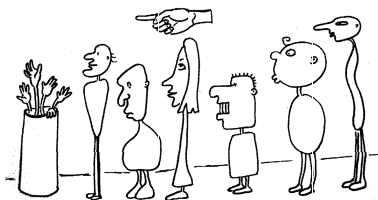


INFORMATIKA

Výšky osob v zástupu

REDAKCE



Dnes přinášíme úlohu, která není náročná po stránce programátorské techniky, ale kde může být pro začínající programátory problémem nalezení vhodného algoritmu.

N lidí různých výšek stojí v zástupu. Každý člověk ví, kolik je před ním lidí, kteří jsou větší než on. Tyto informace od začátku zástupu k jeho konci tvoří posloupnost A . Napište program, který pracuje takto: Na klávesnici se zadají čísla N (počet lidí v zástupu, tj. počet členů posloupnosti A) a členy posloupnosti A . Program vypíše po řadě každému člověku v zástupu (v pořadí od prvního do posledního) jeho relativní výšku pomocí pořadových čísel 1 (nejmenší člověk) až N (nejvyšší člověk).

Ukážeme si čtyři studentská řešení, v nichž jsme stejné programové prvky sjednotili.

```
program VyskyA;
var A: array [1..99] of Integer;
    N,I,J,K: Integer;
begin
    Write('Vysky; pocet lidi: ');
    ReadLn(N);
    for I:=1 to N do ReadLn(A[I]);
    for J:=N downto 1 do
        begin
            I:=N;
```

```

while A[I]<>0 do
    Dec(I);
    WriteLn('V[' ,I, ']=',J);
    for K:=N downto I do Dec(A[K])
end;
ReadLn
end.

```

Řešitel *A* využívá toho, že nejvyšším člověkem v zástupu je ten, u kterého při zpětném postupu od konce posloupnosti poprvé narazíme na nulový člen posloupnosti *A*. Když ho nalezneme, přiřadíme mu relativní výšku *N* a pak zmenšíme o 1 všechny členy posloupnosti *A* od tohoto prvku až do konce posloupnosti. Dosáhneme tím toho, že ohodnocený člen zástupu už z dalšího vyšetřování vypadne (jeho člen posloupnosti *A* je roven -1) a že se situace opakuje – nový nejvyšší člověk (o relativní výšce $N - 1$) je opět ten, u kterého při zpětném postupu od konce posloupnosti poprvé narazíme na nulový člen posloupnosti *A*. Toto řešení je pěkné, ale jeho závadou je to, že není splněna podmínka správného pořadí výpisu. Uvedenou vadu bychom ale mohli snadno odstranit použitím pomocného pole *V*, do kterého bychom si nalezené relativní výšky jednotlivých lidí průběžně ukládali. Namísto příkazu `WriteLn` bychom v cyklu prováděli příkaz `V[I]:=J` a po zaplnění celého pole *V* bychom jednoduše vypsali jeho obsah v pořadí od hodnoty *V*[1] do *V*[*N*].

```

program VyskyB;
var A,V: array [1..99] of Integer;
    N,I,K: Integer;
begin
    Write('Vysky; pocet lidi: ');
    ReadLn(N);
    for I:=1 to N do ReadLn(A[I]);
    V[1]:=0;
    for K:=2 to N do
        begin
            for I:=1 to K-1 do
                if V[I]>=K-1-A[K] then
                    Inc(V[I]);
            V[K]:=K-1-A[K]
        end
    end
end.

```

```

end;
for I:=1 to N do WriteLn('V[',I,']= ',V[I]+1);
ReadLn
end.

```

Řešitel *B* vytvořil algoritmus myšlenkově náročnější a posloupnost výšek vytváří „odpředu“ v poli *V* postupným vyhodnocováním vztahu mezi hodnotou členu posloupnosti *A* a jeho indexem. Hodnoty uložené v poli *V* udávají po každém průchodu hlavního cyklu programu vzájemné pořadí výšek těch lidí, kteří se nacházejí v počátečním úseku zástupu délky *K*. Pro větší názornost vám doporučujeme provést na jednoduchém příkladu simulaci tohoto postupu.

```

program VyskyC;
var A,X: array [1..99] of Integer;
    N,I,K,S: Integer;
begin
  Write('Vysky; pocet lidi: ');
  ReadLn(N);
  for I:=1 to N do
    begin
      ReadLn(A[I]); X[I]:=1
    end;
  for K:=N downto 1 do
    begin
      S := 0; I := 0;
      repeat
        Inc(I);
        S := S+X[I]
      until S >= A[K]+1;
      A[K] := N+1-I;
      X[I] := 0
    end;
  for I:=1 to N do WriteLn('A[',I,']= ',A[I]);
  ReadLn
end.

```

Řešitel *C* vychází z toho, že relativní výšku posledního člověka v zástupu lze určit zcela jednoduše – je-li poslední člen posloupnosti *A* roven např. 5, znamená to, že vpředu je 5 osob vyšších, takže poslední člověk v zástupu je podle výšky šestý. Řešitel v programu zavedl pomocné pole *X* použitých relativních výšek – jednička v něm značí, že daná relativní výška ještě nebyla použita, nula označuje, že už použita byla. Pak od konce posloupnosti *A* vyhodnocuje její jednotlivé členy, pomocí pole *X* jim přiřazuje relativní výšku v zástupu a tu ukládá odzadu přímo do pole *A*.

```

program VyskyD;
var A,V: array [1..99] of Integer;
    N,I,K: Integer;
begin
    Write('Vysky; pocet lidi: ');
    ReadLn(N);
    for I:=1 to N do ReadLn(A[I]);
    for K:=N downto 1 do
        begin
            I := N+1;
            repeat
                Dec(I);
                Dec(A[I])
            until A[I]=-1;
            V[I] := K
        end;
    for I:=1 to N do WriteLn('V[' ,I ,']= ',V[I]);
    ReadLn
end.

```

Řešitel *D* použil úplně stejnou myšlenku jako řešitel *A*, ale zvolil jiný způsob jejího naprogramování. Navíc použil pomocné pole *V*, o kterém jsme se zmínili v závěru komentáře k řešení *A*. Díky němu vypisuje výsledky v požadovaném pořadí.

Všechna čtyři studentská řešení úlohy jsou věcně správná, mají podobnou časovou i paměťovou náročnost a můžeme je proto hodnotit jako stejně dobrá.

(Autorkou úvodní ilustrace je Mgr. Jaroslava Čermáková z Hlinska v Čechách.)

Řešení rovnic v Excelu

VÁCLAV MATYÁŠ

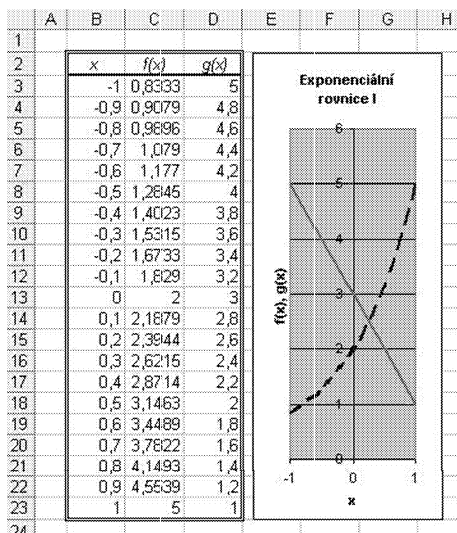
Purkyňovo gymnázium, Strážnice

Zobrazování funkcí, o němž jsme pojednávali v [1], [2] je možno jednoduchým způsobem přístupným i středoškolským studentům využít při grafickém a při numerickém řešení rovnic. V hodinách matematiky se probírají vybrané typy rovnic, které lze řešit analyticky, ale je docela vhodné podpořit a doplnit tuto výuku i využitím Excelu, pokud ho již studenti ovládají.

Příklad 1. Řešte rovnici

$$2^x + 3^x = 3 - 2x.$$

První způsob, který dává velmi názorné obrázky, spočívá v tom, že znázorníme do jednoho obrázku funkci $f(x) = 2^x + 3^x$ (levou stranu rovnice) a funkci $g(x) = 3 - 2x$ (pravou stranu rovnice) a řešení rovnice dostaneme jako x -ovou souřadnici průsečíku obou grafů.



Obr. 1

Postupem dle [1] obě funkce tabelujeme (zde je z tiskových důvodů zvolen jen interval od -1 do 1); do C3 zadáme $=2^{\wedge}B3+3^{\wedge}B3$, do D3 pak $=3-2^{\wedge}B3$. Z grafu vidíme, že zadaná rovnice má řešení $x_0 \in (0; 1)$. Z tabulky zjistíme, že

$$f(0,2) < g(0,2), \quad \text{ale} \quad f(0,3) > g(0,3),$$

tedy bod x_0 , v němž se obě funkce rovnají, leží někde mezi $0,2$ a $0,3$, tj. $x_0 \in (0,2; 0,3)$. Chceme-li tuto hodnotu upřesnit, přejdeme na jednoduché numerické řešení. K tomu si tabelujeme obě funkce na intervalu $(0,2; 0,3)$, viz obr. 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		x	f(x)	g(x)		x	f(x)	g(x)
3		0,2	2,394429	2,6		0,248	2,500745	2,504
4		0,21	2,41618	2,58		0,2481	2,500972	2,5038
5		0,22	2,438139	2,56		0,2482	2,501198	2,5036
6		0,23	2,460307	2,54		0,2483	2,501425	2,5034
7		0,24	2,482687	2,52		0,2484	2,501652	2,5032
8		0,25	2,505281	2,5		0,2485	2,501878	2,503
9		0,26	2,528091	2,48		0,2486	2,502105	2,5028
10		0,27	2,551119	2,46		0,2487	2,502332	2,5026
11		0,28	2,574367	2,44		0,2488	2,502559	2,5024
12		0,29	2,597838	2,42		0,2489	2,502785	2,5022
13		0,3	2,621534	2,4		0,249	2,503012	2,502
14		0,24	2,482687	2,52		0,2487	2,502332	2,5026
15		0,241	2,484937	2,518		0,24871	2,502354	2,50258
16		0,242	2,487189	2,516		0,24872	2,502377	2,50256
17		0,243	2,489443	2,514		0,24873	2,5024	2,50254
18		0,244	2,491699	2,512		0,24874	2,502422	2,50252
19		0,245	2,493957	2,51		0,24875	2,502445	2,5025
20		0,246	2,496218	2,508		0,24876	2,502468	2,50248
21		0,247	2,49848	2,506		0,24877	2,50249	2,50246
22		0,248	2,500745	2,504		0,24878	2,502513	2,50244
23		0,249	2,503012	2,502		0,24879	2,502536	2,50242
24		0,25	2,505281	2,5		0,2488	2,502559	2,5024
25								

Obr. 2

Zjistíme, že

$$f(0,24) < g(0,24), \quad \text{ale} \quad f(0,25) > g(0,25),$$

takže $x_0 \in (0,24; 0,25)$. Nyní tabelujeme tento interval a zjistíme, že

$$f(0,248) < g(0,248), \quad \text{ale} \quad f(0,249) > g(0,249),$$

takže $x_0 \in (0,248; 0,249)$. Pokračujeme a dále tabelujeme tento interval a najdeme

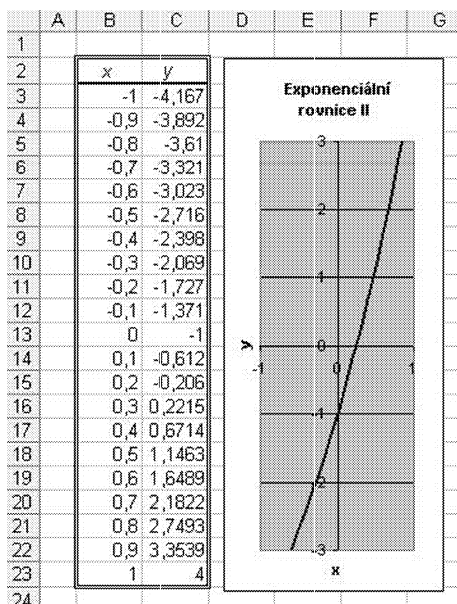
$$f(0,2487) < g(0,2487), \quad \text{ale} \quad f(0,2488) > g(0,2488),$$

takže $x_0 \in (0,2487; 0,2488)$. V dalším kroku máme

$$f(0,24876) < g(0,24876), \quad \text{ale} \quad f(0,24877) > g(0,24877),$$

takže $x_0 \in (0,24876; 0,24877)$. Tak můžeme pokračovat, pokud stačí přesnost Excelu. Samozřejmě přitom musíme podle potřebného počtu desetinných míst rozšiřovat sloupce.

Druhý způsob řešení takové rovnice je založen na tom, že rovnici anulujeme a porovnáváme získanou levou stranu, tj. funkci $y = f(x) = 2^x + 3^x + 2x - 3$ a nulu; do C3 tedy zadáme $=2^{B3}+3^{B3}+2*B3-3$. Hledáme pak bod, kde graf této funkce protíná osu x . Kontrola správnosti je pro nás trochu obtížnější, protože se nejedná o nějakou známou funkci, viz obr. 3.



Obr. 3

Na druhé straně je pro nás jednodušší orientace v tabulce, protože hledáme vždy jen přechod mezi zápornými a kladnými hodnotami funkce f , viz též obr. 4.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		x	y		x	y
3		0,2	-0,20557		0,248	-0,003254857
4		0,21	-0,16382		0,2481	-0,002828262
5		0,22	-0,12186		0,2482	-0,002401646
6		0,23	-0,07969		0,2483	-0,001975009
7		0,24	-0,03731		0,2484	-0,00154835
8		0,25	0,005281		0,2485	-0,001121669
9		0,26	0,048091		0,2486	-0,000694967
10		0,27	0,091119		0,2487	-0,000268244
11		0,28	0,134367		0,2488	0,000158502
12		0,29	0,177838		0,2489	0,000585268
13		0,3	0,221534		0,249	0,001012057
14		0,24	-0,03731		0,2487	-0,000268244
15		0,241	-0,03306		0,24871	-0,00022557
16		0,242	-0,02881		0,24872	-0,000182896
17		0,243	-0,02456		0,24873	-0,000140222
18		0,244	-0,0203		0,24874	-9,75481E-05
19		0,245	-0,01604		0,24875	-5,48737E-05
20		0,246	-0,01178		0,24876	-1,21991E-05
21		0,247	-0,00752		0,24877	3,04758E-05
22		0,248	-0,00325		0,24878	7,31508E-05
23		0,249	0,001012		0,24879	0,000115826
24		0,25	0,005281		0,2488	0,000158502

Obr. 4

Příklad 2. Řešení goniometrické rovnice

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0,$$

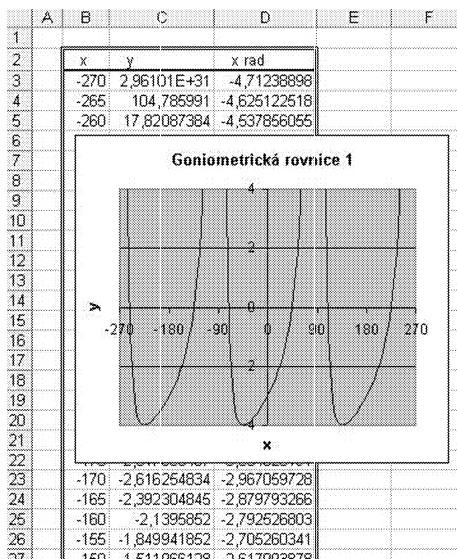
viz [3], není při výuce matematiky problémem. Provede se substituce $\operatorname{tg} x = z$, najdou se kořeny vzniklé kvadratické rovnice $z^2 + 2z - 3 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, takže

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (= 45^\circ + k \cdot 180^\circ),$$

$$x_2 = -1,107148717 + k\pi (= -63,43^\circ + k \cdot 180^\circ), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zobrazme si nyní v Excelu funkci $y = \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3$ (obr. 5). Při tabelaci této funkce vložíme do buňky C3 výraz $=(\operatorname{TG}(\operatorname{B3}*\operatorname{PI}()/180))^2+2*\operatorname{TG}(\operatorname{B3}*\operatorname{PI}()/180)-3$ a do D3 výraz $=\operatorname{B3}*\operatorname{PI}()/180$. Funkce tangens má v Excelu argument v obloukové míře; pomocí složené funkce jsme pro větší názornost zadali argument v míře stupňové, ale sloupec „x rad“ nám umožňuje, abychom řešení rovnice dostávali v míře obloukové.

Z grafu vidíme, že zadaná funkce je zřejmě periodická s periodou 180° (π), v intervalu $(0, \pi)$ jsou dvě řešení x_1 a x_2 , a jistě dovedeme z obrázku odhadnout, že jsou to právě řešení vypočtená výše. Numerické nalezení hodnot x_1 a x_2 se provádí stejně jako v příkladu 1.



Obr. 5

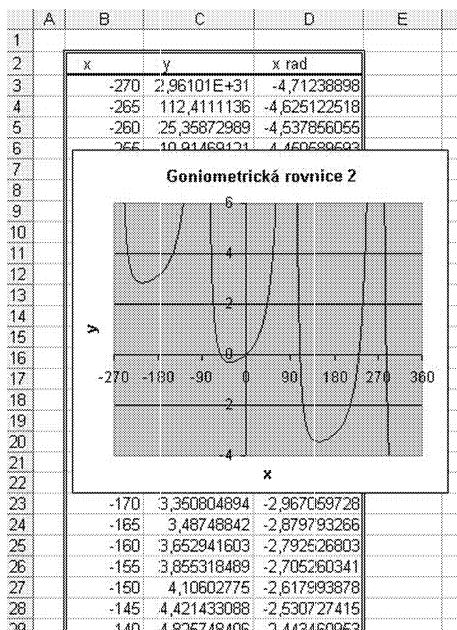
Zadané rovnice lze různě obměňovat, přičemž algoritmus řešení se podstatně nemění. Tak lze pozměnit např. zadání z příkladu 2.

Příklad 3. Řešení goniometrické rovnice

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - x = 0.$$

S touto rovnicí si už školská matematika neporadí. Použijeme-li Excel, pak opět zobrazíme funkci na levé straně rovnice (obr. 6). Přitom do C3 dáme

$$=(\text{TG}(\text{B3}*\text{PI}()/180))^2+2*\text{TG}(\text{B3}*\text{PI}()/180)-\text{B3}*\text{PI}()/180. \quad (1)$$



Obr. 6

Obrázek 6 nám umožňuje základní orientaci, např. že tu již není periodičnost, že jeden kořen rovnice je záporný, kořenem je i 0 a pak následuje zřejmě nekonečně mnoho kořenů kladných, pro jejichž zápis nemáme nějaký elegantní způsob. Z nezkrácené tabulky, jež byla použita pro vykreslení grafu, lze zjistit první odhady přibližné hodnoty prvních pěti kořenů:

$$x_1 \in (-0,96; -0,87), \text{ tj. } (-55^\circ, -50^\circ),$$

$$x_2 = 0, \text{ tj. } 0^\circ,$$

$$x_3 \in (1,92; 2,01), \text{ tj. } (110^\circ, 115^\circ),$$

$$x_4 \in (4,00; 4,16), \text{ tj. } (230^\circ, 235^\circ),$$

$$x_5 \in (4,97; 5,06), \text{ tj. } (285^\circ, 290^\circ).$$

	A	B	C	D
28		-52,5	0,00824348	-0,9162979
29		-52,4	0,00367058	-0,9145525
30		-52,3	-0,0008457	-0,9128072
31		-52,4	0,00367058	-0,9145525
32		-52,39	0,00321642	-0,914378
33		-52,38	0,00276282	-0,9142035
34		-52,37	0,00230979	-0,9140289
35		-52,36	0,00185732	-0,9138544
36		-52,35	0,00140541	-0,9136799
37		-52,34	0,00095407	-0,9135053
38		-52,33	0,00050329	-0,9133308
39		-52,32	5,3075E-05	-0,9131563
40		-52,31	-0,0003966	-0,9129817
41		-52,32	5,3075E-05	-0,9131563
42		-52,319	8,0839E-06	-0,9131388
43		-52,318	-3,69E-05	-0,9131214
44		-52,319	8,0839E-06	-0,9131388
45		-52,3189	3,5852E-06	-0,9131371
46		-52,3188	-9,136E-07	-0,9131353
47		-52,3189	3,5852E-06	-0,9131371
48		-52,31889	3,1353E-06	-0,9131369
49		-52,31888	2,6854E-06	-0,9131367
50		-52,31887	2,2355E-06	-0,9131365
51		-52,31886	1,7857E-06	-0,9131364
52		-52,31885	1,3358E-06	-0,9131362
53		-52,31884	8,8592E-07	-0,913136
54		-52,31883	4,3605E-07	-0,9131358
55		-52,31882	-1,382E-08	-0,9131357
56		x	y	x rad
57				

Obr. 7

změní na zápornou; tak dostáváme $x_1 \in (-52,32^\circ, -52,31^\circ)$. V dalším kroku budeme od 1. hodnoty 52,32 postupovat po tisícínách, tj. do B42 dáme $=B41+0,001$, v B45 pak bude $=B41+0,0001$ a v B48 podobně $=B41+0,00001$. Nakonec tak dostaneme $x_1 \in (-52,31883^\circ; -52,31882^\circ)$, tj. $x_1 \doteq -52^\circ 19' 8''$ a v obloukové míře je to zaokrouhlené $-0,913136$.

Literatura

- [1] Matyáš, V.: Graf funkce s parametry v Excelu. MFI, r.17 (2007/08), č. 2, str. 106–113.
- [2] Matyáš, V.: Graf nespojitě funkce s parametry v Excelu. MFI, r. 17, č. 8, str. 499–503.
- [3] Odvárko, O.: Matematika pro gymnázia. Goniometrie. Prometheus, Praha 1997.

Chtějme nyní najít přesnější hodnotu záporného kořene. Můžeme postupovat jako v příkladu 1, ale celý postup lze racionalizovat. Při výpočtech vedoucích k obr. 2 nám šlo o názorné předvedení principu zjišťování dalších desetinných míst. Nyní však lze uvažovat takto: Záhlaví ponecháme jako v obr. 6 a budeme pracovat jen v těchto třech sloupcích. Ježto $x_1 \in (-55^\circ, -50^\circ)$, vložíme do buňky B3 hodnotu -55 , do B4 příkaz $=B3+0,1$, do C3 opět (1) a do D3 opět přepočítání x na obloukovou míru $=B3*PI()/180$. Nyní B4 kopírujeme dolů, ale jen do chvíle, až se hodnoty ve sloupci C změní z kladných na zápornou. Vidíme, že se to stane na intervalu $(-52,4^\circ, -52,3^\circ)$. Do následující buňky B31 vložíme první z těchto hodnot $-52,4$, do B32 pak $=B31+0,01$ a kopírujeme B32 opět tak dlouho, dokud hodnoty ve sloupci C se z kladných ne-