

MATEMATIKA

Využití invariantů a poloinvariantů v gradovaných řetězcích úloh

RADEK HORENSKÝ

Gymnázium, Sternberk

Tento článek volně navazuje na příspěvek [2], v němž se naši čtenáři mohli seznámit s tematikou invariantů a poloinvariantů. V úvodu připomeňme definice obou těchto pojmů.

Definice 1

Invariantem rozumíme vlastnost nebo měřitelnou veličinu, která se při jisté transformaci, resp. při opakování určitého postupu, *nemění*.

Definice 2

Poloinvariantem rozumíme měřitelnou veličinu, která se při jisté transformaci, resp. při opakování určitého postupu, *nezvětšuje*, resp. *nezmenšuje*.

Uvedme nově pojem gradovaného řetězce matematických úloh, který byl zaveden v práci [6].

Definice 3

Nechť n je přirozené číslo ($n > 1$). *Gradovaným řetězcem matematických úloh* rozumíme uspořádanou n -tici $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ úloh, kde P_j ($j \geq 2$) tematicky navazuje na všechny úlohy P_i pro $1 \leq i < j$, a přitom řešení úlohy P_j vyžaduje objevení a zvládnutí nových poznatků (nepoužitých v P_i). Přirozené číslo n nazýváme *stupněm* gradovaného řetězce matematických úloh.

Pro ilustraci uvedme nejprve několik příkladů invariantů a poloinvariantů.

- *Přičítáme-li k danému lichému číslu sudá čísla, dostaneme vždy výsledný součet, který je liché číslo.*

[Parita výsledku zůstává vždy stejná, tato vlastnost je tedy invariantem.]

- *Měníme-li několik bankovek nižší hodnoty za odpovídající bankovky s hodnotou vyšší, přičemž výsledná částka zůstává stejná, je k tomuto vyjádření potřeba stále menšího počtu bankovek.*

[Počet bankovek je tedy poloinvariantem. Navíc je tento počet vyjádřen přirozeným číslem, je tedy logické, že po určitém počtu transakcí musíme dojít do situace, kdy nelze ve vyměňování pokračovat, a to bez ohledu na to, jaké bankovky jsme na počátku měli.]

- *Zvětšíme-li o stejné kladné číslo jmenovatel i čítec daného zlomku většího než 1, dostaneme opět zlomek, jehož hodnota je větší než 1.*

[Tato vlastnost (být větší než 1) je tedy invariantem. (Pochopitelně je invariantem také rozdíl čítele a jmenovatele daného zlomku.) Při opakování dané operace dostaneme zlomky, jejichž hodnota se postupně zmenšuje. Hodnota zlomku je v tomto ohledu proto poloinvariantem. Důsledkem zmíněného invariantu a poloinvariantu je samozřejmě fakt, že daná posloupnost zlomků má limitu (posloupnost je klesající a zdola omezená).]

Nyní ukážeme, jakým způsobem lze využít invariantů a poloinvariantů při řešení některých náročnějších úloh školské matematiky. V první části bude prezentován gradovaný řetězec tří autorových úloh, z nichž poslední dvě úlohy byly využity v kategorii A 58. ročníku matematické olympiády.

Příklad 1

V každém vrcholu pravidelného dvanáctiúhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout do jediného vrcholu dvanáctiúhelníku.

Řešení. Označme vrcholy daného dvanáctiúhelníku po řadě čísly 1 až 12. Přemístíme-li dvě mince na sousední pole, potom se součet čísel „pod

oběma mincemi“ nezmění (nenastane-li přesun jedné mince mezi vrcholy s čísly 1 a 12) nebo se daný součet zvětší či zmenší právě o 12. Pokud by bylo možno přemístit všechny mince na jedinou hromádku, byl by celkový součet čísel pod všemi mincemi násobkem dvanácti. Jejich součet

$$1 + 2 + 3 + \dots + 12 = 78$$

však násobkem dvanácti není, při dělení dvanácti dává zbytek 6. Zbytek při dělení 12 je tedy invariantem. Dané mince nelze proto přemístit do jediného vrcholu.

Příklad 2 (58. ročník MO, A-I-6)

V každém vrcholu pravidelného 2008-úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:

- a) na 8 hromádek po 251 minci,
- b) na 251 hromádek po 8 mincích.

Řešení. Očíslujme vrcholy daného mnohoúhelníku po řadě čísly 1, 2, ..., 2008. Přiřadíme každé minci číslo vrcholu, v němž se (aktuálně) nachází. Všimněme si, jak se změní součet S všech 2008 čísel přiřazených jednotlivým mincím, když povoleným způsobem přesuneme libovolnou dvojici mincí. Nastane-li přesun mince mezi vrcholy s čísly 1 a 2008, hodnota součtu S se zřejmě nezmění, neboť jedné z přesouvaných mincí se přiřazené číslo o 1 zvětší, druhé přesouvané minci se přiřazené číslo o 1 zmenší (čísla přiřazená ostatním mincím, jež zůstaly na místě, se nezmění).

Pokud však přesun mezi vrcholy s čísly 1 a 2008 nastane (a nejde-li přitom o pouhou výměnu dvou mincí mezi vrcholy 1 a 2008), součet S se změní na hodnotu $S \pm 2008$, neboť čísla přiřazená přesouvaným mincím se buď obě zvětší, nebo obě zmenší, a to v obou případech o hodnoty 1 a 2007. Po libovolném počtu přesunů dvojic mincí se hodnota S z počáteční hodnoty $S_0 = 1 + 2 + \dots + 2008$ změní na hodnotu $S = S_0 + 2008k$, kde k je vhodné celé číslo. Snadno určíme hodnotu $S_0 = 1004 \cdot 2009$.

a) Máme-li získat 8 hromádek po 251 minci, musí být výsledný součet S násobkem 251. To je však splněno vždy, neboť $S = 251(8k + 4 \cdot 2009)$. Stačí proto nalézt aspoň 1 postup, jak mince dle daných podmínek přemístit.

Budeme-li mince z dvojic vrcholů 1 a 2 008, 2 a 2 007, atd. přesouvat vždy v opačném směru, snadno vytvoříme 8 hromádek o 251 minci např. ve vrcholech 1 001, 1 002, 1 003, $\dots$, 1 008.

b) Ukážeme, že získat 251 hromádek po 8 mincích nelze. Kdybychom připustili, že po určitém počtu přesunů dvojic mincí vznikne 251 hromádek po 8 mincích, musel by součet S být násobkem 8. Číslo $2\,008k$ násobkem osmi je, číslo $1\,004 \cdot 2\,009$ nikoliv. Tím je tvrzení o neexistenci přeskupení daného počtu mincí dokázáno.

Příklad 3 (58. ročník MO, A-III-5)

V každém z vrcholů pravidelného n -úhelníku $A_1 A_2 \dots A_n$ leží určitý počet mincí: ve vrcholu A_k je to právě k mincí, $1 \leq k \leq n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k , $1 \leq k \leq n$, bude ve vrcholu A_k ležet $n + 1 - k$ mincí.

Řešení. Ukážeme, že to lze provést pro $n = 6k + 1$ nebo pro $n = 6k - 1$. Uvažujme součin aktuálního počtu mincí ve vrcholu a indexu daného vrcholu. Označme S součet všech těchto součinů. Na začátku je to

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + n \cdot n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

na konci

$$S' = 1 \cdot n + 2(n-1) + \dots + n \cdot 1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Nenastane-li přesun mince mezi vrcholy s čísly 1 a n , hodnota součtu S se nezmění, neboť jedna z přesouvaných mincí hodnotu S o 1 zvýší, druhá z mincí hodnotu S o 1 sníží. Pokud však přesun mezi vrcholy s čísly 1 a n nastane (a nejde-li přitom o pouhou výměnu dvou mincí mezi vrcholy 1 a n), součet S se změní na hodnotu $S \pm n$, neboť obě přesouvané mince hodnotu S buď zvětší, nebo zmenší, a to v obou případech o hodnoty 1 a $n - 1$. Rozdíl konečného a počátečního stavu $S - S'$ tedy musí být násobkem n . Tento rozdíl

$$S - S' = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

je násobkem n pouze tehdy, je-li $n - 1$ nebo $n + 1$ násobkem 6.

Současně je však třeba ukázat, že v takovém případě toto přeskupení lze provést. Jednou z možností je např. následující postup. Přesuneme $n - 1$ mincí z vrcholu n na vrchol 1 (o 1 pole, přes rozhraní), $n - 3$ mincí z vrcholu $n - 1$ na vrchol 2 (o 3 pole, přes rozhraní) atd. Celkem provedeme

$$\begin{aligned} & (n - 1) \cdot 1 + (n - 3) \cdot 3 + \dots + 2 \cdot (n - 2) = \\ & = n \cdot (1 + 3 + \dots + (n - 2)) - (1^2 + 3^2 + \dots + (n - 2)^2) = \\ & = n \cdot (n - 1)^2 - \frac{n(n - 1)(n - 2)}{6} = n \cdot \frac{(n - 1)(5n - 4)}{6} \end{aligned}$$

tahů. V obou případech, tj. pro $n = 6k + 1$ i pro $n = 6k - 1$ nabývá zlomek $\frac{1}{6}(n - 1)(5n - 4)$ celočíselných hodnot, celkový počet tahů je tedy násobkem n . Všechny tyto tahy však lze kompenzovat pohybem libovolné mince v opačném směru o příslušný počet celých kol.

Didaktický komentář k uvedenému řetězci úloh

- První z trojice úloh byla motivační, kdy základem řešení bylo nalezení daného invariantu.
- Druhá úloha už vyžaduje (kromě řešení obdobného problému v jedné z částí) také nalezení vhodného způsobu přemísťování mincí, a to ve druhé části.
- Třetí, závěrečná úloha vyžaduje od studentů již abstraktní myšlení a logicky správně podložené zdůvodnění, že dané přemístění je pro zjištěné hodnoty možné.

Ve druhé části ukážeme řešení několika dalších náročnějších úloh využívajících principu invariantů a poloinvariantů.

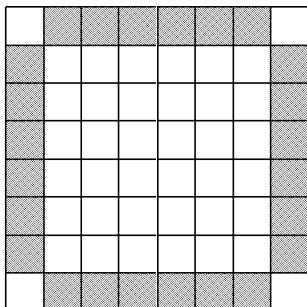
Příklad 4

Na každém poli šachovnice 8×8 je položen černý žeton, jen v prvním řádku jsou střídavě (pravidelně) umístěny bílé a černé žetony. Máme možnost zvolit si libovolnou vodorovnou, svislou nebo šikmou řadu (tj. řadu rovnoběžnou s některou z daných diagonál) a změnit barvu všech žetonů v dané řadě na opačnou. Rozhodněte, zda můžeme po konečném počtu takových operací docílit toho, že:

- a) všechna pole po obvodu šachovnice budou pokryta žetony stejné barvy (pole uvnitř mohou být pokryta libovolně).

- b) všechna bílá pole šachovnice budou pokryta žetony bílé barvy
a všechna černá pole šachovnice budou pokryta žetony černé barvy.

Řešení. Ukážeme, že taková situace nastat nemůže. Uvažujme všechna pole na obvodu šachovnice vyjma rohových polí. (Viz obrázek.)



Ať zvolíme řadu libovolně, vždy tato řada bude obsahovat sudý počet z těchto uvažovaných polí, a to 6, 2 nebo 0. Při každém takovém přebarvení polí zůstane zachována parita počtu bílých i černých polí v této oblasti. Na počátku je však na těchto polích umístěno 21 černých žetonů a 3 žetony bílé. V každém kroku tedy zůstává počet žetonů dané barvy vyjádřen lichým číslem. Nelze tak dostat 24 žetonů stejné barvy, jak by bylo zapotřebí u pokrytí obvodu jednotnou barvou.

Nelze proto ani docílit situace, kdy by žetony na šachovnici pravidelně měnily svou barvu, i v tomto případě by na uvažovaných polích musel být sudý počet bílých a černých polí, což však nelze.

Příklad 5

Na každém poli tabulky 2009×2009 je zapsáno nějaké celé číslo, přičemž součet všech čísel v tabulce je 2009. V každém kroku můžeme změnit znaménka u každého z čísel v libovolné řadě či sloupci. Rozhodněte, zda můžeme po konečném počtu takových operací získat situaci, kdy v žádném řádku ani sloupci není záporný součet.

Řešení. Je-li součet v každém řádku i sloupci nezáporný, je úloha vyřešena. V opačném případě vybereme řadu či sloupec, kde je součet čísel záporný. Po změně znamének bude tento součet kladný a díky tomu se součet čísel

v celé tabulce zvýší. Vzhledem k tomu, že tento součet nemůže neustále narůstat (je limitován součtem absolutních hodnot čísel z původní tabulky), musíme proto po konečném počtu kroků získat tabulku s nezápornými součty v každém řádku i sloupci.

Příklad 6

Ve třídě má každý z žáků nejvýše 3 nepřátele (vztah nepřátelství je symetrický, je-li A nepřítelem B, je i B nepřítelem A). Rozhodněte, zda lze rozdělit všechny žáky této třídy do dvou skupin tak, že v každé skupině nebude mít nikdo z nich více než jednoho nepřítele.

Řešení. Rozdělme žáky libovolně na dvě skupiny. Jestliže ani v jedné skupině není nikdo společně se dvěma a více nepřáteli, jsme hotovi. V opačném případě vybereme takového žáka, který je ve skupině s více než jedním nepřítelem a přemístíme ho do skupiny druhé. Budeme-li tento postup opakovat, docílíme po konečném kroku rozdělení, které již odpovídá daným podmínkám.

Stanovme nejprve počet nepřátelských dvojic v jednotlivých skupinách. Přemístíme-li žáka z první skupiny do druhé, poklesne počet nepřátelských dvojic v této skupině minimálně o 2. Naopak ve druhé skupině vznikne maximálně jedna nepřátelská dvojice navíc. Celkově se proto počet nepřátelských dvojic zmenší.

Vzhledem k tomu, že tento počet nemůže klesat do nekonečna, musíme po konečném počtu kroků docílit uspořádání, kdy v žádné skupině není žák s více než jedním nepřítelem.

Poznámka 1. Rozdělení žáků do dvou skupin není samozřejmě jednoznačné, takových rozdělení může být více. Ve všech případech jsou ale podmínky zadání vždy splněny.

Poznámka 2. Danou úlohu je možno vyřešit i logickou úvahou o přidělování žáků do dvou skupin. Libovolně vybereme po jednom žáku do každé skupiny. Každého dalšího žáka přiřadíme vždy do té skupiny, kde nejsou dva jeho nepřátelé (taková skupina vždy existuje, protože počet nepřátel je nejvýše tři). Opakováním tohoto postupu dostaneme rozdělení, které odpovídá podmínkám ze zadání.

Příklad 7

V rovině je dáno celkem 2 008 bodů. Dokažte, že existuje 1 004 disjunktních úseček, které mají krajní body v těchto daných bodech.

Řešení. Spojíme-li libovolným způsobem dané body do dvojic, lze vypočítat daný součet velikostí takových úseček. Jestliže spolu úsečky nemají žádný společný bod, jsme hotovi. V opačném případě vyberme takové dvě úsečky, které mají společný průsečík. Necht' jsou to úsečky KL a MN . Nahraďme tuto dvojici úseček jinou dvojicí, a to KM a LN . Protože dané body jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku $KMLN$, bude dle trojúhelníkové nerovnosti součet délek úseček KM a LN menší než součet délek úseček KL a MN . Součet délek všech 1 004 úseček se tedy zmenší.

Protože existuje jen konečný počet možností, jak body na počátku pospojovat, existuje také jen konečný počet možností pro daný součet délek všech těchto 1 004 úseček. V určité fázi proto musíme po konečném počtu kroků dojít k situaci, kdy jsou všechny úsečky disjunktní.

Příklad 8

Ve třídě, kde jsou jen studentky s blond nebo s černými vlasy, má každá dívka lichý počet kamarádek. První den se rozhodne první dívka, že přizpůsobí barvu svých vlasů většině svých kamarádek, tj. mají-li převahu černovlasé kamarádky, rozhodne se pro černou barvu vlasů, v opačném případě zvolí blond vlasy. Druhý den se ke stejnému kroku rozhodne druhá dívka, atd. (Poté, co danou volbu provede i poslední dívka, pokračuje opět dívka první.) Dokažte, že po jisté době si už žádná z dívek nebude své vlasy přebarvovat na opačnou barvu.

Řešení. Uvažujme všechny dvojice kamarádek, které mají opačnou barvu vlasů. Počet takových dvojic označme S . Pokud se rozhodne dívka pro změnu barvy svých vlasů, znamená to, že měla původně více kamarádek s jinou barvou vlasů než kamarádek se stejnou barvou vlasů. Po obarvení se tedy počet S dvojic kamarádek s různou barvou vlasů musí nutně snížit. Vzhledem k tomu, že je tento počet vyjádřen nezáporným celým číslem, nemůže se zmenšovat do nekonečna. Proto po určité době musí dosáhnout své minimální hodnoty a žádná z dívek si už nebude přebarvovat své vlasy.

Příklad 9

Jsou dány číselné posloupnosti (a_n) a (b_n) , které vyhovují následujícím předpisům:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$$

pro všechna přirozená n , kde $a_1 = 2009$ a $b_1 = 1$. Dokažte, že obě posloupnosti mají tutéž limitu, a určete ji.

Řešení. K vyřešení úlohy nám poslouží nalezení vhodného invariantu a poloinvariantu. Snadno se vidí, že součin odpovídajících členů obou posloupností zůstává konstantní, platí tedy

$$a_{n+1}b_{n+1} = a_nb_n = \dots = a_1b_1 = 2009.$$

Ze zadání je patrné, že všechny členy obou posloupností jsou kladná reálná čísla. Zkoumáme-li rozdíl odpovídajících členů těchto posloupností, dostaneme po úpravách

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n + b_n)^2 - 4a_nb_n}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)}.$$

Tento rozdíl je tedy stále nezáporný, tj. pro všechna přirozená n platí nerovnost $a_n \geq b_n$. (Daný vztah vyjadřuje nerovnost mezi aritmetickým a harmonickým průměrem pro dvojici kladných reálných čísel a_n a b_n .)

Pro všechna přirozená čísla n také platí

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n,$$

$$b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = \frac{2}{\frac{1}{b_n} + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{2}{\frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_n}} = b_n.$$

Posloupnost (a_n) je tedy nerostoucí a současně zdola omezená (každou z hodnot b_i , např. b_1) a posloupnost (b_n) je neklesající a současně shora omezená (každou z hodnot a_i , např. a_1). Obě posloupnosti proto mají vlastní (konečné) limity a a b .

Pro všechna kladná reálná čísla a_n a b_n platí

$$\frac{(a_n - b_n)}{(a_n + b_n)} < 1,$$

tudíž

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2(a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)}{(a_n + b_n)} \cdot \frac{(a_n - b_n)}{2} < \frac{(a_n - b_n)}{2},$$

tj.

$$a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{(a_1 - b_1)}{2^n} = \frac{2\,008}{2^n}.$$

Výraz na pravé straně posledního vztahu se s rostoucím n blíží k nule, proto se také rozdíl $a_{n+1} - b_{n+1}$ blíží k nule, tj. pro limity a, b obou posloupností platí $a = b$. Tuto (společnou) limitu snadno určíme ze vztahu

$$ab = a_1b_1 = 2\,009,$$

tj.

$$a = b = \sqrt{2\,009}.$$

K procvičení uvedené problematiky uvádíme na závěr dva příklady, které jsou určeny čtenářům.

Příklad 10 (O nevěrném námořníkovi)

Námořník Max má v každém přístavu 1 ženu. Poté, co už byl dlouho na jednom místě, opustil Marii a jedno pondělí se vydal na své bárce do přístavu, který byl od výchozího přístavu nejvíce vzdálený. Po šestidenní plavbě zakotvil v cílovém přístavu a celou neděli pak strávil u jiné ženy. V pondělí ráno opět vyplul na moře a zamířil znovu do aktuálně nejvzdálenějšího přístavu. Na moři strávil opět šest dní a celou neděli strávil s další ženou, atd. Marie se trápí samotou. Poradte Marii, jak dlouho má na Maxe čekat.

Poznámka: Žádné dva přístavy nejsou od sebe stejně vzdálené (vždy existuje jen jediný přístav, který je nejvzdálenější).

[Ukažte, že posloupnost vzdáleností je neklesající, přesněji rostoucí a od jistého členu konstantní. Max se buď navrátí za dva týdny, nebo se nikdy nevrátí.]

Příklad 11 (Pro policejní akademii)

Zlodějka Mína každého dne večer, těsně před zavírací dobou, přepadne ve městě poštu a v noci se přesune do nejbližšího sousedního města, v němž se nachází pošta. Následující den (opět před zavírací dobou) svůj čin zopakuje v daném městě a opět se přesouvá do aktuálně nejbližšího města, atd.

V pondělí 15. června 2009 byla již podruhé za poslední dobu vyloupena pošta ve městě M. V obou případech byla identifikována jako pachatelka přepadení Mína. Policie dle hesla „třikrát a dost“ se proto rozhodla danou poštu ve městě M hlídat. Kdy byla Mína zatčena?

Poznámka: Žádná dvě města nejsou od sebe stejně vzdálená (vždy existuje jen jediné město, které je nejbližší).

[Ukažte, že posloupnost vzdáleností je nerostoucí, přesněji klesající a od jistého členu konstantní. Mína se ve městě M objevila už podruhé, poslední dvě vzdálenosti jsou tedy stejné a Mína bude v městě M opět za dva dny.]

Literatura

- [1] *Engel, A.*: Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York, Inc. 1998.
- [2] *Horenský, R.*: Invarianty a poloinvarianty ve školské matematice. MFI, roč. 17, 2007/08, č. 2, str. 73-80, Olomouc.
- [3] *Kanel-Belov, A. J. – Kovaldži, A. K.*: Kak rešajut nestandartnyje zadači (rusky). MCMNO, Moskva 1997.
- [4] *Kurliandčik, L. D. – Fomin, D. V.*: Etjudy o poluinvariante (rusky). KVANT, 1989, č. 7, str. 63-68, Moskva.
- [5] *Makrides, G. a kol.*: Objevování, motivace a podpora matematických talentů na evropských školách. MATH.EU Projekt, 2006.
- [6] *Švrček, J.*: Tvorba a využití gradovaných řetězců matematických úloh. Vydavatelství UP, Olomouc 2008.

59. ročník Matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z9

Z–9–1

Dostal jsem zadána dvě přirozená čísla. Poté jsem je obě zaokrouhlil na desítky. Která čísla jsem měl zadána, pokud víte, že:

- podíl zaokrouhlených čísel je stejný jako podíl čísel původních,
- součin zaokrouhlených čísel je o 295 větší než součin původních čísel,
- součet zaokrouhlených čísel je o 6 větší než součet původních čísel.

L. Šimůnek

Z-9-2

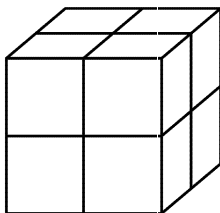
Pat a Mat byli na výletě. Vyšli ráno po osmé hodině, kdy velká a malá ručička na Patových hodinkách ležely v opačných polopřímkách. V opačných polopřímkách byly ručičky Patových hodinek, i když se oba přátelé před polednem vrátili. Mat dobu výletu měřil na stopkách. Určete i vy s přesností na sekundy, jak dlouho trvala cesta. Předpokládejte, že Patovy hodinky a Matovy stopky šly přesně.

M. Volfová

Z-9-3

Na obrázku je krychle o hraně 2 cm tvořená osmi krychličkami s hranou 1 cm. Osm stěn krychliček je obarveno černě, ostatní jsou bílé. Přitom z nich lze složit krychli, jejíž povrch je bílý. Kolika způsoby mohou být krychličky obarveny? Předpokládejte, že stejně obarvené krychličky nedokážeme odlišit, mohou se tedy zaměnit.

K. Pazourek

**Z-9-4**

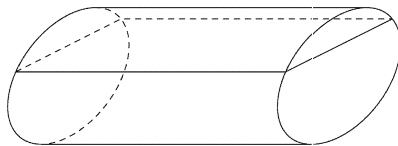
Adam a Eva dostali košík, ve kterém bylo 31 jablek. První den snědla Eva tři čtvrtiny toho, co snědl Adam. Druhý den snědla Eva dvě třetiny toho, co snědl též den Adam. Druhého dne večer byl košík prázdný. Kolik jablek snědla z košíku Eva? (Adam i Eva jablka jedí celá a nedělá se o ně.)

L. Hozová

Z-9-5

Řidič převáží mléko v cisterně tvaru válce. Průměr podstavy je 180 cm, délka cisterny je 4 m. Kolik hl mléka je v cisterně, jestliže je naplněna do tří čtvrtin průměru?

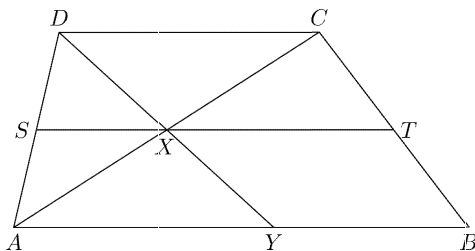
M. Krejčová



Z-9-6

V lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD délky 7 cm a 4 cm jsou body S a T středy stran AD a BC , viz obrázek. Bod X je průsečík úseček AC a ST , bod Y je průsečík úsečky AB a přímky DX . Obsah čtyřúhelníku $AYCD$ je 12 cm^2 . Vypočítejte obsah lichoběžníku $ABCD$.

M. Dillingerová



KATEGORIE Z8

Z-8-1

Napište číslo 75 jako součet několika po sobě bezprostředně jdoucích přirozených čísel. Najděte aspoň čtyři řešení.

M. Volfová

Z-8-2

Tři kamarádky se sešly na chalupě a vyrazily na houby. Našly celkem 55 hřibů. Po návratu si udělaly smaženici, rozdělily ji na čtyři stejné porce a pozvaly na ni kamaráda Pepu. Líba dala na smaženici šest ze svých hřibů, Maruška osm a Šárka pět. Každé pak zbyl stejný počet hřibů. Pepa jim daroval bonboniéru, kde bylo 38 bonbónů, a řekl, že se mají spravedlivě rozdělit podle toho, jak přispěly na jeho jídlo.

1. Kolik hřibů našla každá?
2. Jak se měly podle Pepy podělit?

M. Volfová

Z-8-3

Sedadla v divadelním sálu jsou rozdělena do tří kategorií podle jejich vzdálenosti od jeviště. „I. místa“ jsou nejbližší jevišti, tvoří dvě pětiny kapacity sálu a prodávají se za 220 Kč. „II. místa“ tvoří další dvě pětiny sálu a prodávají se za 200 Kč. Zbývající „III. místa“ se prodávají za 180 Kč. Před zahájením předprodeje na slavnostní premiéru bylo rozdáno 150 vstupenek zdarma zvaným hostům. Vstupenky byly rozdávány postupně od předních míst sálu dozadu. Všechny ostatní vstupenky pak byly prodány. Kdyby se však volné vstupenky rozdávaly postupně od zadních míst dopředu, byla by tržba o 4320 Kč větší. Kolik míst bylo v sálu?

L. Šimůnek

Z-8-4

Dostali jsme krychli, která měla délku hrany vyjádřenou v centimetrech celým číslem. Všechny její stěny jsme obarvili na červenou a poté jsme ji rozřezali beze zbytku na krychličky o hraně 1 cm.

- Lukáš tvrdí, že krychliček se dvěma obarvenými stěnami je desetkrát více než těch se třemi obarvenými stěnami.
- Martina říká, že krychliček se dvěma obarvenými stěnami je patnáctkrát více než těch se třemi obarvenými stěnami.

Pravdu má však pouze jeden — kdo? A kolik měřila hrana původní krychle?

L. Šimůnek

Z-8-5

Ze čtverce o straně 6 cm odřízneme od každého vrcholu shodné rovno-ramenné pravoúhlé trojúhelníky tak, aby se obsah čtverce zmenšil o 32 %. Jakou velikost mají odvěsny?

M. Krejčová

Z-8-6

Ve dvou místnostech vzdělávacího centra se konaly přednášky. Průměrný věk osmi lidí přítomných v první místnosti byl 20 let, průměrný věk dvanácti lidí ve druhé místnosti byl 45 let. V průběhu přednášky odešel jeden účastník a tím se průměrný věk všech osob v obou místnostech zvýšil o jeden rok. Kolik let bylo účastníkovi, který odešel?

L. Hozová

KATEGORIE Z7

Z-7-1

Do prodejny vína se v noci vloupal kocour. Vyskočil na polici, na níž byly v dlouhé řadě vyrovnány lahve s vínem — první třetina lahví zkraje stála po 160 Kč, následující třetina lahví stála po 130 Kč a poslední třetina po 100 Kč. Nejprve kocour shodil na zem lahev za 160 Kč, která stála úplně na začátku řady, a pak postupoval dále a shazoval bez vynechání jednu lahev za druhou. Než ho to přestalo bavit, srazil 25 lahví a ty se všechny rozbily. Ráno majitel zalitoval, že kocour nezačal se svým řaděním na druhém okraji police. I kdyby totiž rozbil stejný počet lahví, byla by škoda o 660 Kč menší. Kolik lahví bylo původně na polici?

L. Šimůnek

Z-7-2

Na tabuli jsou napsaná tři přirozená čísla a , b , c , pro která platí:

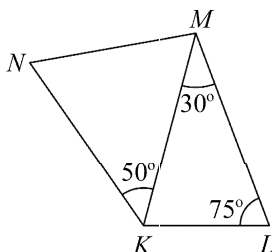
- největší společný dělitel čísel a , b je 15,
- největší společný dělitel čísel b , c je 6,
- součin čísel b , c je 1800,
- nejmenší společný násobek čísel a , b je 3150.

Která to jsou čísla?

L. Šimůnek

Z-7-3

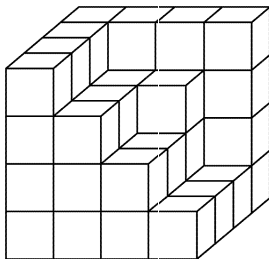
Ve čtyřúhelníku $KLMN$ známe vyznačené úhly a víme, že platí $|KN| = |LM|$. Jaká je velikost úhlu KNM ?



L. Hozová

Z-7-4

Krychle byla složena z 64 krychlíček o hraně 2 cm. Pak bylo několik krychlíček z viditelné strany odebráno, viz obrázek.



1. Jaký je objem a jaký povrch získaného tělesa?
2. Těleso bylo po celém povrchu natřeno červeně, pak rozebráno na původní krychličky. Kolik z nich mělo 6, kolik 5, 4, 3, 2, 1 či žádnou stěnu červenou?

M. Volfová

Z-7-5

Na číselné ose jsou znázorněna čísla $12x$ a $-4x$. Znázorni na této ose nulu a číslo x .



M. Petrová

Z-7-6

Doplňte místo hvězdiček číslice tak, aby součet výsledků následujících dvou příkladů byl 5842:

$$\begin{array}{r} *2*7 \\ 3*4* \\ \hline 4*0* \end{array} \quad \begin{array}{r} 2*9* \\ -*254 \\ \hline *5** \end{array}$$

Úloha má více řešení, určete alespoň dvě.

M. Dillingerová

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 155 a 156, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle tohoto (18.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 155

Mařenka se podívala na Pepovy známky z matematiky. Zjistila, že kdyby se mu nezapočítaly dvě nejlepší známky, zhoršil by se jeho průměr známek o 0,5. Aby se mu průměr naopak zlepšil o 0,5, nesměla by mu započítat osm nejhorších známek. Jaký by měl Pepa průměr známek, kdyby mu nezapočítala jednu nejlepší a tři nejhorší známky?

Radek Horenský

Řešení:

Označme n ($n > 8$) počet všech Pepových známek z matematiky, s jejich součet, p součet dvou nejlepších Pepových známek a q součet osmi jeho nejhorších známek. Jelikož se jedná o známky kvalifikační stupnice, jsou všechna tato čísla přirozená a platí $2 \leq p \leq 10$, $8 \leq q \leq 40$, $n \leq s \leq 5n$. Skutečnost, že při nezapočítání dvou nejlepších známek se průměr Pepových známek zhorší o 0,5, lze zapsat

$$\frac{s}{n} + \frac{1}{2} = \frac{s-p}{n-2}.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$n(n-2) = 4(s-p) - 2p(n-2). \quad (1)$$

Odtud vidíme, že n je sudé číslo (tedy $n \geq 10$). Jelikož s a p jsou součty několika známek, platí $s-p \leq (n-2)5$. Odhadneme shora levou stranu ve vztahu (1) a dostaneme $n(n-2) \leq 20(n-2) - 4(n-2)$. Odtud již plyne, že $n \leq 16$, tedy $n \in \{10, 12, 14, 16\}$. Označme navíc u součet známek, které Pepovi zůstanou, pokud nebudeme uvažovat jeho dvě nejlepší a osm nejhorších známek. Protože $n \geq 10$ a uvažujeme známky, platí $0 \leq (n-10) \leq u \leq 5(n-10)$. Dále máme $s = p + u + q$ a vztah (1) přepíšeme do tvaru

$$n(n-2) = 4(q+u) - 2p(n-2). \quad (2)$$

Skutečnost, že při nezapočítání osmi nejhorších známek se Pepův průměr zlepší o 0,5, zapíšeme

$$\frac{p + u + q}{n} - \frac{1}{2} = \frac{p + u}{n - 8}.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$n(n - 8) = 2q(n - 8) - 16(p + u). \quad (3)$$

Pokud $n = 10$, potom $u = 0$, rovnice (2) a (3) přepíšeme do tvaru $80 = 4q - 16p$ a $20 = 4q - 16p$. Vidíme, že soustava těchto rovnic nemá řešení. Tedy $n \in \{12, 14, 16\}$. Nyní pro tyto hodnoty n vyřešíme soustavu rovnic (2) a (3) vzhledem k neznámým p a q . Výsledky zapíšeme do tabulky.

n	12	14	16
p	$u - 8$	$\frac{u - 15}{2}$	$\frac{u - 24}{3}$
q	$4u - 10$	$2u - 3$	$\frac{4u}{3}$

Pokud $n = 12$, je $2 \leq u \leq 10$. Vzhledem k tomu, že $p \geq 2$ platí nutně $u = 10$, $p = 2$, $q = 30$. Ale u je součet dvou známek, z nichž každá není horší než každá z 8 Pepových nejhorších známek, proto $4u \leq q$, což nenastane. Nalezené řešení tedy nevyhovuje podmínkám zadání. Pokud $n = 14$, potom $4 \leq u \leq 20$. Vzhledem k tomu, že $p \geq 2$ platí nutně $u = 19$, $p = 2$, $q = 35$. Ale u je součet čtyř známek, z nichž každá není horší než každá z 8 Pepových nejhorších známek, proto $2u \leq q$, což nenastane. Tedy i v tomto případě nalezené řešení nevyhovuje podmínkám zadání. Pokud $n = 16$, potom $6 \leq u \leq 30$. Vzhledem k tomu, že $p \geq 2$ platí nutně $u = 30$, $p = 2$, $q = 40$. Ale u je součet šesti známek, proto každá z těchto známek je 5, q je součet osmi nejhorších Pepových známek, proto každá z nich je 5 a p je součet dvou nejlepších Pepových známek, každá z nich je 1. Pepa tedy dostal z matematiky dvě jedničky a čtrnáct pěték.

Závěr: Když Mařenka nezapočítá Pepovi jednu nejlepší a tři nejhorší známky, bude průměr zbývajících zámečků roven $\frac{56}{12} = \frac{14}{3}$.

Správné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan a *Vladimír Pavel* z Blovic.

Úloha 156

Do transportního kontejneru, jehož dno má rozměry 9×9 a který má výšku 8 (všechny údaje jsou v dm), je třeba naskládat kazety několika typů: A – dno 2×3 , výška 1, cena 700 Kč/ks, B – dno 2×4 , výška 1, cena 1000 Kč/ks, C – dno 3×3 , výška 1, cena 1100 Kč/ks, S – dno 1×1 , výška 2, cena 200 Kč/ks. Prázdný prostor lze vyplnit reklamními kazetami, kostkami R o rozměrech $1 \times 1 \times 1$, cena 50 Kč/ks. Z kazet A , B , C (po jedné od každého z těchto tří druhů) lze navíc po doručení kontejneru do prodejny sestavit dárkový komplet K v ceně 2990 Kč. Kazety mají být v bedně uloženy tak, aby:

- od každého z druhů A , B , C , S , R byl poslán alespoň jeden kus,
- všechny kazety byly do kontejneru uloženy dnem dolů,
- při prodeji obsahu kontejneru se dosáhlo co největší tržby.

Nakreslete plán uložení kazet do jednotlivých vrstev, uveďte výslednou tržbu a dokažte, že je nejvyšší možná.

Stanislav Trávníček

Řešení:

Nejprve najdeme pro jednotlivé kazety tržbu za 1 dm^3 a zapíšeme je do tabulky.

Kazeta	A	B	C	S	R	K
Tržba za 1 dm^3	$116\frac{2}{3}$ Kč	125 Kč	$122\frac{2}{9}$ Kč	100 Kč	50 Kč	130 Kč

Z tohoto přehledu plyne, že největší tržbu přinese komplet K , proto je třeba volit takové uložení kazet, abychom dostali co nejvíce trojic ABC . Objem přepravního kontejneru je 648 dm^3 , objem kazet kompletu K je 23 dm^3 . Do kontejneru tedy vejde nejvýše 28 trojic kazet ABC a zbydou ještě nevyplněné 4 dm^3 . Podle podmínek do nich musíme uložit ještě alespoň jednu kazetu S o objemu 2 dm^3 a jednu kazetu R o objemu 1 dm^3 . Zbývajících 1 dm^3 zaplníme jednou kazetou R . Je vidět, že při každém jiném rozmístění kazet bychom museli rozebrat alespoň jeden komplet K , čímž bychom utrpěli větší ztrátu než je možný zisk z nahrazení kazety R jinými kazetami. Pokud se nám tedy podaří uložit do kontejnerů 28 trojic ABC , jedna kazeta S a dvě kazety R , bude tržní cena takového kontejneru nejvyšší možná. Na následujících obrázcích je příklad takového uložení kazet do jednotlivých vrstev.

Spodní dvě vrstvy

C	C	C	
C	A	A	
C	B	B	B

Střední čtyři vrstvy

C	A	A	A
C	A	A	
C	B	B	B

Horní dvě vrstvy

C	B	B	B
C	S	R	B
C	B	A	A

Přitom kazeta S leží v obou horních vrstvách kontejneru. Abychom z přepravního kontejneru získali co největší tržbu, uložíme do něj kazety

$$2 \times (2A + 3B + 5C) + 4 \times (5A + 3B + 3C) + 2 \times (2A + 5B + 3C + R + \frac{1}{2}S) = 28A + 28B + 28C + 2R + S.$$

Celkem za ně utržíme

$$28 \cdot 2\,990 + 2 \cdot 50 + 200 = 84\,020 \text{ Kč.}$$

Správné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Neúplné řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně a *Vladimír Pavel* z Blovic.

Pavel Calábek

Upozorňujeme čtenáře na tradiční ročenku matematických soutěží

56. ročník matematické olympiády na středních školách.

Publikace má 186 stran a obsahuje řešení všech úloh matematické olympiády v kategoriích A, B, C a P z 56. ročníku soutěže, zadání všech úloh použitých v kategoriích Z9-Z5, dále podrobné informace o všech navazujících mezinárodních soutěžích (48. IMO, 1. Středoevropskou MO, 19. IOI a 14. Středoevropskou olympiádu v informatice).

Cena ročenky je 85,- Kč včetně DPH a je možno zakoupit, popř. objednat si ji na dobírku na adrese: Prodejna učebnic a skript Univerzity Palackého, Biskupské nám. 1, 771 11 Olomouc.

V téže prodejně lze zakoupit také výtisky starších ročníků MO (42. ročník MO a dále také 49. – 55. ročník MO).