteľov sa rovná dvojnásobku daného čísla. To sa dá definovať aj takto: Prirodzené číslo n je dokonalé, práve vtedy ak sa rovná súčtu všetkých svojich vlastných (t.j. menších ako n) deliteľov. Napríklad: Číslo 6 ($= 1 + 2 + 3$) je dokonalé číslo; aj 28 ($= 1 + 2 + 4 + 7 + 14$) a 496 (preverte si to) sú dokonalé čísla. Euklides (asi 365 – 290 pred n. l.) v IX. knihe svojich Základoch v časti XXXVI dokázal tvrdenie: *Ak sú postupne od jednotky dané čísla v pomere 1 : 2, až sa ich súčet stane prvočíslom a ak sa tento súčet vynásobí posledným z týchto čísel, tak takto vzniknuté číslo bude dokonalé.* Naznačme si to na príklade:

$$\underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + 16)}_{31 \text{ je prvočíslo}} \cdot 16 = 496 (= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248)$$

je dokonalé.

Teraz dokážeme nasledujúcu vetu:

Veta

Ak sú p aj $(2^p - 1)$ prvočísla, tak $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ je dokonalé číslo.

Dôkaz. Nech p je prvočíslo. Ak je $(2^p - 1)$ tiež prvočíslo, tak delitelia čísla $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ sú čísla 1, 2, 4, 8, ..., 2^{p-1} , $(2^p - 1)$, $2 \cdot (2^{p-1})$, $4 \cdot (2^{p-1})$, $8 \cdot (2^{p-1})$, ..., $2^{p-2} \cdot (2^{p-1})$.

Ak určíme súčet týchto všetkých deliteľov dostaneme

$$\begin{aligned} & \underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{p-1})}_{(2^p - 1)} + \underbrace{(1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{p-2})}_{(2^{p-1} - 1)} \cdot (2^{p-1}) = \\ & = (2^p - 1) + (2^{p-1} - 1) \cdot (2^{p-1}) = [1 + (2^{p-1} - 1)] \cdot (2^{p-1}) = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1), \end{aligned}$$

teda je splnená definícia dokonalého čísla.

Euklides poznal tieto štyri dokonalé čísla: 6, 28, 496, 8128. Ďalšie dokonalé číslo (33 350 336) objavil asi *J. Müller-Regiomontanus* (1436 – 1476). *Leonhard Euler* (1707 – 1783) určil ďalšie tri dokonalé čísla a dokázal, že každé párne dokonalé číslo má tvar ako uviedol Euklides $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$,

kde p aj $(2^p - 1)$ sú prvočísla. Ani dodnes nevieme, či existuje nepárne dokonalé číslo, ani či je dokonalých čísel konečný alebo nekonečný počet.

Dvadsať cifier

Úloha 1

Nech p je ľubovoľné prvočíslo väčšie ako 3. Dokážte, že ak číslo p^n má práve 20 cifier, potom niektoré tri z nich sú rovnaké.

Riešenie. Predpokladajme, že číslo p^n (p je prvočíslo väčšie ako 3) má práve 20 cifier a žiadne tri z nich nie sú rovnaké. Ak nie sú žiadne tri cifry čísla p^n rovnaké, tak číslo p^n obsahuje každú z cifier 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 práve dvakrát. To znamená, že ciferný súčet čísla p^n je $2(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 90$. Z toho vyplýva, že p^n je deliteľné 3. Ale to je spor, pretože číslo p je prvočíslo väčšie ako 3 a teda nie je deliteľné tromi. Teda ani p^n nie je deliteľné tromi. Preto, ak p^n má práve 20 cifier (p je prvočíslo väčšie ako 3), tak niektoré tri z týchto dvadsiatich cifier čísla p^n musia byť rovnaké.

Predstava o deliteľnosti

Úloha 2

Koľko je šesťciferných prirodzených čísiel, ktoré nie sú deliteľné ani jedným z čísiel 42, 63?

Riešenie. Pre čísla od 0 do 999 999 platí: počet čísiel deliteľných 42 ($999\,999 : 42 = 23\,809,5$) je 23 809; počet čísiel deliteľných 63 ($999\,999 : 63 = 15\,873$) je 15 873; počet čísiel deliteľných oboma číslami 42 i 63 (t.j. ich najmenším spoločným násobkom 126) je ($999\,999 : 126 = 7\,936,5$) 7 936.

Pre čísla od 0 do 99 999 (teda najviac päťciferné) platí

počet čísiel deliteľných 42 ($99\,999 : 42 = 2\,380,92\dots$) je 2 380,

počet čísiel deliteľných 63 ($99\,999 : 63 = 1\,587,28\dots$) je 1 587,

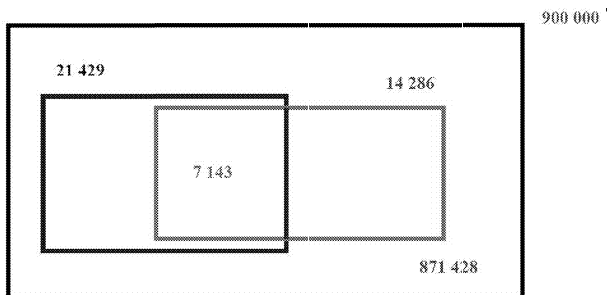
počet čísiel deliteľných oboma číslami 42 i 63 ($99\,999 : 126 = 793,64\dots$) je 793.

Pre čísla od 100 000 až po 999 999 (teda šesťciferných), ktorých je 900 000, platí

počet čísiel deliteľných 42 je $23\,809 - 2\,380 = 21\,429$,

počet čísiel deliteľných 63 je $15\,873 - 1\,587 = 14\,286$;

počet čísiel deliteľných 42 i 63 je $7\,936 - 793 = 7\,143$ (tie sú vlastne počítané dvakrát, aj medzi deliteľné 42 aj medzi deliteľné 63; pozri obr. 1.



Obr. 1

Z uvedenej predstavy vyplýva, že počet tých prirodzených šesťciferných čísiel, ktoré nie sú deliteľné ani jedným z čísiel 42, 63, je

$$900\,000 - 21\,429 - 14\,286 + 7\,143 = 871\,428.$$

Uvažovať a zapisovať

Úloha 3

Nájdite trojciferné prirodzené číslo, ktoré po vydelení tromi za sebou idúcimi jednocifernými číslami dáva súčet zvyškov 21.

Riešenie. Nech hľadané číslo je m , tri za sebou idúce čísla p , $p + 1$, $p + 2$. Podľa zadania úlohy má platiť: $m = k \cdot p + z_1$, kde $z_1 < p$; $m = r \cdot (p+1) + z_2$, kde $z_2 < p+1$; $m = s \cdot (p+2) + z_3$, kde $z_3 < p+2$; súčasne $z_1 + z_2 + z_3 = 21$ a teda (sčítaním predchádzajúcich nerovníc) $21 < 3 \cdot p + 3$, t.j. $7 < p + 1$ a tým $6 < p$, teda $p \in \{7, 8, 9\}$. Ale $(p + 2)$ musí byť jednociferné prirodzené číslo, tak $p = 7$. To znamená, že $p + 1 = 8$ a $p + 2 = 9$. Vzťahu $z_1 + z_2 + z_3 = 21$ pri splnení požadovaných podmienok vyhovuje iba $6 + 7 + 8$. Pre hľadané číslo m teda platí

$$(m = k \cdot 7 + 6) \wedge (m = r \cdot 8 + 7) \wedge (m = s \cdot 9 + 8),$$

a teda aj

$$(m + 1 = k \cdot 7 + 7) \wedge (m + 1 = r \cdot 8 + 8) \wedge (m + 1 = s \cdot 9 + 9),$$

t.j.

$$(m + 1 = k' \cdot 7) \wedge (m + 1 = r' \cdot 8) \wedge (m + 1 = s' \cdot 9).$$

To ale znamená, že $m + 1$ je spoločný násobok čísel 7, 8, 9. My ale hľadáme takové trojciferné číslo. Skúsime najmenší spoločný násobok a $(7, 8, 9) = 504$. Teda $m = 504 - 1 = 503$. Najbližší ďalší príslušný násobok už nie je trojciferný.

Hľadané trojciferné číslo s požadovanými vlastnosťami je len číslo 503.

Nikdy sa to nestane (neexistencia)

Úloha 4

Dokážte, že neexistuje prirodzené číslo n , pre ktoré by $n^2 + n + 1$ bolo druhou mocninou niektorého prirodzeného čísla.

Riešenie. Nech také n , p prirodzené existujú. Potom by muselo platiť $n^2 + n + 1 = p^2$ a súčasne aj $p > n$, teda $n + 1 = p^2 - n^2$. To znamená, že

$$n + 1 = (p - n) \cdot (p + n).$$

Teraz môžeme uvažovať napríklad takto:

a) ak $p = 1$, tak $n + 1 = (1 - n)(1 + n)$, teda $1 - n = 1$, t.j. $a = 0$, to ale nevyhovuje (0 nie je prirodzené číslo).

b) ak $p > 1$, tak $n + p > n + 1$, a preto $(p - n)(p + n) > n + 1$ (vieme, že $p > n$), teda neplatí $n + 1 = (p - n)(p + n)$.

Z toho je vidieť, že zvolený predpoklad existencie prirodzených čísel s požadovanou vlastnosťou vedie vždy k sporu. Neexistujú také p , n prirodzené tak, aby platilo

$$n^2 + n + 1 = p^2.$$

Záver

Známy didaktik a vysokoškolský profesor György Pólya (1887 – 1985) hovorieval: *Učenie začína činnosťou a jednaním, postupuje k slovám a predstavám a malo by končiť žiadanými algoritmami rozumového uvažovania. Učiteľom matematiky navrhol: Učte žiakov rozmýšľať.* Študentom

naznačil a mnohých aj presvedčil: *Kráša matematiky je v tom, nachádzať pravdu bez ťažkostí.* Naozaj rád a veľmi často citujem jeho pedagogický odkaz: *Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tú prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktorá môže byť potom používaná na štúdium ktoréhokoľvek predmetu.* Výrazne som si medzi učiteľské zákony zapísal: *Vyučovanie nie je veda; to je umenie. Ak by vyučovanie bola veda, tak bude obsahovať najlepší spôsob vyučovania a každý človek by sa musel učiť tým spôsobom.*



György Pólya

Vyučovanie nie je veda, je tam veľa možností pre osobné rozdiely ... Možno aj takto dospejeme k tomu, aby sa vo vyučovaní matematiky na našich školách uplatňovala aspoň trochu didaktického konštruktivismu.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádzame riešenie úloh 147 a 148, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (17.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 147

Řešte kvadratickou rovnicí

$$x^2 - (2p + 3q)x + pq^2 = 0$$

s neznámou x a s celočíselnými parametry p ($p \neq 0$) a q , jejíž kořeny jsou tvaru $\frac{c}{p}$ a c , kde c je celé číslo. Zjistěte všechny možné číselné hodnoty kořenů.

Stanislav Trávníček

Řešení:

Podle vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice platí

$$2p + 3q = \frac{c}{p} + c \quad \text{a} \quad pq^2 = \frac{c}{p} c,$$

což po úpravě dává

$$c(p + 1) = p(2p + 3q) \quad \text{a} \quad c^2 = (pq)^2. \quad (1)$$

Pokud $c = pq$, potom dosazením do první rovnice (1) dostáváme po úpravě

$$(p - 2)(q - 2) = 4.$$

Všechny rozklady čísla 4 na součin dvou celých čísel probereme v tabulce (podle podmínek úlohy $p - 2 \neq -2$):

$p - 2$	-4	-1	1	2	4
$q - 2$	-1	-4	4	2	1
p	-2	1	3	4	6
q	1	-2	6	4	3
$c = pq$	-2	-2	18	16	18
$\frac{c}{p} = q$	1	-2	6	4	3

Obdobně, pokud $c = -pq$, potom dosazením do první rovnice (1) dostáváme po úpravě

$$(p + 4)(q + 2) = 8.$$

Všechny rozklady čísla 8 na součin dvou celých čísel probereme v tabulce (podle podmínek úlohy $p + 4 \neq 4$):

$p + 4$	-8	-4	-2	-1	1	2	8
$q + 2$	-1	-2	-4	-8	8	4	1
p	-12	-8	-6	-5	-3	-2	4
q	-3	-4	-6	-10	6	2	-1
$c = -pq$	-36	-32	-36	-50	18	4	4
$\frac{c}{p} = -q$	3	4	6	10	-6	-2	1

Daná kvadratická rovnice má pro hodnoty parametrů p, q ze třetího a čtvrtého řádku předchozích tabulek kořeny, které jsou zapsány na odpovídajícím pátém a šestém řádku (celkem 12 možností).

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Vladimír Pavel* z Blovic.

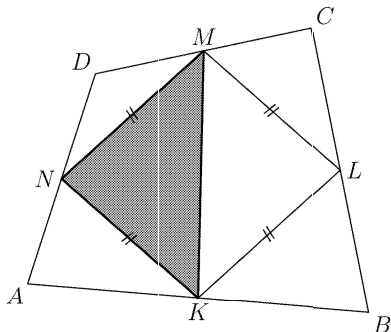
Úloha 148

Označme K , L , M a N středy stran AB , BC , CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že z úseček KL , KM a KN lze sestrojit trojúhelník a vyjádřete jeho obsah pomocí obsahu čtyřúhelníku $ABCD$.

Jaroslav Švrček

Řešení:

Střední příčky KL a MN trojúhelníků ABC a ACD jsou rovnoběžné se (společnou) stranou AC , proto jsou rovnoběžné i navzájem. Podobně ukážeme, že $KN \parallel LM$. Tedy $KLMN$ je rovnoběžník (tzv. *Varignonův* rovnoběžník). Z obrázku je patrné, že trojúhelník KMN má strany délek $|MN| = |KL|$, $|KM|$ a $|KN|$, což dokazuje, že z úseček KL , KM a KN lze sestrojit trojúhelník.



Obsahy trojúhelníků AKN , BKL , CLM , DMN jsou rovny jedné čtvrtině obsahu trojúhelníků ADB , BAC , CBD , DAC . Proto je součet obsahů trojúhelníků AKN , BKL , CLM , DMN roven polovině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$, tedy i obsah rovnoběžníku $KLMN$ je roven polovině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$. Obsah trojúhelníku KMN je roven polovině obsahu rovnoběžníku $KLMN$, tedy jedné čtvrtině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Vladimír Pavel* z Blovic.

Pavel Calábek