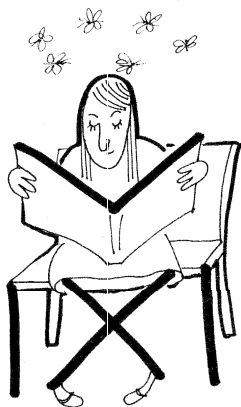


Lomené čáry jako grafy funkcí s absolutními hodnotami

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc



Považuji za docela vhodné, když si učitel matematiky dovede pořídit (hlavně pro svůj domácí počítač) drobné jednoúčelové programky, které mu pomáhají při přípravě na vyučování; jejich výhodou je též to, že jsou levné neboť si je učitel připraví sám. V tomto článku předkládáme dva takové programy (bylo by z nich možno lehce vytvořit program jediný, což zde nečiníme pro zachování přehlednosti), které usnadní učiteli přípravu na výuku funkcí s absolutními hodnotami (jejichž grafem je lomená čára) a které zčásti navazují na [1], [2]. Pro soulad s běžnými školními úlohami na funkce s absolutními

hodnotami se tu s koeficienty rovnice pracuje jako s obyčejnými zlomky. Samozřejmě je též možné, aby učitel informatiky (tam, kde se žáci učí programovat) zadal vyhotovení našich programů nebo jejich částí (např. práci s obyčejnými zlomky) jako cvičení v informatice. Úkolem prvního našeho programu je:

Úloha 1. Na základě zadání lomené čáry jako grafu funkce s absolutními hodnotami sestavit rovnici příslušné funkce a výsledek ověřit zobrazením grafu této funkce.

1. Rovnice lomené čáry

Uvažujme funkci $y = a(x)$, jejímž grafem je (spojitá) lomená čára. Jde tedy o funkci „po částech lineární“ a z článku [1] víme, že je to funkce s absolutními hodnotami. Vrcholy této lomené čáry nechť jsou body $A_1[x_1, y_1]$, $A_2[x_2, y_2], \dots, A_n[x_n, y_n]$, kde $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ jsou reálná čísla a n číslo přirozené. První strana této lomené čáry (jdoucí zleva do vrcholu A_1) nechť leží v přímce $y = k_0x + q_0$, další strany pak podobně v přímkách $y = k_ix + q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ve školním prostředí jsou čísla x_i , k_i , q_i nejčastěji celá nebo jsou to obyčejné zlomky. (Racionální desetinná čísla lze převést na obyčejné zlomky, takže dále tento tvar racionálních čísel neuvažujeme.) Funkce s absolutními hodnotami jsou také zdrojem mnoha dalších školních úloh; vedle sestrojení grafu jsou to zejména úlohy

- 1) Řešte rovnici $a(x) = 0$,
- 2) Řešte nerovnici $a(x) < 0$ (též $\leq, >, \geq$).

Množiny všech řešení takových úloh bývají velmi rozmanité, např. to mohou být omezené nebo neomezené intervaly, množiny izolovaných bodů, kombinace všech tří těchto typů, množina všech reálných čísel nebo množina prázdná. Chce-li si učitel vytvořit pestrou nabídku různých tvarů výsledků, bývá často nejsnadnější, když si potřebné úlohy vytvoří sám. Jednoduchý praktický postup doporučený v [1]: Na čtverečkováném papíru (s osami x, y) si zvolíme výslednou lomenou čáru, vyčteme potřebné údaje (x_i, k_i, q_i) a užitím vzorce

$$y = \frac{1}{2}[q_0 + q_n + (k_1 + k_n)x + \sum_{i=1}^n (k_i - k_{i-1})|x - x_i|] \quad (1)$$

dopočítáme koeficienty na pravé straně této rovnice.

Vidíme, že z koeficientů q_i jsou ve vzorci (1) použity pouze q_0 a q_n , vzhledem ke spojitosti funkce nejsou ostatní zapotřebí. Ukážeme si nyní, že pro odvození vzorce pro $a(x)$ není nezbytné ani q_n – v (1) bylo q_n použito jen pro snadnost výpočtu pravé strany při praktickém používání vzorce. Zjistíme tedy, jak lze vyjádřit absolutní člen q_n rovnice přímky obsahující poslední stranu lomené čáry.

Podle principu matematické indukce nejprve uvažujme $n = 1$. Máme tedy bod x_1 , v němž na stranu ležící v přímce $y = k_0x + q_0$ spojitě navazuje strana ležící v přímce $y = k_1x + q_1$. V bodě x_1 proto platí

$$k_1x_1 + q_1 = k_0x_1 + q_0,$$

odkud

$$q_1 = q_0 - (k_1 - k_0)x_1. \quad (2)$$

Mějme nyní body $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, strany lomené čáry nechť leží v přímkách $y = k_i x + q_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ a uvažujme indukční předpoklad, že

$$q_n = q_0 - \sum_{i=1}^n (k_i - k_{i-1})x_i. \quad (3)$$

Přidejme nyní bod $x_{n+1} > x_n$ a poslední stranu lomené čáry ležící v přímce $y = k_{n+1}x + q_{n+1}$. Jelikož poslední strana spojitě navazuje v bodě x_{n+1} na stranu předchozí, platí

$$k_{n+1}x_{n+1} + q_{n+1} = k_n x_{n+1} + q_0 - \sum_{i=1}^n (k_i - k_{i-1})x_i.$$

Odsud

$$q_{n+1} = q_0 - \sum_{i=1}^n (k_i - k_{i-1})x_i (k_{n+1} - k_n)x_{n+1} = q_0 - \sum_{i=1}^{n+1} (k_i - k_{i-1})x_i$$

Tím je vzorec (3) dokázán pro všechna n . Z rovnice (1) pak dostaneme po dosazení za q_n z rovnice (3) jiná vyjádření rovnice lomené čáry, a to

$$y = [(k_1 + k_n)x + \sum_{i=1}^n (k_i - k_{i-1})|x - x_i|] + q_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (k_i - k_{i-1})x_i \quad (4)$$

nebo

$$y = \frac{1}{2} [(k_1 + k_n)x + \sum_{i=1}^n (k_i - k_{i-1})(|x - x_i| - x_i)] + q_0. \quad (5)$$

Zejména tento vzorec je jednoduchý pro „ruční“ sestavování příkladů.

Nyní se zabýváme programovým řešením. Sestavíme program, který:

- vytvoří a znázorní na obrazovce *rovnici funkce* $y = a(x)$ s absolutními hodnotami, zadané údaje o stranách lomené čáry, která je grafem této funkce,
- znázorní na obrazovce graf takto vytvořené funkce.

Poznámka. Počítačový program, o kterém budeme nyní pojednávat, není a nemá být ukázkou vzorového profesionálního programování, ale je pojat

jako praktický pomocník učitele při probírání rovnic, nerovnic a funkcí s absolutními hodnotami. Chceme tím opět zdůraznit, že vytváření počítačových programů není výsadou informatiků, ale že si je jako pracovní pomůcky může pro sebe sestavovat i poučený uživatel neinformatik. To tedy znamená, že použité algoritmy mají být sice dobré, poměrně rychlé a věci vyhovující, ale nečeká se, že jsou nutně (z informatického hlediska) optimální. Formální kontroly vstupů mohou být neúplné, až téměř žádné, protože učitel jako uživatel jistě nemá zájem zadávat úmyslně (ani formálně ani věcně) chybná data. (V našem programu nebude ošetřeno ani „přetečení“, protože se má za to, že vstupní koeficienty nebudou v řádu statisíců.) Zdrojový text má umožňovat jednoduchou údržbu i s odstupem doby (my však zde komentáře ve zdrojovém textu velmi redukuje). Obsluha programu má být zcela jasná, prezentace výsledků na obrazovce srozumitelná. Naše komentáře při sestavování programu jsou tedy určeny spíše programujícímu uživateli než informatikovi specialistovi. Požadavky na profesionální produkty informatika – specialisty, zejména když jsou předmětem obchodu, jsou ovšem mnohem tvrdší.

2. Sestavení rovnice počítačovým programem

Zvolíme rovnici ve tvaru (4), která je formálně nejjednodušší. S ohledem na používání výsledků ve výuce budeme pracovat s obyčejnými zlomky, tj. vstupní parametry x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), k_i ($i = 0, 1, \dots, n$), q_0 budeme zadávat jako celá čísla nebo zlomky a také koeficienty v rovnici budou celá čísla nebo zlomky. Zvolíme formát čísel/jmenovatel, tj. např. 2/3.

Proto vytvoříme datový typ *Zlomek* se dvěma položkami (číslo a jmenovatel) typu *Longint*. Pro zlomky zavedeme funkce pro součet, rozdíl a součin, v nichž vždy nakonec provedeme krácení výsledného zlomku procedurou *Zkrat*. Součet a rozdíl je řešen jedinou procedurou s parametrem, jehož hodnota 1 znamená součet operandů a hodnota -1 znamená jejich rozdíl. Procedura pro krácení používá rekurzivní funkci NSD Největší společný dělitel, viz [3]). Funkce *Sgn* slouží pro zjištění a uchování znaménka vstupu (znaménko se zadává vždy před čístelem, např. -5/2).

Nejprve se zabývejme sestavením rovnice s absolutními hodnotami. K tomu si uveďme začátek programu a příslušnou část deklarací:

```
program LomCara;
uses Crt, Graph;
```

```

type Zlomek = record
    Ci: Longint;
    Jm: Longint
end;

const
    Nula: Zlomek = (Ci: 0; Jm: 1);
    Pul : Zlomek = (Ci: 1; Jm: 2);

var
    X, K, L: array [0..10] of Zlomek;
    Q0, Q, M0, M1: Zlomek;
    N, I, J: Longint;

```

Pro práci se zlomky se vytvoří potřebné funkce a procedury

```

function NSD(U, V: Longint): Longint;
var Z: Longint;
begin {NSD}
    if U * V = 0 then NSD := U + V else
    begin
        Z := U mod V; NSD := NSD(V,Z)
    end
end; {NSD}

procedure Zkrat(var Z: Zlomek);
var D: Integer;
begin {Zkrat}
    D := NSD(Abs(Z.Ci),Z.Jm);
    Z.Ci := Z.Ci div D; Z.Jm := Z.Jm div D
end; {Zkrat}

procedure Secti(Sig: Integer; Z1, Z2: Zlomek;
    var Z: Zlomek); {Sig=1: Z1+Z2, Sig=-1: Z1-Z2}
var Z3: Zlomek;
begin {Secti}
    Z3.Jm := Z1.Jm * Z2.Jm;
    Z3.Ci := Z1.Ci * Z2.Jm + Sig * Z2.Ci * Z1.Jm;
    Zkrat(Z3);

```

```

    Z.ci := Z3.ci; Z.jm := Z3.jm
end;    {Secti}

procedure Nasob(Z1, Z2: Zlomek; var Z: Zlomek);
begin  {Nasob}
    Z.Jm := Z1.Jm * Z2.Jm; Z.Ci:= Z1.Ci * Z2.Ci;
    Zkrat(Z)
end;    {Nasob}

```

Zadání hodnot x_i a koeficientů k_j a q_0 usnadňuje procedura *CtiZlomek1*, vstupy se čtou jako řetězec *St*, např. *St*= '5/12'. Při analýze řetězce *St* se nejprve zjišťuje, zda je prvním zadávaným znakem znaménko '-'; pokud ano, nastaví se proměnná *Sig* na hodnotu -1, jinak je 1. Zjištění čitatele a zjištění jmenovatele je též problém, proto je zvlášť definována procedura *CtiCis* (načtení čísla) a to tak, že se čtou znaky řetězce a dokud to jsou číslice, nabalují se do výsledného čísla. Protože však při vstupu celých čísel se nezadáva jmenovatel, je správné načtení vstupů zajištěno tím, že po vstupu řetězce *St* se na jeho konec automaticky přidává trojice znaků '/1/' která zajišťuje, že po zadání celého čísla se automaticky doplní jmenovatel 1.

```

procedure CtiZlomek1(var Z: Zlomek);
var S: string;
    Ind, Sig: Integer;

procedure CtiCis(var X: Longint);
    var IC: Integer;
        Cis: Longint;
begin  {CtiCis}
    Cis := 0; IC := Ord(S[Ind]) - 48;
    while (IC in [0..9]) do
        begin
            Cis := 10 * Cis + IC;
            Inc(Ind); IC := Ord(S[Ind]) - 48;
        end;
    X := Cis
end;    {CtiCis}

```

```

begin {CtiZlomek1}
  Sig := 1; ReadLn(S); S := S + '/1/';
  Ind := 1;
  if S[Ind] = '-' then
  begin
    Sig := -1; Inc(Ind)
  end;
  CtiCis(Z.ci); Z.ci := Z.ci * Sig;
  Inc(Ind);
  CtiCis(Z.jm)
end; {CtiZlomek1}

```

Tisk výsledné rovnice se organizuje pomocí procedury *TiskniZlomek*. Zlomek se tiskne ve tvaru čítelel/jmenovatel, ale je-li jmenovatel 1, tj. jde-li o celé číslo, vytiskne se jen čítelel. Vstupem do procedury je dále booleovský parametr *Jed*, který v případě true povolí vytisknutí jedničky (např. $x - 1$) a v případě false tisk nepovolí (tj. místo $1 * |x + 2|$ je vytištěno jen $|x + 2|$). Booleovský parametr *Plus* v případě true povolí vytisknutí znaménka + (např. $x + 2$) a v případě false tisk znaménka + nepovolí (např. místo $y = +2 * x + \dots$ se vytiskne jen $y = 2 * x + \dots$).

```

procedure
TiskniZlomek(Jed,Plus: Boolean; Z: Zlomek);
begin {TiskniZlomek}
  if Z.ci < 0 then Write('-')
  else if Plus then Write('+');
  if ((Abs(Z.ci)*Z.jm <> 1) or Jed) then
  begin
    Write(Abs(Z.ci));
    if Z.jm > 1 then Write('/',Z.jm)
  end
end; {TiskniZlomek}

```

(Pokračování)

(Autorkou úvodní ilustrace je Mgr. Jaroslava Čermáková ze Suchých Lazců.)

Literatura

- [1] *Trávníček, S.*: Sestavování úloh s absolutní hodnotou. MFI, r. 2 (1992/93), č. 2, str. 69-74.
- [2] *Trávníček, S.*: Zobrazování funkcí. MFI, r. 2 (1992/93), č. 1, str. 34-38.
- [3] *Trávníček, S.*: Přímka daná dvěma body. MFI, r. 17 (2007/08), č. 8, str. 433-439.

Základní použití Řešitele v Excelu

PAVEL PRAŽÁK – BLANKA PRAŽÁKOVÁ

Fakulta informatiky a managementu Univerzity Hradec Králové

První soukromé jazykové gymnázium v Hradci Králové

Při řešení úloh z matematiky, fyziky, ekonomie, ale i jiných oborů, se může stát, že studenti středních škol jsou schopni sestavit funkci nebo rovnici, která vede k řešení dané úlohy, ale středoškolskými metodami pak neumějí konkrétní výsledek nalézt. K dokončení řešení takové úlohy může vést některá z přibližných numerických metod, viz např. [4]. Na středních školách však není dostatek prostoru k tomu, aby se učitelé matematiky zabývali numerickými postupy a tak vzniká otázka, zda by alespoň nějaký dostupný software mohl při řešení takových úloh zastoupit potřebné hlubší znalosti matematiky a programování. Přitom lze očekávat, že někteří studenti mohou získat motivaci porozumět algoritmům, které daný software používá.

Tabulkový kalkulátor Microsoft Excel (dále jen MS Excel) je znám jako nástroj pro vytváření tabulek, grafů nebo jako prostředek pro statistickou analýzu dat, prostředek k řešení problémů finanční matematiky, atp. Vzhledem k tomu, že se jedná o snadno dostupný produkt, chceme se v tomto článku věnovat poněkud méně obvyklému, méně známému, ale užitečnému způsobu použití tohoto software. Konkrétně nám půjde o to, abychom představili MS Excel jako numerický prostředek pro řešení rovnic a optimalizačních úloh, což umožní středoškolským studentům dokončit řešení některých jednoduchých úloh, které by pro ně jinak zůstaly neřešitelné. Za tímto účelem popíšeme základní použití doplňku MS Excel nazývaného *Řešitel* (*Solver* v anglické verzi MS Excelu).

1 Řešitel v MS Excelu

Řešitel patří mezi doplňkové aplikace MS Excelu. S jeho pomocí lze nalézt maximální, minimální nebo požadovanou (implicitně nulovou) hodnotu funkce zapsané jako vzorec v některé buňce (nastavovaná buňka) na listu v MS Excelu. *Řešitel* upravuje hodnoty v buňkách (měněné buňky) které jsou použity ve vzorci nastavované buňky tak, aby byl dosažen požadovaný výsledek. Je-li třeba omezit hodnoty, které bude *Řešitel* v modelu používat, lze použít omezující podmínky, které *Řešitel* nabízí. Odkaz na tuto aplikaci lze nalézt v menu **Nástroje – Řešitel**. Pokud není příkaz **Řešitel** v nabídce **Nástroje** k dispozici, je nutné aktivovat tento doplněk volbou **Nástroje – Doplněk** a z otevřeného seznamu doplňků vybrat **Řešitel**. Jestliže v seznamu doplňků nabídka **Řešitel** chybí, pak tento doplněk nebyl nainstalován a je třeba ho dodatečně instalovat.

2 O rovnicích

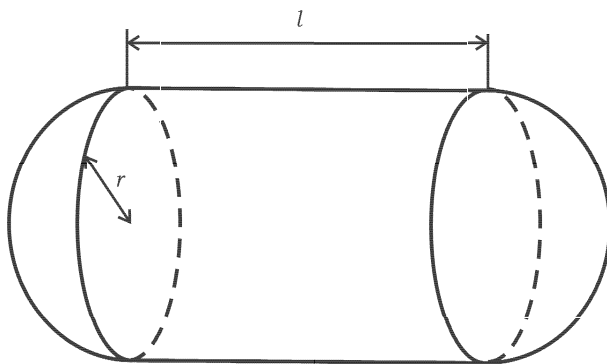
Řešení rovnic je na střední škole věnováno poměrně dost prostoru – studenti se seznamují s metodami řešení rovnic lineárních, kvadratických, exponenciálních, logaritmických, goniometrických nebo rovnic s absolutní hodnotou. V mnoha případech jde při řešení těchto úloh o potřebné mentální cvičení, které obohacuje a rozvíjí analytické schopnosti myšlení studentů. V některých praktických úlohách lze však narazit na rovnice, které nelze zařadit do žádné ze jmenovaných kategorií a k jejichž řešení je třeba použít numerické metody. Příkladem takového problému může být následující úloha, srv. [3].

2.1 Příklad – poloměr nádoby

Nádoba je tvořena rotačním válcem výšky 6 m, na jehož dolní, resp. horní podstavu jsou nasazeny dvě stejné polokoule o poloměru r . Můžeme uvažovat, že jde o cisternu na přepravu pohonných hmot (obr. 1). Má-li být objem nádoby 30 m^3 , jaký je poloměr r obou polokoulí a podstavy válce?

Vzhledem k tomu, že objem obou polokoulí o poloměru r je stejný jako objem koule o poloměru r , můžeme pro objem nádoby použít známý vztah pro výpočet objemu koule. Použijeme-li dále vztah pro výpočet objemu válce, můžeme pro objem nádoby napsat rovnici

$$\pi r^2 \cdot 6 + \frac{4}{3} \pi r^3 = 30$$



Obr. 1 Cisterna o objemu $V = 30 \text{ m}^3$, délky střední části $l = 6 \text{ m}$ a s neznámým poloměrem r .

s neznámou r . Problém byl formulován pomocí poznatků, které má student střední školy k dispozici, nicméně při řešení sestavené rovnice znalosti středoškolské matematiky nestačí. Jak bylo uvedeno výše, lze k řešení podobných úloh použít některou z numerických metod. Ty se však na středních školách neprobírají nebo jsou zařazeny do speciálních seminářů. Vzhledem k jednoduché formulaci i praktickému obsahu by však bylo užitečné řešení nalézt.

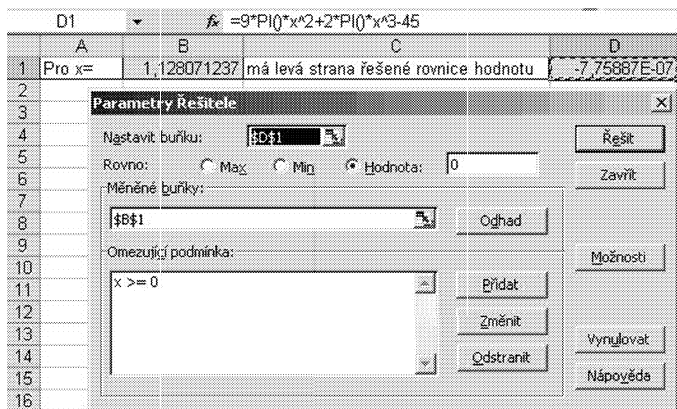
2.2 Řešení v Excelu

Rovnici nejdříve upravíme. Protože je písmeno r v Excelu vyhrazeno pro jiné účely, přejmenujeme neznámou na x . Rovnici vynásobíme $3/2$ a pak odečteme 45, získáme tak rovnici

$$9\pi x^2 + 2\pi x^3 - 45 = 0.$$

Pro řešení nyní zvolíme následující postup: Vybereme buňku, do které bude uložen kořen rovnice – v našem případě např. **B1**. Aby se lépe zapisoval předpis funkce, můžeme tuto buňku pojmenovat, nejlépe stejně jako v rovnici, kterou chceme řešit. Buňku lze pojmenovat tak, že ji vybereme a v horním řádku, který obsahuje adresu buňky, napíšeme místo této adresy požadované jméno, tj. x . Můžeme postupovat i alternativním způsobem, kdy provedeme volbu **Vložit – Název – Definovat** a v otevřeném okně provedeme pojmenování. Dále vybereme buňku, do které zapíšeme

vzorec odpovídající funkci, kterou chceme anulovat – v našem případě vybereme buňku **D1**, do které napíšeme **=9*PI()*x^2+2*PI()*x^3-45**, kde **PI()** reprezentuje π v Excelu. Vzhledem k tomu, že Excel používá při výpočtu numerickou metodu, buňka bude anulována pouze s určitou přesností. Vybereme nástroj Řešitel (viz část 1 tohoto článku), do kterého postupně vyplníme tyto údaje: Do políčka Nastavit buňku, zapíšeme absolutní adresu buňky, ve které je uveden vzorec (v našem případě napíšeme **\$D\$1**). Vybereme nabídku **Hodnota** (v našem případě ověříme, že je tato hodnota nastavena na 0, což je hodnota pravé strany řešené rovnice). Dále v políčku **Měněné buňky** zapíšeme absolutní hodnotu adresy, která obsahuje neznámou rovnice (v našem případě **\$B\$1**). Vzhledem k tomu, že hledanou neznámou je poloměr podstavy válce, můžeme do políčka **Omezující podmínka** nastavit požadavek, aby $x \geq 0$. Nyní již stačí vybrat tlačítko **Řešit** a hledaný výsledek se objeví v buňce označené neznámou x . Skutečná hodnota levé strany je uvedena v buňce, ve které je zapsán vzorec, který představuje výraz na levé straně rovnice. Tímto způsobem lze nalézt $x \doteq 1,128$. Je tedy třeba vyrobit válec, který má poloměr podstavy 1,128 m a stejný poloměr by měly mít i obě připojené polokoule. Výřez z listu, kde je popsán postup uveden, je na obr. 2.



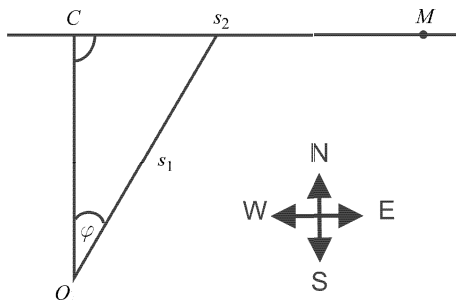
Obr. 2 Výřez z listu, ve kterém je uvedeno nastavení parametrů *Řešitele* pro přibližné nalezení kořene rovnice $9\pi x^2 + 2\pi x^3 - 45 = 0$.

3 Optimalizační úlohy

Termínem optimalizační úloha se v matematice rozumí problém, při kterém je třeba nalézt maximální nebo minimální hodnotu nějaké funkce na dané množině. Studenti středních škol se s takovými úlohami setkávají v nižších ročnících při studiu kvadratické funkce, viz [1] a v závěrečném ročníku při studiu diferenciálního počtu, viz [2]. Podívejme se, jak lze maximum nebo minimum funkce hledat pomocí *Řešitele* MS Excelu.

3.1 Příklad – minimální náklady

Na přímém mořském pobřeží směřujícím ve směru východ – západ leží město M . Ve vzdálenosti 10 km jižně od tohoto pobřeží se v moři nachází ostrov O . Na pobřeží byla v místě, které má nejmenší vzdálenost od ostrova, vybudována vesnice C . Tato vesnice leží 20 km západně od města. Obyvatelé ostrova jezdí na pevninu za prací a na ostrov jezdí také turisté. K dopravě se používá loď a po pobřeží jezdí autobusy. Loď se plaví s průměrnými náklady 100 Kč/km a průměrné náklady na provoz autobusu jsou 40 Kč/km. Označme φ velikost úhlu, který svírá přímý směr plavby lodi od ostrova k pobřeží a severní směr (viz obr. 3) a hledejme velikost tohoto úhlu tak, aby byly náklady vynaložené na přepravu lidí z ostrova O do města M minimální.



Obr. 3

K řešení úlohy je třeba vyjádřit závislost celkových nákladů na přepravu cestujících z ostrova do města na velikosti úhlu φ . Pro $\varphi = 0$ pluje loď kolmo přímo ke břehu. Pro $\varphi = \varphi^*$, kde $\operatorname{tg} \varphi^* = 2$, neboli $\varphi^* = \arctg 2$, pluje loď přímo k městu M . Pro řešení úlohy má zřejmě smysl, aby $\varphi \in \langle 0, \varphi^* \rangle$. Náklady na plavbu lodi lze vyjádřit ve tvaru

$$C_L(\varphi) = 100s_1 = 100 \frac{10}{\cos \varphi}.$$

Náklady na cestu autobusem lze vyjádřit ve tvaru

$$C_A(\varphi) = 40s_2 = 40(20 - 10 \operatorname{tg} \varphi).$$

Celkové náklady jsou tedy

$$C(\varphi) = C_L(\varphi) + C_A(\varphi) = 100 \frac{10}{\cos \varphi} + 40 \cdot (20 - 10 \operatorname{tg} \varphi)$$

a je třeba nalézt hodnotu $\varphi \in \langle 0, \varphi^* \rangle$ tak, aby byly tyto celkové náklady minimální.

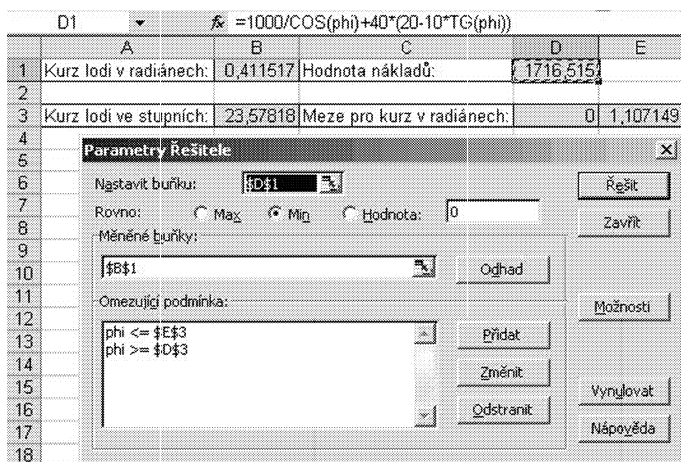
3.2 Řešení v Excelu

Pro řešení zvolíme tento postup: Vybereme buňku, do které bude uložena hodnota proměnné φ , ve které funkce $C(\varphi)$ nabývá svého minima – v našem případě např. **B1**. Aby se lépe zapisoval předpis funkce, můžeme tuto buňku pojmenovat. Zvolíme přepis řeckého písmene φ , tj. **phi**. Dále vybereme buňku, do které zapíšeme vzorec odpovídající funkci $C(\varphi)$ – v našem případě se jedná o buňku **D1**, do které napíšeme **=1000/COS(phi)+40*(20-10*TG(phi))**. Vzhledem k tomu, že Excel používá při výpočtu numerickou metodu, buňka bude obsahovat minimální hodnotu funkce pouze s určitou přesností. Vybereme nástroj **Řešitel**, do kterého vyplníme údaje tak, jak je uvedeno na obr. 4.

Po výběru tlačítka **Řešit** se hledaný výsledek objeví v buňce označené neznámou **phi**, tj. v **B1**. Výsledek je uveden v radiánech, ale pokud ho vynásobíme koeficientem $180/\pi$, získáme hodnotu ve stupních, viz buňka **B3** na obr. 4. Uvedeným způsobem lze nalézt, že loď by měla plout ve směru, který se severním směrem svírá úhel $23,6^\circ$. Minimální náklady na přepravu z ostrova do města jsou 1 716,5 Kč.

4.1 Příklad – maximalizace zisku

Malá papírenská firma vyrábí dva typy sešitů. Pro konkrétnost je označme jako A , resp. B . Ve výrobním procesu jsou použity dva stroje – stroj na stříhání papíru a stroj na sešívání listů. Sešit typu A se na stříhacím stroji připravuje 2 minuty a sešit typu B se připravuje 6 minut. Na šicím stroji se sešit typu A šije 8 minut a sešit typu B se sešívá 4 minuty. Protože výrobce najímá ke každému stroji pouze jednoho pracovníka, může každý z obou výrobních procesů trvat pouze 8 hodin denně, tj. 480 minut. Je-li zisk z prodeje každého sešitu typu A 30 Kč a zisk z prodeje každého sešitu



Obr. 4 Výřez z listu, ve kterém je uvedeno nastavení parametrů *Řešitele* pro přibližné nalezení minimální hodnoty funkce $C(\varphi)$ na intervalu $(0, \arctg 2)$. Tyto meze jsou zapsány do buněk **D3** a **E3**.

typu B 40 Kč, kolik sešitů jednotlivých typů by mělo být vyráběno, aby se dosáhlo maximálního zisku?

Označme x počet sešitů typu A vyrobených za den a y počet sešitů typu B vyrobených za den. Zisk z prodeje všech sešitů typu A vyrobených za den lze pak zapsat jako $30x$ a analogicky zisk z prodeje všech sešitů typu B vyrobených za den lze zapsat jako $40y$. Zisk z prodeje obou typů sešitů vyjadřuje funkce

$$P(x, y) = 30x + 40y,$$

jejíž maximum bychom chtěli nalézt. Stanovme ještě množinu, ze které lze vybírat hodnoty proměnných x a y . Za den lze vyrobit pouze tolik sešitů, aby nebyla překročena doba, kdy může být každý stroj během pracovní směny obsluhován, tj. je třeba, aby platila omezení

$$2x + 6y \leq 480$$

$$8x + 4y \leq 480.$$

Vzhledem k tomu, že lze vyrobit pouze nezáporné množství obou typů sešitů, budeme požadovat, aby $x \geq 0$ a $y \geq 0$.

4.2 Řešení v Excelu

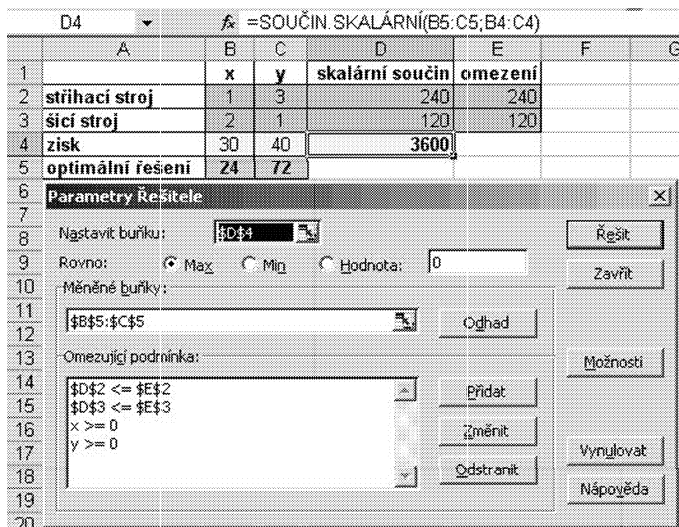
Abychom mohli úlohu efektivněji zapsat do MS Excelu, použijme skalární součin a provedeme vhodné dělení v nerovnicích, které vyjadřují omezení. Úlohu pak můžeme formulovat takto: Hledáme maximum funkce

$$P(x, y) = (30, 40) \cdot (x, y)$$

na množině charakterizované vztahy

$$(1, 3) \cdot (x, y) \leq 240, \quad (2, 1) \cdot (x, y) \leq 120, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Tyto vztahy nyní zapíšeme do sešitu, který otevřeme v Excelu (obr. 5).



Obr. 5 Výřez z listu, na kterém je uvedeno nastavení parametrů *Řešitele* při řešení úlohy, která se týká maximalizace zisku papírnické firmy.

Nejdříve vybereme blok buněk, do kterého zapíšeme neznámý vektor (x, y) , v našem případě jde o blok **B5:C5**. Zvolené buňky můžeme případně přejmenovat na názvy x a y . Dále do bloku buněk **B4:C4** zapíšeme souřadnice vektoru $(30, 40)$, do bloku **B2:C2** zapíšeme souřadnice vektoru $(1, 3)$ a do bloku **B3:C3** zapíšeme souřadnice vektoru $(2, 1)$. Nyní do buněk **D2**, **D3** a **D4** vložíme postupně hodnoty skalárních součinů

$$(30, 40) \cdot (x, y), \quad (1, 3) \cdot (x, y), \quad (2, 1) \cdot (x, y).$$

To lze udělat tak, že označíme např. buňku **D4** a zapíšeme nebo vložíme matematickou funkci **=SOUČIN.SKALÁRNÍ(B5:C5;B4:C4)**, kde blok **B5:C5** reprezentuje vektor (x, y) a blok **B4:C4** reprezentuje vektor $(30, 40)$. To znamená, že v buňce **D4** je hodnota funkce P v bodě (x, y) , což je zisk při výrobě x kusů sešitů typu A a y kusů sešitů typu B . Podobně postupujeme v buňkách **D2** a **D3**, ve kterých takto získáme hodnoty levých stran nerovnic, které vymezují definiční obor funkce P . Do sešitu ještě zapíšeme hodnoty pravých stran těchto nerovnic, k tomu použijeme např. buňky **E2** a **E3**. Nyní je možné otevřít nástroj **Řešitel**, do kterého vyplníme údaje tak, jak je uvedeno na obr. 5 a nakonec zvolíme tlačítko **Řešit**.

Pomocí popsaného postupu lze v buňce označené proměnou x , resp. y nalézt neznámé hodnoty, ve kterých nabývá funkce P maximální hodnotu. V našem případě to jsou hodnoty $x = 24$ a $y = 72$, což znamená, že je třeba vyrábět 24 kusů sešitů typu A a 72 kusů sešitů typu B za den.

5 Závěr

Z uvedených příkladů je zřejmé, že *Řešitel* MS Excelu je užitečný a dostupný numerický nástroj, který lze s výhodou používat pro hledání nulových, maximálních a minimálních hodnot funkcí. Z tohoto důvodu ho lze používat pro řešení některých úloh, které nelze bezprostředně řešit prostředky středoškolské matematiky. Lze ho však použít i v některých kurzech optimalizace pro ekonomy a manažery, viz např. [5], kde lze nalézt i další podrobnosti vztahující se k jeho použití.

Literatura

- [1] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia – Funkce, Prometheus, Praha, 1993.
- [2] *Hrubý, D. – Kubát, J.*: Matematika pro gymnázia, Diferenciální a integrální počet, Prometheus, Praha 1997.
- [3] *Stewart, – J. Redlin, L. – Watson, S.*: Precalculus – Mathematics for Calculus, Brooks/Cole – Thomson Learning, 2002.
- [4] *Fiedler, M. – Vrba, A.*: Základní numerické metody pro III. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku, SPN, Praha 1988.
- [5] *Jablonský, J.*: Operační výzkum, kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování, Professional Publishing, Praha 2002.