

MATEMATIKA

Matematika a kalkuly

FRANTIŠEK KUŘINA

Pedagogická fakulta UHK, Hradec Králové

1. O matematice

Významný britský matematik *Ian Stewart* napsal v populární knize *Odsud až do nekonečna: V matematice nejsou důležité výpočty, ale nápady ... Je přinejmenším pět různých pramenů matematických nápadů. Jsou to počty, tvary, uspořádání, pohyby a náhody. Nejzákladnější a nejdůležitější jsou počty. Původně musel koncept čísla vzniknout z počítání: majetku, daní, nepřátel. Měření délek a vah vedla ke zlomkům a reálným číslům. Velkým dílem matematické imaginace je stvoření imaginárních čísel. Tvar neboli forma dává geometrii ... Problémy, jak uspořádat objekty podle různých pravidel, vedou ke kombinatorice, části moderní algebry, teorii čísel a konečné matematice, základu většiny informatiky. Pohyby ... inspirovaly diferenciální a integrální počet. Mnohé z hlavních oblastí matematického výzkumu se zabývají vývojem systémů v čase. Novější příměsí je náhodnost. Hnací silou matematiky jsou problémy. Důležitým zdrojem matematické inspirace jsou příklady* ([1], s. 12).

Inteligentní laik se při kontaktu s matematikou obvykle střetne se třemi „nepříjemnými“ skutečnostmi: zvláštním jazykem, pojmovou vytríbeností a logickou strukturou disciplíny. Pojmy zahrnují pouze to, co je explicitně formulováno v definicích, jediné významné souvislosti jsou souvislosti logického charakteru. Je to pravý opak běžného života, kde nic není definováno a vztahy a souvislosti se odvíjí od všeho možného, málokdy však od logiky. Setkání dospělého laika s částí „hotové“ matematické disciplíny bývá zřídka kdy úspěšné. K matematice je nutno vést dítě od útlého mládí, a to

pokud možno přirozeně, tedy nikoliv předkládáním části hotové matematické disciplíny, ale postupnou její konstrukcí.

Po celoživotních zkušenostech se mi jeví účelné zdůraznit těchto PĚT P matematického vzdělávání, které by mělo mít především charakter řešení problémů:

P1. Pamatovat si

P2. Počítat

P3. Přemýšlet

P4. Porozumět

P5. Použít

Role paměti ve vzdělávání bývá mnohými „moderními“ autory zlehčována. Paměť však je pro úspěšné matematické vzdělávání důležitá, škola by měla její kultivaci věnovat náležitou pozornost. Naše škola vyžaduje, a jsem přesvědčen, že bude vyžadovat i v budoucnosti, např. pamětní znalosti výsledků sčítání a násobení přirozených čísel do 10, znalost písemných algoritmů základních početních operací, znalost nemnoha definic aritmetických a geometrických pojmů a algoritmů a několika vzorců a vět. Proč zastávám toto stanovisko v době, kdy všechno lze spolehlivě a rychle nalézt v dostupných zdrojích a mnohé lze jednoduše odvodit? Souhlasím se *Zdeňkem Kratochvílem* ([2], s. 144), že *člověk je do určité míry určen tím, co má ve své paměti. Paměť je dispozicí naší mysli, zakládá možnosti řeči i způsob vnímání*. Paměť hraje základní úlohu při orientaci v nejrůznějších situacích, v porozumění souvislostem, v řešení úloh, *ve schopnostech zažehnout náhled. Zvláště menším dětem je paměť tou silou, která buduje rostoucí schopnost mysli* ([2], s. 144, 147). *Paměť je uschování pochopené a posouzené věci pro budoucí použití* ([3], s. 53). *Fantazie, intuice i logika pracují se zapamatovatelnými údaji* ([4], s. 100). Řešení problémů a úloh není bez zprostředkující role paměti možné, na vhodných úlohách a hrách (např. na hře v šachy) můžeme paměť trénovat.

Podceňování počítání v naší škole je bohužel skutečností. Přitom *umění násobit otvíralo člověku v prvních stoletích druhého tisíciletí dveře k nejvyšším úřadům* ([5], s. 241) a metodická příručka z konce 19. století zdůrazňuje: *Nejprostější služebná děvče tak jako nejvyšší úředník finanční, chudý nádeník tak jako bohatý kupec musejí uměti počítati, nechtě-li upadnouti v životě do rukou lichevnictva, šejdířstva a žiti v mrzké závislosti na jiných. Škole jest pak vyučovati pro život; proto musí píliti toho, aby žákům*

jejím dostalo se oné míry počtářské zručnosti, které vyhledává občanská společnost na tom, kdo v ní žije ([6], s. 104).

Odedávna se ovšem proti pěstování početních dovedností některé osobnosti stavěly. Tak např. *F. M. Pelcl* se ve svých pamětech trpce vysmívá zavedení matematiky v tereziánských školách, *jako kdyby měly všechny děti nastoupit jako účetní u eráru* (citováno podle [7], s. 39).

V období tzv. *modernizace vyučování matematice*, které se soustředilo spíše na strukturální pohled na matematiku než na její aplikace, odsoudil *Jan Vyšín* vyučovací cíl *žáci mají umět poznat v denním životě situace počtářského charakteru a mají je umět řešit spolehlivě a samostatně správným počtářským postupem* takto: *Tato slova znějí v 2. polovině 20. století opravdu směšně a jsou trapným anachronismem* ([8], s. 12). Hlavním problémem tehdejší reformy nebyla podle mého názoru orientace na množiny a logiku, ale odklon od kalkulativní a aplikační stránky vzdělávání. „Vědecký“ charakter školní matematiky znamenal jistou výlučnost matematického vzdělávání a nemůžeme se divit, že skutečnost, kdy žák první třídy měl především znát, že $2 + 3 = 3 + 2$, tedy komutativitu sčítání, a pak až $2 + 3 = 5$, mohla stěží nadchnout veřejnost – odbornou i laickou.

Tato stanoviska svědčí o jisté odtrženosti školy od reality života. Počítání je nejen otázkou zisku (*Počítá co mu to, co mu to vynese.*), ale i otázkou přežití a technického pokroku.

Živá bytost (i ta nejskromnější, např. bakterie) komputuje, to znamená že nejenom „počítá, kalkuluje“, ale provádí také operace, které jsou podřízeny jisté logice a jistým pravidlům, takovým, které směřují k zachování života organismu ([9], s. 101).

Podle *Petra Vopěnky* je *matematika metodou předpovídání pomocí formálních kalkulů* ([10], s. 735). *Při tom formálním kalkulem rozumíme hru se znaky prováděnou podle nějakých pevně stanovených pravidel* ([12], s. 37).

Problémy školních numerických výpočtů jsou dnes teoreticky vyřešeny používáním kalkulaček, jejich systematické „zapojení“ do matematického vzdělávání však není na všech školách na náležité úrovni.

Všimněme si posledních tří P.

Bylo by iluzí domnívat se, že zvoněním na hodinu matematiky se přemění třída na „sbor myslitelů“. Předmět sám neznamena automaticky kultivaci myšlení. Snad skýtá matematika více příležitostí k rozvíjení myšlení než některé jiné předměty, ale jedná se pouze o příležitost, kterou bychom měli využít. Matematika chápaná jako systém formálních dedukcí, jako systém definic, vět a důkazů nebo na elementární úrovni jako systém

vzorců není nejvýhodnějším základem pro přístup ke školské matematice, neboť je i příležitostí k formálnímu „zvládnutí“ matematických poznatků. Definice, věty a důkazy se lze naučit, aniž bychom jim porozuměli, tento soubor vědomostí lze reprodukovat u zkoušek. Dobrá paměť rozvíjená tréninkem se zdá být postačující k osvojení si minima matematiky. Takováto matematika myšlení nerozvíjí, ale spíše utlumuje, protože myšlení komplikuje pohled na strukturu vytříbenou někdy i mnohogeneračním vývojem názorů na řešení určitého problému. Ne tedy studium části hotové matematiky, ale poznávání cest k matematice, je základní příležitostí k rozvíjení myšlení. Je tedy účelné vycházet při vyučování z otázek a problémů, docházet k domněnkám a pokusům problémy řešit, poznávat aparát, který k tomu potřebujeme, včetně utváření a vymezování pojmů a cest k zdůvodňování tvrzení. Poslední tři body mého přesvědčení o charakteru matematického vzdělávání tedy spolu úzce souvisejí.

Pohled na školní matematiku zprostředkovaný 5P není jediný možný. Na matematiku se můžeme dívat z hlediska strukturálního a z hlediska technologického. Technologická stránka matematiky spočívá ve zvládnutí souboru dovedností, které vedou k výsledkům při aplikacích matematiky. Zde mám na mysli i okruh nematematických dovedností, jako je např. čtení a psaní, ale především provádění početních nebo grafických operací, tedy práce podle algoritmů, včetně práce s výpočetní technikou. *Petr Vopěnka* nazývá tuto stránku matematiky *operabilitou* a nezahrnuje ji, na rozdíl ode mne, do vzdělávání ([11], s. 26). Operabilita vyžaduje informace a nácvik obratného zacházení s nimi, nevyžaduje nutné porozumění. Kdopak dnes rozumí principu fungování kalkulačky?

Rozvíjení operability ve vzdělávání je nutné, je to však druhý pól školní práce, která by měla být orientována na porozumění principům a chápání struktury poznatků. Existují učitelé, kteří by byli ochotni redukovat matematiku na technologii výpočtů, matematiku chápou jako počty. Tento přístup může být pro nezkušené učitele lákavý, neboť výklad má charakter instrukce, student se buď naučí nebo nenaučí příslušné postupy a učitel může jednoduše a „spravedlivě“ klasifikovat. Při takovémto přístupu ovšem uniká to podstatné, totiž porozumění souvislostem, bez něhož není možné ani hlubší proniknutí do matematiky, ani její netriviální aplikace. Je samozřejmé, že operabilita hraje jinou roli např. na prvním stupni základní školy než na škole střední a jinou roli na škole průmyslové a jinou na gymnáziu.

Protože matematika vznikala historicky z potřeb praxe lidské společnosti, hrála její technologická stránka v dějinách významnou roli, kterou můžeme sledovat na problematice kalkulů. Těm se budeme věnovat v další kapitole.

2. O kalkulech

Problém přechodu od počítání věcí (oblázků, kuliček, teček, čárek, ...) k počítání s čísly je problém dvojího kódování kvantity, problém cesty od jejího kódování vizuálního a taktilního ke kódování symbolickému. Hloubku těchto souvislostí si můžeme přiblížit pohledem do historie. Ačkoliv náznaky číselných symbolů se začínají objevovat od 4. tisíciletí př. n. l., teprve v sedmém století našeho letopočtu *stanuli indiští matematikové poprvé v dějinách lidstva v údivu nad tajemnou mocí znaků propůjčenou jim vhodnými kalkulacemi s nimi* ([12], s. 34). Mnohokrát opakovaná setkání se situacemi jako na obr. 1 vedou k „pravidlům“ $2 + 3 = 5$, $2 \cdot 3 = 6$, ...



Obr. 1

Znalosti základních spojů sčítání a násobení spolu s poznáním desítkové soustavy a zákonitostem typu *asociativity*, *komutativity* a *distributivity* umožnily počítat s libovolně velkými čísly. Tento několik tisíc let trvající vývoj zvládne v současné době normální dítě během základní školy, někdy bohužel poněkud formálně. Kulturní prostředí, v němž se dítě v předškolním věku vyvíjí, mu ovšem vcelku správně zprostředkuje chápání významu malých přirozených čísel, příslušných symbolů i početních operací.

Je otázka, zda algoritmy numerického počítání v desítkové soustavě, které v současné době nahrazuje výpočetní technika, se nestanou mrtvou větví stromu lidského poznání, a v důsledku toho odumřou. Osobně si myslím, že tomu tak nebude, neboť tyto postupy umožňují člověku hlubší pochopení kvantitativní stránky jevů, nicméně americký spisovatel *Isaac Asimov* zpracoval beletristicky výjev z budoucnosti, kdy lidstvo zcela „zapomnělo“ i malou násobilku a všechny algoritmy numerického počítání. Dovolím si zde uvést krátkou citaci z vyšetřování objevitele algoritmu násobení *Aubeho* před komisí Pentagonu ([13]).

„Aube! Kolik je devětkrát sedm?“

Aub na okamžik zaváhal. V jeho bledých očích zableskl náznak strachu. „Šedesát tři,“ odpověděl.

Kongresman Brant nadzvedl obočí. „Je to správně?“

„Zkontrolujte si to sám, pane kongresmane.“

Kongresman vytáhl kapesní počítačku, dvakrát Źukl do zoubkované hrany a pohlédl na výsledek. Okamžik se na počítačku ve své dlani díval a pak ji opět zastrčil. „Tak to má být to nadání, které jste nám přišel ukázat. On je eskamotér?“

„Něco víc než to, pane kongresmane. Aub si zapamatoval několik málo operací a s jejich pomocí počítá na papíře.“

„Papírový počítač?“ divil se nevěřicně generál. Úplně ho to zmátlo.

„Ne, pane generále,“ vysvětloval trpělivě Shuman. „Žádný papírový počítač. Prostě list papíru. Byl byste tak laskav pane generále, a řekl nějaké číslo?“

„Sedmnáct,“ řekl generál.

„A vy, pane kongresmane.“

„Dvacet tři.“

„Děkuji. Aube, vynásob ta dvě čísla a ukaž pánům, jak to děláš.“

Aub po chvíli tiše prohlásil „Výsledek je tři sta devadesát jedna.“

Kongresman Brant vytáhl svou počítačku podruhé a dloubl do ní. „U všech všude, je to tak. Jak to uhádl?“

„Neuhádl to, pane kongresmane,“ odporoval Shuman. „On ten výsledek vypočítal. Vypočítal ho na tomto listu papíru.“

„Blbost,“ vyjel netrpělivě generál. „Počítač je jedna věc a nějaké značka na papíře druhá.“

Historka se nám může jevit směšná, ale má generace se učila algoritmy výpočtu druhé a třetí odmocniny a také jsme je zapomněli. Ukažme na příkladech několika algoritmů násobení přirozených čísel, že tato zapomenutá tematika může být zajímavá.

Výsledek

$$327 \cdot 869 = 284\,163 \quad (1)$$

získáme pomocí kalkulačky téměř okamžitě. K jeho určení bez jakýchkoliv pomůcek postačí znát pouze malou násobilku, vzhled do struktury desítkové soustavy a základní aritmetické zákonitosti. Výpočet můžeme přehledně uspořádat do tabulky.

	$3 \cdot 100$	$2 \cdot 10$	7	Σ
$8 \cdot 100$	240 000	16 000	5 600	261 600
$6 \cdot 10$	18 000	1 200	420	19 620
9	2 700	180	63	2 943
Σ	260 700	17 380	6 083	284 163

Numerickou správnost výpočtu lze kontrolovat součty dílčích výsledků v řádcích nebo sloupcích.

Obvyklý algoritmus násobení je pouhým „ekonomickým“ uspořádáním výpočtů z tabulky (obr. 2). Z historie je znám přehledný způsob zápisu algoritmu násobení podle obr. 3. Tento tzv. šachovnicový způsob násobení, který uvádí např. *Křišťan z Prachatic*, je typický pro konec 15. století.

$$\begin{array}{r}
 327 \cdot 869 \\
 \hline
 2616 \\
 1962 \\
 2943 \\
 \hline
 284163
 \end{array}$$

Obr. 2

	8	6	9	
2	2 4	1 8	2 7	3
8	1 6	1 2	1 8	2
4	5 6	4 2	6 3	7
	1	6	3	

Obr. 3

Některé algoritmy násobení převáděly násobení na sčítání. Jeden dosti kuriozní využívá vzorce

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)).$$

Mají-li být činitelé hodnotami funkce kosinus, musíme je upravit dělením vhodnou mocninou čísla 10. Pro náš součin postupujeme následujícím způsobem.

$$327 \cdot 10^{-3} = 0,327 = \cos 70,913\,211\,5^\circ$$

$$869 \cdot 10^{-3} = 0,869 = \cos 29,657\,359\,81^\circ$$

$$\begin{aligned}
& \cos 70,913\,211\,5^\circ \cdot \cos 29,657\,359\,81^\circ = \\
&= \frac{1}{2}(\cos 100,570\,571\,3^\circ + \cos 41,255\,851\,69^\circ) = \\
&= \frac{1}{2}(-0,183\,446\,463 + 0,751\,772\,463) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0,568\,326 = 0,284\,163
\end{aligned}$$

Po vynásobení tohoto výsledku číslem 10^6 dostaneme 284 163.

Dokladem, že se výpočty naznačeným způsobem skutečně prováděly, jsou patnáctimístné tabulky goniometrických funkcí z r. 1613.

Násobení převádí na sčítání, jak známo, i logaritmování. Připomeňme si tyto výpočty, které byly ještě před několika desítkami let součástí školské matematiky, dnes jsou již spíše historickou kuriozitou.

Dekadický logaritmus čísla x je exponent, na který musíme povýšit číslo 10, abychom dostali x :

$$10^{\log x} = x. \quad (2)$$

Protože při násobení mocnin s týmž základem se exponenty sčítají

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

platí podle definice (2):

$$\begin{aligned}
a &= 10^{\log a}, \quad b = 10^{\log b}, \quad ab = 10^{\log ab}, \\
ab &= 10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = 10^{\log a + \log b} = 10^{\log ab}.
\end{aligned}$$

V našem konkrétním případě pak máme podle tabulek hodnot logaritmické funkce $\log 327 \cdot \log 869 = \log 327 + \log 869 = 2,514\,547\,753 + 2,930\,197\,76 = 5,453\,567\,529$. Odlogaritmováním pak dostaneme výsledek (1).

Logaritmické tabulky byly konstruovány řadou autorů od 16. století a byly patrně „nejmocnějším“ prostředkem výpočetní techniky „předcomputerového“ věku.

Roku 1592 byly vydány tabulky druhých mocnin přirozených čísel od 1 do 100 000, pomocí nichž bylo možno určovat součiny přirozených čísel na základě identity

$$ab = \frac{1}{4} \left((a+b)^2 - (a-b)^2 \right).$$

$$327 \cdot 869 = \frac{1}{4} (1\,196^2 - 5\,42^2) = \frac{1}{4} (1\,430\,416 - 293\,764) = 284\,163.$$

Poslední tři postupy, které jsme uvedli, se obešly bez násobilky. Egyptský způsob násobení asi z druhého tisíciletí př. n. l. využívá pouze násobilky dvou. Ukažme si tento algoritmus na našem příkladu.

Do levého sloupce píšeme ty mocniny čísla 2, které nepřesáhnou menšího činitele (v našem případě číslo 327), do pravého sloupce pak po řadě dvojnásobky druhého činitele (čísla 869). V levém sloupci vybereme ty mocniny čísla 2, jejichž součet je 327 a označíme je (např. *). Součet násobků čísla 869 na označených řádcích je roven součinu $327 \cdot 869$.

1 *	869
2 *	1 738
4 *	3 476
8	6 952
16	13 904
32	27 808
64 *	55 616
128	111 232
256 *	222 464
327	284 163

Zdůvodnění tohoto algoritmu je zřejmé. Součet označených čísel v levém sloupci představuje zápis čísla 327 v dvojkové soustavě

$$\begin{aligned} (327)_{10} &= (111\,000\,101)_2 = \\ &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8 = \\ &= 1 + 2 + 4 + 64 + 256 \end{aligned}$$

a popsáný algoritmus znamená výpočet

$$(1 + 2 + 4 + 64 + 256) \cdot 869 = 327 \cdot 869.$$

Staří Egypťané tak „objevili“ z praktických důvodů numerického počítání ideu dvojkové soustavy.

Ve všech případech jsme simulovali počítání s tabulkami kalkulačky.

I na těchto „odumřelých“ oblastech matematiky, na algoritmech numerického počítání, lze demonstrovat vynalézavost lidského ducha, který

se ovšem plně projevuje na konstrukcích nových oblastí kalkulací. Připomeňme tuto problematiku pohledem *Petra Vopěnky*.

Algebraický kalkul operující se znaky označujícími proměnné pro čísla (netoliko již jen přirozená), v němž jsou aritmetické operace pouze naznačovány k tomu účelu zvolenými znaky, byl postupně zdokonalován a nakonec dotvořen v Evropě. Dálo se to od druhé poloviny dvanáctého století do konce století šestnáctého. Jakkoliv tedy aritmetický kalkul je nádherným výtvorem Indů, algebraický kalkul je výplodem západoevropské činnorodé tvořivosti ([12], s. 35).

Descartovou zásluhou se matematika kalkulací dočkala svého třetího triumfálního úspěchu . . . tím, že byla použita na geometrický svět ([12], s. 36).

Newton a Leibniz objevují infinitezimální kalkul, pomocí něhož lze řešit řadu úloh dříve neřešitelných (např. výpočty délky křivky, obsahu obrazců a objemů těles).

Všechny zmíněné kalkuly jsou předmětem středoškolské výuky, spolu např. s výpočty trigonometrickými či pravděpodobnostními.

Specifickým kalkulem je i rýsování. Charakteristika *geometrie jako metody předpovídání pomocí rýsování* ([10], s. 749) je patrně zcela oprávněná pro *deskriptivní geometrii* a snad i pro část technické praxe. Dnes se ovšem i ke konstrukcím využívá výpočetní technika.

3. Kalkuly a řešení úloh

Ilustrujme nyní užití kalkulů na příkladech několika úloh školské matematiky. U každé úlohy uvedeme řešení kalkulativní a řešení, které se o žádný specifický kalkul neopírá.

Příklad 1

Kůl je zaražen $\frac{1}{3}$ své délky do dna rybníka, jeho $\frac{1}{4}$ je ve vodě a 120 cm nad vodou. Jaká je celková délka kůlu?

Početní řešení úlohy spočívá na vyjádření textu úlohy rovnicí a jejím řešení. Označíme-li neznámou délku kůlu x , pak platí

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 120 = x.$$

Odtud vypočítáme $x = 288$.

Úlohu můžeme ovšem řešit i úsudkem. Protože ve vodě a v zemi je celkem $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ délky kůlu, je nad vodou $\frac{5}{12}$ délky, což je 120 cm. Protože $\frac{1}{12}$ délky je $\frac{120}{5}$ cm = 24 cm, je délka kůlu $12 \cdot 24$ cm = 288 cm.

Příklad 2

Dokažte: Jestliže dva obdélníky mají sobě rovné obsahy a sobě rovné obvody, pak jsou shodné.

Ze čtyř mně známých řešení této úlohy uveďme dvě.

Označme x, y délky stran jednoho obdélníku, u, v druhého.

Podmínky úlohy můžeme zapsat ve tvaru

$$xy = uv, \quad (3)$$

$$x + y = u + v. \quad (4)$$

Uveďme nejdříve kalkulativní řešení úlohy. Označme S obsah každého z obdélníků, o jejich obvod.

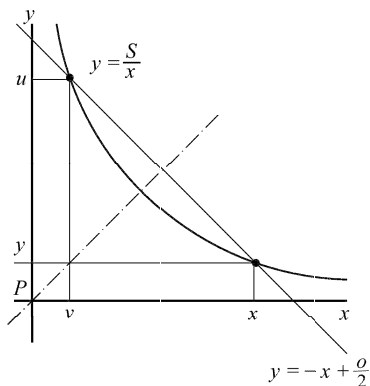
Rutinním výpočtem, který zde nebudeme uvádět, dojdeme k závěru, že soustava

$$xy = S \quad x + y = \frac{o}{2} \quad (5)$$

s neznámými x, y a parametry S, o má dvě sobě rovná řešení. K těmž závěru dospějeme, znázorníme-li funkce

$$y = \frac{S}{x} \quad y = -x + \frac{o}{2}$$

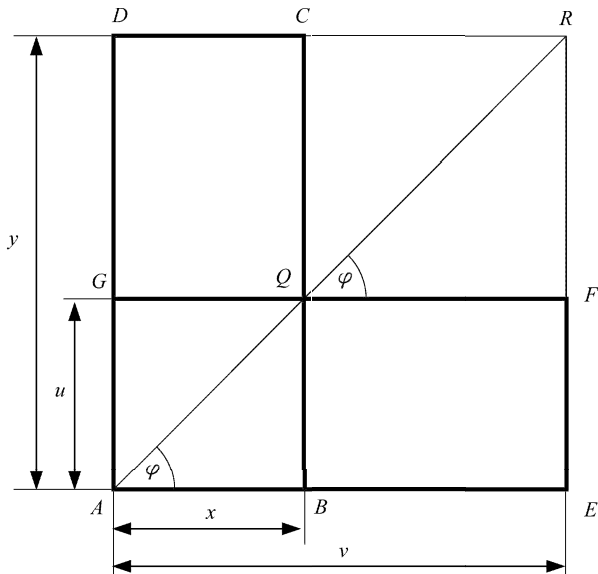
v kartézské soustavě souřadnic podle obr. 4.



Obr. 4

Ukažme, že úlohu můžeme řešit přímo, prostou úvahou, která se ovšem opírá o vhodný nápad.

Umístíme obdélníky splňující podmínky úlohy do polohy podle obr. 5 a označme Q průsečík přímek BC , GF a R průsečík přímek EF , DC .



Obr. 5

Rovnost (3) znamená rovnost poměrů

$$\frac{y}{v} = \frac{u}{x},$$

které můžeme interpretovat jako hodnoty funkce $\operatorname{tg} \varphi$ a body A , Q , R leží tedy v přímce. Protože rovnost (4) je ekvivalentní s rovností

$$y - u = v - x,$$

je $\varphi = 45^\circ$ a platí přitom $u = x$ a $v = y$.

Příklad 3

Sestrojte kružnice k , m , n se středy ve vrcholech A , B , C daného trojúhelníku tak, aby každé dvě z nich měly vnější dotyk.

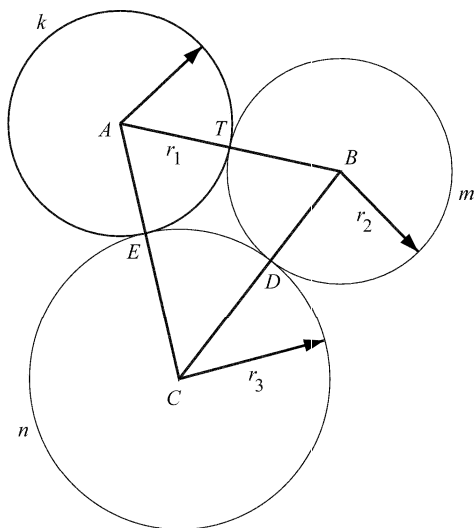
Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníku ABC , pak v označení podle obr. 6 platí

$$r_1 + r_2 = c,$$

$$r_2 + r_3 = a,$$

$$r_1 + r_3 = b.$$

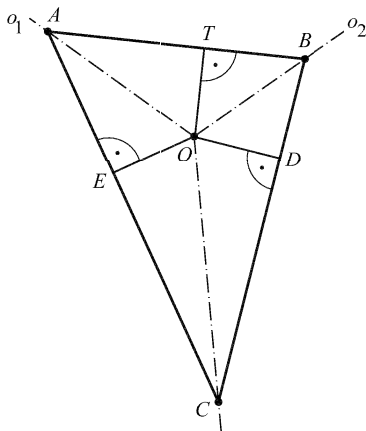
Řešením této soustavy dostaneme např. $r_1 = \frac{1}{2}(c - a + b)$. Sestrojíme-li kružnici $k(A; r_1)$, můžeme sestrojit i zbývající kružnice $m(B; |BT|)$, $n(C; |CE|)$.



Obr. 6

Uvedme dále přímé geometrické řešení naší úlohy.

Jsou-li T, D, E po řadě body dotyku hledaných kružnic, jsou trojúhelníky EAT, BTD, DCE rovnoramenné a v osových souměrnostech podle os o_1, o_2, o_3 vnitřních úhlů trojúhelníku ABC přejde bod E postupně do bodů T, D, E . Společný bod O těchto os je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Konstrukce je patrná z obr. 7.



Obr. 7

Příklad 4

Na ramenech AC , BC rovnoramenného trojúhelníku ABC sestrojte body X , Y tak, aby úsečky AX , XY , YB byly shodné.

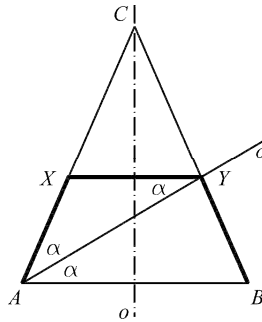
Předpokládejme, že body X , Y jsou sestrojeny (obr. 8). Ze souměrnosti rovnoramenného trojúhelníku podle osy o vyplývá, že $XY \parallel AB$ a trojúhelníky ABC , XYC jsou podobné. Označme délku základny AB písmenem z , délku ramen AC , BC písmenem r a délku úseček AX , XY , YB písmenem x . Z podobnosti jmenovaných trojúhelníků plyne

$$\frac{x}{r-x} = \frac{z}{r}.$$

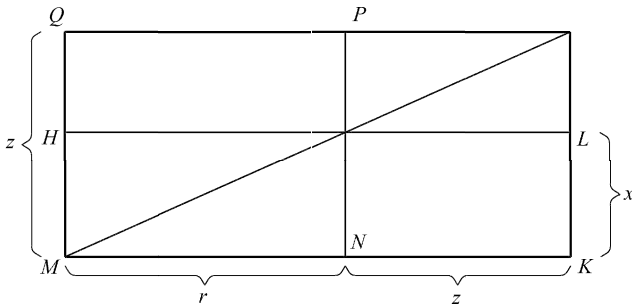
Tuto rovnost upravíme na tvar

$$x(r+z) = zr,$$

který můžeme interpretovat jako rovnost obsahů dvou obdélníků $MNPQ$ a $MKLH$. Úsečku délky x pak můžeme sestrojit podle obr. 9.



Obr. 8



Obr. 9

Přímé geometrické řešení úlohy je jednodušší než řešení početní; opírá se o vhodný pohled na situaci. Jsou-li X, Y hledané body, je trojúhelník AXY rovnoramenný a má u základny shodné úhly α (obr. 8). Protože je $XY \parallel AB$, má rovněž úhel YAB velikost α . Bod Y je tedy průsečík osy o úhlu CAB s ramenem CB .

Příklad 5

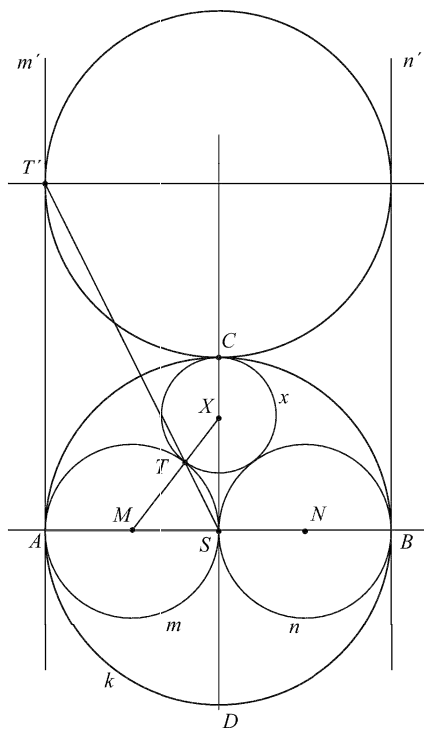
AB, CD jsou k sobě kolmé průměry kružnice $k(S; r)$, m, n jsou kružnice s průměry AS a BS . Sestrojte všechny kružnice, které se současně dotýkají kružnic k, m, n .

Všimněme si řešení úlohy v polorovině ABC . Střed X hledané kružnice s leží na přímkě MT , kde T je bod dotyku kružnic m a x , a na přímkě CS

(obr. 10). Z pravoúhlého trojúhelníku MSX můžeme vypočítat poloměr ϱ kružnice x pomocí Pythagorovy věty. Z rovnice

$$\left(\frac{r}{2} + \varrho\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (r - \varrho)^2$$

určíme $\varrho = \frac{1}{3}r$.



Obr. 10

Kalkulativní řešení úlohy je tedy velmi jednoduché. Úlohu můžeme řešit pomocí osově souměrnosti nebo pomocí stejnoolehlosti. Konstruktivně jednoduché je řešení, které se opírá o kruhovou inverzi. Připomeňme je. V kruhové inverzi s řídicí kružnicí k je tato kružnice samodružná a obrazy kružnic m, n jsou přímky m', n' kolmé k přímce AB . Obrazem hledané

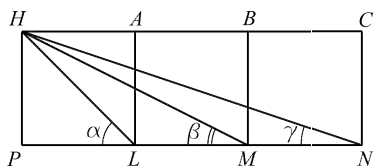
kružnice x je kružnice x' , která se dotýká přímek m' , n' a prochází bodem C . Vzor bodu dotyku T' kružnice x' a přímky m' je bod dotyku T kružnic x , m .

Příklad 6

Jsou dány čtverce $PLAH$, $LMBA$, $MNCB$ podle obr. 11. Dokažte, že pro úhly α , β , γ platí

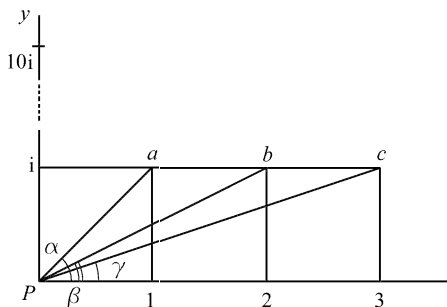
$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ.$$

Z řady možností, jak úlohu řešit, připomeňme kalkulativní řešení olympionika *Břetislava Nováka*, pozdějšího profesora Matematicko – fyzikální fakulty UK v Praze.



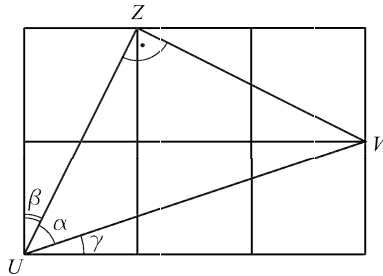
Obr. 11

Vrcholy shodných čtverců můžeme považovat za obrazy komplexních čísel $a = 1 + i$, $b = 2 + i$, $c = 3 + i$ (obr. 12). Protože číslo $d = abc = 10i$, je $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, neboť při násobení komplexních čísel se jejich amplitudy sčítají.



Obr. 12

Zcela elementární řešení úlohy je vidět z obr. 13.

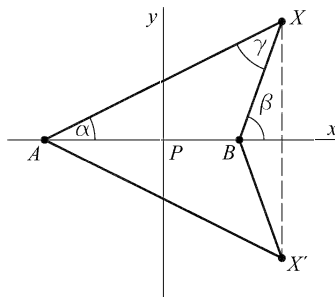


Obr. 13

Příklad 7

Vyšetřete množinu všech bodů roviny, z nichž je vidět úsečka AB pod daným úhlem γ .

Vyšetřujme analyticky množinu všech bodů $X[x, y]$ roviny, z nichž je vidět úsečku AB ($A[-a, 0]$, $B[a, 0]$) pod úhlem γ , tj. množinu bodů X , pro něž platí $|\sphericalangle AXB| = \gamma$ (obr. 14).



Obr. 14

Protože s libovolným bodem X jedné poloroviny s hranicí AB náleží hledané množině i bod X' s ním souměrně sdružený podle osy AB , stačí vyšetřovat množinu v jedné z těchto polorovin.

Protože pro libovolný bod „horní poloroviny“ je β vnější úhel v trojúhelníku ABC , platí $\beta = \alpha + \gamma$ neboli $\gamma = \beta - \alpha$.

Podle známého vzorce platí

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

a pro $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ dostaneme v označení podle obr. 14

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{x-a}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x+a}.$$

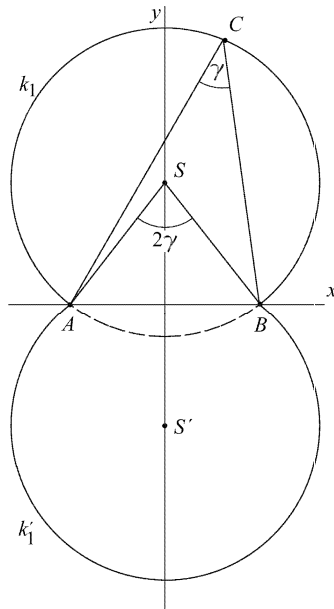
Množina bodů $X[x, y]$, pro něž $|\sphericalangle AXB| = \gamma$ tedy vyhovuje rovnici

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y}{x-a} \cdot \frac{y}{x+a}},$$

kterou můžeme upravit na tvar

$$x^2 + y^2 - 2ay \cot \gamma = a^2, \quad (6)$$

což je rovnice kružnice se středem na ose y , která prochází body A , B . Hledané množině bodů X náleží průnik k_1 oblouku kružnice (6) a horní poloroviny. V celé rovině pak dostáváme výsledek jako sjednocení kružnicových oblouků $k_1 \cup k'_1$ (obr. 15) mimo body A , B .



Obr. 15

Obráceně ovšem musíme ukázat, že každý bod množiny $k_1 \cup k'_1$ má požadovanou vlastnost.

Máme-li se obejít bez kalkulu analytické geometrie a trigonometrie, můžeme se ovšem opřít o větu, že obvodový úhel příslušející na kružnici k oblouku AB je roven polovině příslušného úhlu středového, což je dobře známé z planimetrie (obr. 15).

V dalším článku budeme ilustrovat roli kalkulů příklady z historie matematiky.

L i t e r a t u r a

- [1] *Stewart, I.*: Odsud až do nekonečna. Dokořán, Praha 2006.
- [2] *Kratochvíl, Z.*: Výchova, zřejmost, vědomí. Hermann a synové, Praha 1995.
- [3] *Komenský, J. A.*: Didaktika analytická. Samcovo knihkupectví, Praha 1946.
- [4] *Selye, Z.*: K záhadám vědy. Orbis, Praha 1975.
- [5] *Guedj, D.*: Papouškův teorém. Ikar, Praha 2000.
- [6] *Kehr, C. – Krček, F.*: Praxe ve škole obecné. K. Winkler, Brno 1889.
- [7] *Sokol, J.*: Je škola v krizi? In: Hledání učitele. Pedagogická fakulta, Praha 1996.
- [8] *Vyšín, J.*: Rozjímání o množinách. 100 + 1 zahraničních zajímavostí, č. 18, 1974.
- [9] *Morin, E.*: Věda a svědomí. Atlantis, Brno 1995.
- [10] *Vopěnka, P.*: Poznámky o současné matematice. Filosofický časopis, č. 5, 1971.
- [11] *Vopěnka, P.*: Matematika a vzdělávání. In: O škole a vzdělávání. Matfyzpress, Praha 2007.
- [12] *Vopěnka, P.*: Meditace o základech vědy. Práh, Praha 2001.
- [13] *Asimov, I.*: Pocit síly. Stvořitelé nových světů. Albatros, Praha 1980.

Příspěvek byl vypracován v rámci řešení grantu GAČR 406/08/0710.

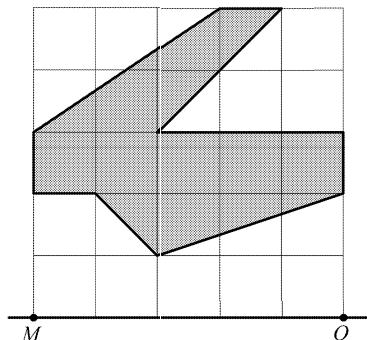
58. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Na obrázku je čtvercová síť, jejíž čtverce mají stranu délky 1 cm. V síti je zakreslen obrazec vybarvený šedě. Libor má narýsovat přímku, která je rovnoběžná s přímkou MO a rozděluje šedý obrazec na dvě části o stejném obsahu.

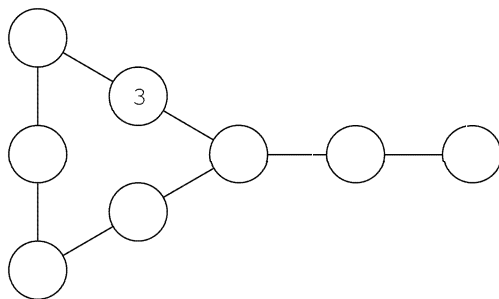


V jaké vzdálenosti od přímky MO povede Libor tuto rovnoběžku?

Libor Šimůnek

Z6–I–2

Do prázdných polí vepiš čísla 2, 4, 6, 8, 12, 14 a 21 tak, aby tři čísla zapsaná na jedné úsečce dávala vždy stejný součin. Napiš svůj postup.



Libor Šimůnek

Z6–I–3

B-banka vydává bankomatové karty se čtyřmístným PIN kódem, který neobsahuje číslici 0. Pan Skleróza se bál, že zapomene PIN kód své karty, proto si ho napsal přímo na ni, avšak římskými číslicemi IIIVIIIIXIV, aby to případný zloděj neměl tak jednoduché. Svůj nápad prozradil nejlepšímu příteli, panu Odkoukalovi, který byl také klientem B-banky. Ten záhy se svým PIN kódem udělal totéž a na kartu si napsal IVIIVI. Ke svému velkému překvapení však z římského zápisu neuměl svůj PIN kód určit přesně.

- a) Jaký PIN kód má karta pana Sklerózy?
 b) Jaký PIN kód může mít karta pana Odkoukala?

Světlana Bednářová

Z6–I–4

Načrtni všechny možné tvarově různé čtyřúhelníky, které mají vrcholy ve vrcholech daného pravidelného šestiúhelníka. Urči, jaké by byly jejich obsahy, kdyby šestiúhelník měl obsah 156 cm^2 .

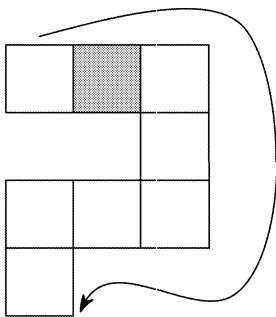
Marta Volfová

Z6–I–5

Paní Kučerová byla na sedmidenní dovolené a Káťa jí po celou tuto dobu venčila psa a krmila králíky. Dostala za to velký dort a 700 Kč. Po další dovolené, tentokrát čtyřdenní, dostala Káťa za venčení a krmení podle stejných pravidel stejný dort a 340 Kč. Jakou cenu měl dort?

Marta Volfová

Z6–I–6



Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku nejmenším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli označeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.

Kterým číslem se kostka dotkla zbarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl nejmenší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Monika Dillingerová

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Učitelka Kadrnožková kupovala v pokladně zoologické zahrady vstupenky pro své žáky a pro sebe. Vstupenka pro dospělého byla dražší než pro školáka, avšak ne více než dvakrát. Učitelka Kadrnožková zaplatila celkem 994 Kč. Učitel Hnízdo měl s sebou o tři žáky více než jeho kolegyně, a tak za své žáky a za sebe zaplatil 1 120 Kč.

- a) Kolik žáků měl s sebou učitel Hnízdo?
- b) Kolik stála vstupenka pro dospělého?

Libor Šimůnek

Z5–I–2

František Nudílek se zabýval tím, že psal po sobě jdoucí přirozená čísla. Začal takto: 1234567891011 . . . Po čase ho to přestalo bavit, dokončil právě rozepsané číslo a kriticky se podíval na svůj výtvor. Zjistil, že v posloupnosti číslíc, které napsal, se vyskytuje pět jedniček bezprostředně za sebou.

- a) Kolik nejméně po sobě jdoucích přirozených čísel musel František napsat?
- b) Kolik nejméně číslíc musel František napsat?

Světlana Bednářová

Z5–I–3

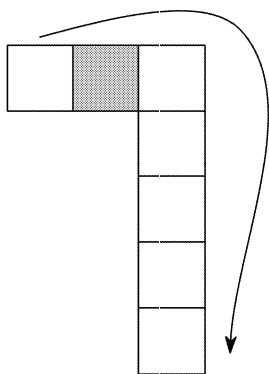
Nejvyšší známá sopka na Zemi je Mauna Kea na Havajských ostrovech. Její výška od úpatí po vrchol je dokonce o 358 metrů větší, než je nadmořská výška nejvyšší hory světa, Mount Everestu. Nezvedá se však z pevniny, ale ze dna Tichého oceánu, z 5 000metrové hloubky. Kdyby mořská hladina v této oblasti klesla o 397 metrů, byla by ponořená část Mauna Key přesně stejně vysoká jako část, která by vyčnívala nad hladinu.

- a) Jakou nadmořskou výšku má vrchol sopky?
- b) Kolik měří Mauna Kea od úpatí po vrchol?
- c) Jakou nadmořskou výšku má Mount Everest?

(Údaje o nadmořských výškách uváděné v různých zdrojích se mohou lišit, což je způsobeno nepřesnostmi měření, pohyby zemské kůry, vrstvou sněhové pokrývky apod. Při řešení úlohy proto vycházej pouze z údajů v ní uvedených.)

Světлана Bednářová

Z5–I–4



Klasická hrací kostka se převracela naznačeným směrem po plánu na obrázku. Na každém políčku zůstaly otisknuté tečky ze stěny, kterou se kostka plánu dotýkala. Počet všech teček otisknutých na plánu byl 23.

Kolik teček bylo otisknuto na vybarveném políčku?

(Klasická hrací kostka má na stěnách tečky v počtu od 1 do 6 umístěné tak, že na protilehlých stěnách je vždy dohromady 7 teček. Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Monika Dillingerová

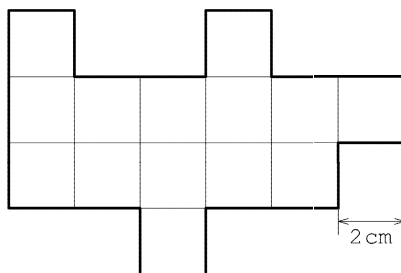
Z5–I–5

Digitální hodiny ukazují hodiny a minuty, jako například 14:37. Kolik minut denně svítí na těchto hodinách alespoň jedna pětka?

Marta Volfová

Z5–I–6

Dan si ze čtvercové sítě vystříhl útvar jako na obrázku.



Odstříhni dva čtverečky sítě tak, aby se výsledný útvar nerozpadl a měl co největší obvod. Najdi všechna řešení.

Monika Dillingerová

Zajímavé matematické úlohy

Otevíráme již 16. ročník naší pravidelné řešitelské rubriky „Zajímavé matematické úlohy“. V každém ročníku bylo dosud publikováno vždy deset úloh. V předchozích číslech našeho časopisu tak najdete již 150 zajímavých úloh. Upozorňujeme současně naše čtenáře, že kompletní soubor prvních 130 úloh této rubriky (včetně jejich úplných řešení) je možno nalézt v publikaci nakladatelství Prometheus „Sbírka netradičních matematických úloh“ autorů J. Švrčka a P. Calábka.

Řešení první dvojice úloh nového ročníku můžete zaslat nejpozději do 20. 10. 2008 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ových verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 151

Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{a^2b^2}{c^4 + 2b^3c} + \frac{b^2c^2}{a^4 + 2c^3a} + \frac{c^2a^2}{b^4 + 2a^3b} \geq 1.$$

Dále zjistěte, kdy nastává rovnost.

Petr Kaňovský

Úloha 152

Nechť B_1, B_2, B_3 jsou dotykové body kružnice vepsané trojúhelníku $A_1A_2A_3$ po řadě se stranami A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 . Označme dále I_1, I_2, I_3 středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům $A_1B_3B_2, A_2B_1B_3, A_3B_2B_1$. Jsou-li úhly $B_2B_1B_3$ a $I_1I_2I_3$ shodné, je trojúhelník $A_1A_2A_3$ rovnoramenný. Dokažte

Jaroslav Švrček