

INFORMATIKA

Dluhopisy (Úlohy z MO – kategorie P, 21. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha



V dnešním pokračování seriálu o zajímavých programátorských úlohách z Matematické olympiády – kategorie P se zastavíme u soutěžní úlohy krajského kola právě skončeného 57. ročníku MO (školní rok 2007/2008). Všechny soutěžní úlohy pro 57. ročník MO kategorie P navrhli organizátoři olympiády

z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě. Tato úloha se zabývá problémem „ze života“ jak dosáhnout maximálního zisku při obchodování s dluhopisy, máme-li dán počáteční kapitál. Uvažovaný model obchodování s dluhopisy je ovšem oproti skutečnosti značně zjednodušen, předpokládá neměnné kurzy a výnosnost jednotlivých obchodovaných dluhopisů během celého sledovaného období. Začneme jako obvykle přesným zadáním soutěžní úlohy:

Kleofáš nedávno zdědil po své bohaté tetičce Anastázii hromadu peněz. Nevěděl však co s nimi, a proto se rozhodl investovat je do dluhopisů. Od vás si chce nechat poradit, jak by měl svou investici optimálně spravovat.

Pro jednoduchost budeme předpokládat následující skutečnosti:

- Každý typ dluhopisu má svoji pevnou cenu, stejnou při koupi i prodeji.
- Každý typ dluhopisu má pevně daný roční výnos, který se vyplácí vždy na konci roku.
- Je možné nakoupit libovolné množství každého typu dluhopisu.

Uvažujme například následující situaci: Banka nabízí dva typy dluhopisů: Dluhopisy za 4 000 korun s ročním výnosem 400 a dluhopisy za 3 000 korun s ročním výnosem 250. Má-li Kleofáš 10 000 korun, nejlepší, co s nimi může udělat, je koupit dva dluhopisy po 3 000 a jeden za 4 000, čímž získá roční výnos 900 korun. Po dvou letech obdrží Kleofáš dvakrát výnosy a bude mít celkově kapitál 11 800 korun. V tomto okamžiku se mu vyplatí jeden dluhopis za 3 000 korun prodat a místo něj si koupit dluhopis za 4 000. Po třetím roce bude jeho kapitál roven 12 850 korunám.

Soutěžní úloha:

Napište program, který přečte ze vstupu Kleofášův počáteční kapitál, ceny a výnosy nabízených dluhopisů a počet roků, na které chce Kleofáš investovat, a spočítá, kolik nejvíce peněz může Kleofáš mít po uplynutí daného počtu roků.

Formát vstupu:

Na prvním řádku vstupu je jedno celé číslo K ($1 \leq K \leq 1\,000\,000$), které udává Kleofášův počáteční kapitál. Na druhém řádku je uveden počet typů nabízených dluhopisů D ($1 \leq D \leq 100$). Na třetím řádku je D dvojic celých čísel c_i a v_i , které představují ceny a výnosy jednotlivých dluhopisů ($0 < c_i \leq 10^9$, $0 \leq v_i \leq c_i/10$, c_i je vždy násobkem $T=1000$). Na posledním řádku vstupu je uveden počet roků R ($1 \leq R \leq 40$).

Časovou složitost svého algoritmu vyjádřete pomocí K , D , T a R . Navrhnete algoritmus, který pro hodnoty K , D , T a R z výše uvedených rozsahů bude co nejrychlejší.

Formát výstupu:

Výstupem programu je jediné číslo, které určuje maximální hodnotu Kleofášova kapitálu po R letech obchodování s dluhopisy. Můžete předpokládat, že se tato hodnota vejde do běžné celočíselné proměnné.

Problém si nejprve objasníme na několika ilustrujících příkladech. Předpokládejme vstup ve tvaru

10 000				počáteční kapitál
2				počet dluhopisů
4 000	400	3 000	250	ceny a výnosy jednotlivých dluhopisů
4				počet roků

Výstupem programu bude číslo 14050. Jedná se přesně o příklad ze zadání úlohy, pouze prodloužený o jeden další rok. Ve čtvrtém roce bude Kleofáš vlastnit 3 dluhopisy po 4000, čímž vydělá dalších 1200 korun.

V druhém příkladu uvažujeme vstup

100 000				
3				
103 000	9 001	47 000	7 83 000	100
31				

Kleofáš koupí jeden dluhopis za 83000 korun. Tím za 30 let získá 3000 korun. Na poslední rok si konečně může koupit jeden dluhopis za 103000. V posledním roce tedy vydělá dalších 9001. Správným výsledkem proto bude 112001.

A ještě třetí příklad se vstupem

100 000				
3				
103 000	9 001	47 000	7 83 000	100
37				

Jedná se vlastně o pokračování předchozího příkladu, pouze investice je delší o 6 let. Průběh bude stejný jako v předchozím příkladu, navíc po 36. roce Kleofáš dokoupí jeden dluhopis za 47000, takže v posledním roce získá ještě o 7 korun více. Výsledkem je proto číslo 166014.

Primitivní algoritmus řešení úlohy by mohl být založen na slepém zkoušení všech možností, takové řešení by ovšem bylo značně neefektivní. Mnohem lepší řešení získáme s využitím techniky dynamického programování, s níž jste se mohli seznámit před rokem v 17. dílu našeho seriálu [1] nebo třeba v učebnici [2].

Nejprve si všimněte, že na konci každého roku po vyplacení ročních výnosů může Kleofáš všechny své dluhopisy prodat a podle své aktuální finanční situace se může znovu rozhodnout, jaké dluhopisy si pořídí do dalšího roku. To je možné díky skutečnosti, že v naší úloze neuvažujeme

žádné poplatky za nákup a prodej dluhopisů. Můžeme tedy řešit každý rok investování zcela samostatně a nezávisle na ostatních letech. Nadále se proto omezíme na otázku, jaký nejvyšší roční výnos $V[P]$ můžeme nákupem dluhopisů získat, pokud máme na začátku roku k dispozici finanční prostředky ve výši P .

Celé řešení úlohy potom bude vypadat tak, že na začátku prvního roku nakoupíme za počáteční kapitál K nejvýhodnějším možným způsobem dluhopisy, na konci roku se nám majetek zvýší o výnosy $V[K]$ a do druhého roku zvolíme novou co nejvýhodnější investici vycházející z našich celkových finančních prostředků ve výši $K+V[K]$. Stejným způsobem postupujeme i v dalších letech, popsany výpočet se tedy opakuje tolikrát, kolik roků chceme investovat.

Jak tedy spočítáme pro jistý finanční obnos P nejvyšší dosažitelný roční výnos $V[P]$? Za našich P korun chceme koupit několik kusů dluhopisů ze známé nabídky D druhů dluhopisů s cenami c_i a ročními výnosy v_i . Je nám pochopitelně jedno, v jakém pořadí je koupíme, některý dluhopis ale musíme koupit jako první. Koupíme-li nejdříve j -tý dluhopis, získáme z něj výnos v_j a zůstane nám ještě $P - c_j$ korun. Za ty nakoupíme co nejvýhodněji další dluhopisy, čímž vyděláme dalších $V[P - c_j]$ korun. Celkově tedy dosáhneme ročního výnosu $v_j + V[P - c_j]$. Jelikož ale nevíme, který dluhopis bude nejvýhodnější koupit jako první, vyzkoušíme všechny možnosti a vybereme z nich tu, která povede k nejvyššímu výnosu. Dostáváme tak vztah

$$V[P] = \max\{v_1 + V[P - c_1], v_2 + V[P - c_2], \dots, v_D + V[P - c_D]\}$$

Maximum bereme samozřejmě pouze přes ty dluhopisy, které si můžeme za P korun koupit, tzn. pro které $c_j \leq P$.

K výpočtu $V[P]$ podle uvedeného vztahu potřebujeme znát hodnoty $V[P - c_1], V[P - c_2], \dots, V[P - c_D]$. Ty by sice bylo možné určovat rekurzivním výpočtem (voláním rekurzivní funkce pro menší hodnoty argumentů), to by ale vedlo k velmi neefektivnímu řešení, neboť by se stejné hodnoty počítaly opakovaně mnohokrát. Úlohu proto vyřešíme dynamickým programováním, budeme postupovat odspodu od nejmenších hodnot. Jistě platí $V[0]=0$, dále spočítáme $V[1]$, potom $V[2]$, atd., dokud se nedostaneme k určení hodnoty $V[P]$. Všechny spočítané hodnoty si ukládáme do pole V . Každou z hodnot jsme vždy spočítali z předcházejících hodnot, které jsme v tu chvíli již znali.

Musíme se ještě rozhodnout, které všechny hodnoty $V[P]$ si takto máme předem spočítat, tzn. nakolik může vzrůst Kleofášův majetek. Podle zadání je výnos každého dluhopisu roven nejvýše 10 % jeho ceny, za jeden rok tedy může vzrůst celkový Kleofášův kapitál při jakékoliv uvažované investici nejvýše o 10 %. Za R roků proto dosáhne hodnoty nejvýše $K \cdot 1,1^R$. Z hlediska programové realizace algoritmu bude pro nás nejjednodušší spočítat si předem do pole V všechny hodnoty $V[P]$ až do této meze, i když pro konkrétní vstupní data může být reálné zhodnocení dluhopisů horší a Kleofášův kapitál nemusí této horní hranice dosáhnout. Jinou možností by bylo nepočítat si hodnoty $V[P]$ předem, ale dopočítávat je podle potřeby v každém roce.

V zadání úlohy je také stanoveno, že ceny všech dluhopisů jsou násobkem $T = 1\,000$. Pokud tedy má Kleofáš na začátku roku třeba 14 947 korun, může z nich při své investici v tomto roce využít pouze 14 000 korun. Výnosy i celkový kapitál musíme sice počítat po skončení každého roku s přesností na koruny, ale při rozhodování, která investice bude nejvýhodnější, potřebujeme znát hodnoty $V[P]$ pouze pro násobky T .

Zbývá odhadnout časovou a paměťovou složitost algoritmu. Nejprve budeme počítat potřebné hodnoty $V[P]$, kterých je celkem $K \cdot 1,1^R / T$. Každou z nich spočítáme podle výše uvedeného vztahu v čase $O(D)$, takže celou tuto první část výpočtu zvládneme v čase $O(D \cdot K \cdot 1,1^R / T)$. Vlastní výpočet zhodnocení kapitálu je pak už velmi jednoduchý, R -krát zopakujeme navýšení majetku o předem spočítaný výnos, což představuje práci $O(R)$. Tento čas je zanedbatelný v porovnání s odhadem $O(D \cdot K \cdot 1,1^R / T)$ na celkovou časovou složitost algoritmu.

V programu budeme potřebovat dvě pole velikosti D na uložení vstupních dat – cen a výnosů jednotlivých dluhopisů. K vlastnímu výpočtu nám pak už postačí jedno jednorozměrné pole V , do kterého si uložíme předem spočítaná maximální možná zhodnocení kapitálu. Velikost tohoto pole můžeme odhadnout počtem uložených údajů $K \cdot 1,1^R / T$. Uvážíme-li omezení ze zadání úlohy $K \leq 1\,000\,000$, $R \leq 40$, $T=1\,000$, vyjde nám potřebná velikost pole menší než 50 000, takže takové pole V můžeme bez problému použít.

```
program Dluhopisy;
```

```
const MAXD = 100;      {maximální počet dluhopisů}
      T = 1000;         {násobek ceny dluhopisů}
```

```

MAXV = 50000; {maximální dosažitelný kapitál / T}

var cena, vynos: array[1..MAXD] of longint;
    {popis dluhopisů}
V: array[0..MAXV] of longint; {maximální roční výnosy}
K: longint; {počáteční kapitál}
D: longint; {počet dluhopisů}
R: longint; {počet roků - délka investice}
P: longint; {maximální dosažitelný kapitál / T}
i, j: longint;

begin
read(K, D);
for i:=1 to D do
    begin
    read(cena[i], vynos[i]);
    cena[i] := cena[i] div T; {ceny uložíme v násobcích T}
    end;
read(R);

P := round(K * exp(R*ln(1.1)) / T) + 1;
V[0] := 0;
for i:=1 to P do {investovaná částka v násobcích T}
    begin
    V[i] := 0;
    for j:=1 to D do {nabízený dluhopis}
        if i >= cena[j] then {lze ho koupit}
            if vynos[j] + V[i-cena[j]] > V[i] then
                {vyplatí se koupit}
                V[i] := vynos[j] + V[i-cena[j]];
    end;

for i:=1 to R do {roky investování}
    K := K + V[K div T]; {maximální zhodnocení za jeden rok}
writeln(K); {výsledný kapitál}
end.

```

Literatura

- [1] *Töpfer, P.*: Společná vybraná podposloupnost (Úlohy z MO – kategorie P, 17. část), MFI, roč. 17 (2007 – 2008), č. 2.
- [2] *Töpfer, P.*: Algoritmy a programovací techniky, Prometheus, Praha 2007 (2. vydání).

(Autorkou úvodní ilustrace je Mgr. Jaroslava Čermáková z Hlinska v Čechách.)

Matematika na internetu

JIŘÍ HÁTLE

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Internet je mohutnou a stále dynamicky se rozvíjející studnicí informací, trůfám si říci všeho druhu, a zasahující do každé oblasti. Své místo na internetu má také matematika. Najdeme zde stránky základních a středních škol, kde organizují matematické kroužky, semináře a projekty, stránky fakult a kateder vysokých škol a univerzit zabývajících se matematikou, osobní stránky studentů a učitelů matematiky, či lidí, pro které je matematika velkým zájmem a koníčkem.

Na toto téma byl v MFI před časem publikován příspěvek [1]. Protože neustálý rozvoj internetu stále přináší na jedné straně vznik nových a nových stránek, ale také i zánik některých starších stránek, klade si tento článek za cíl situaci zmapovat a upozornit na takové stránky na internetu, jejichž obsahem jsou převážně témata středoškolské matematiky a které tedy mohou pomoci středoškolským učitelům matematiky při jejich přípravě na hodinu i v samotné výuce. Přitom mohou posloužit nejen jako zdroj informací, ale také jako zdroj zajímavých nebo zábavných úloh, testů, hříček, námětů na výuku atd. Zaměřujeme se na stránky v češtině resp. slovenštině, kde při čerpání informací odpadá možná jazyková bariéra čtenáře a uživatele internetu v jedné osobě. (Odkazy na stránky zabývající se matematikou v cizím jazyce jsou uvedeny v [1]. Konkrétně jsou to odkazy 11 – 15, které jsou platné a tyto stránky v současné době fungují. Přidejme k nim ještě jeden „cizokrajný“ odkaz: mathworld.wolfram.com)

1. Cifrikova matematika (www.matematika.webz.cz,
www.matematika.tk).
2. Matematika polopatě (matematika.havrlant.net).
3. E – matematika (www.e-matematika.cz).
4. Matematika online (www.aristoteles.cz/matematika/matematika.php).
5. Excellent Matematika (matematika.host.sk).
6. Matematika (matematika.wz.cz).
7. Matematika pro každého (www.maths.cz).
8. Zábavná matematika (www.tady.cz/zabavna.matematika).
9. Testpark.cz (www.testpark.cz/testy/matematika).
10. Cabri geometrie (www.pf.jcu.cz/cabri).

Poznámka: Všechny výše uvedené stránky byly v době psaní tohoto článku v provozu.

V tabulce 1 je znázorněno, ke kterému tématu se na konkrétní stránce vyskytuje text nebo příklady.

Tab. 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Základní poznatky z matematiky			✓		✓		✓	✓	✓	
Rovnice a nerovnice	✓	✓	✓	✓			✓	✓		
Funkce + Goniometrie	✓	✓	✓	✓	✓		✓			
Planimetrie + Stereometrie + Analytická geometrie	✓	✓	✓			✓	✓			✓
Kombinatorika, statistika, pravděpodobnost		✓	✓	✓		✓				
Posloupnosti a řady	✓									
Komplexní čísla		✓	✓							
Diferenciální a integrální počet	✓		✓	✓						

1. Cifrikova matematika

(www.matematika.webz.cz, www.matematika.tk)

Na stránkách zájemce nalezne teorii a řešení příklady, obojí si může ve většině případů stáhnout ve formátech .doc, .pdf nebo .zip. Stránky

jsou rozděleny do kategorií: algebra, matematická analýza, ostatní, fórum (dotazy a odpovědi či návody řešení), hry (logické a další online hry, online kalkulačka). Sám autor, student matematiky na pedagogické fakultě, upozorňuje, že stránky nejsou bez chyb.

2. Matematika polopatě (matematika.havrlant.net)

Stránka obsahuje matematické fórum, kde uživatelé (nutnost registrace) mohou vkládat dotazy a odpovědi; doučování – nabídka a poptávka; odkazy na stránky o matematice a angličtině, na IQ test; a matematická témata viz tabulka 1.

3. E – matematika (www.e-matematika.cz)

Tento portál se uchází o přízeň matematiků svým přízviskem „nesnesitelně lehká matematika“. Nabízí texty, ukázkově řešené příklady, příklady k procvičení, písemky i čtvrtletní práce k tématům hlavně základních a středních škol, některé zdarma, některé za poplatek.

4. Matematika online

(www.aristoteles.cz/matematika/matematika.php)

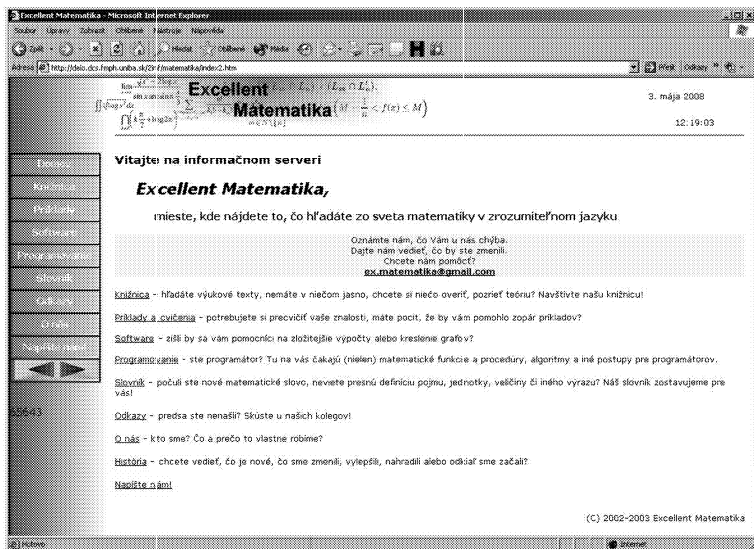
Web, na kterém najdete také fyziku a chemii, obsahuje převážně učební texty, přehledné tabulky, řešené příklady i další úlohy, to vše nachystané k vytisknutí. Některé materiály či služby jsou přístupné až po zaplacení poplatku.

5. Excellent Matematika (matematika.host.sk)

Na stránkách jsou umístěny výukové texty, tabulky a grafy, maturitní příklady, popis a odkazy na tři programy se vztahem k matematice, online vědecká kalkulačka, slovník pojmů a odkazy na stránky. Bohužel však tyto stránky nebyly již delší dobu aktualizovány a doplněny (obr. 1).

6. Matematika (matematika.wz.cz)

„... stránka o matematice pro ty, co ji mají rádi, i pro ty druhé“
Zajímavá stránka, jejíž hlavní náplní je několik skriptů pro online výpočty ke kvadratické funkci a z oblasti kombinatoriky, planimetrie a stereometrie. Dále zde nalezneme zajímavé slovní úlohy a matematické pohádky.



Obr. 1

7. Matematika pro každého (www.maths.cz)

Poměrně „mladé“ a rozvíjející se stránky, které mají ambice stát se rozsáhlými a kvalitními. Je pravda, že je na nich stále co zlepšovat a doplňovat, což autor činí. Čtenář zde nalezne texty k témátům, vzorce, řešené příklady, dále hlavolamy (nevšední úlohy) a online testy a cvičení.

8. Zábavná matematika (www.tady.cz/zabavna.matematika)

Tyto stránky dobře poslouží jako zdroj zajímavých a zábavných úloh z oblasti algebry, aritmetiky a geometrie spolu se správným výsledkem a řešením (obr. 2).

9. Testpark.cz (www.testpark.cz/testy/matematika)

Portál zaměřený výhradně na online testy s vyhodnocením poskytuje inspiraci na písemku z matematiky, i když zatím zde nalezneme testy spíše pro žáky základních škol.

