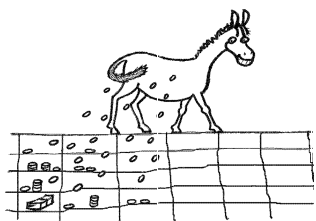


Excel a rekurentně zadané posloupnosti ve finanční matematice

PAVEL PRAŽÁK – BLANKA PRAŽÁKOVÁ

Fakulta informatiky a managementu Univerzity Hradec Králové

První soukromé jazykové gymnázium v Hradci Králové



Při své práci je učitel neustále konfrontován s otázkami o tom, zda mu jeho žáci rozumí a zda je jeho výklad zajímavý a podnětný. V článku bychom chtěli ukázat jeden z možných způsobů, jak propojit tradiční metody výuky s možnostmi, které nabízejí informační technologie. Od

zvoleného postupu očekáváme, že umožní zatraktivnit výuku a motivuje ke studiu větší počet žáků. Chtěli bychom také ukázat, že využití informačních technologií nabízí učitelům možnost prezentovat poznatky, které by při klasickém způsobu výkladu látky nemohli do výuky zařadit.

1. Rekurentní posloupnosti

Při studiu matematiky se žáci středních škol seznamují s *číselnými posloupnostmi*, viz např. [1]. Je známo, že posloupnost je zadána buď funkčním předpisem pro n -tý člen posloupnosti nebo *rekurentně*, tj. je zadáno několik počátečních členů a pak je uvedeno pravidlo, jak pomocí těchto členů stanovit člen následující. To znamená, že pro určení n -tého členu rekurentně zadané posloupnosti, je třeba znát předchozí členy. Z tohoto důvodu se často upřednostňuje zadání pomocí funkčního předpisu pro n -tý člen. Na střední škole se konkrétně ukazuje, jak lze pomocí rekurent-

ního předpisu charakterizovat aritmetickou posloupnost a geometrickou posloupnost a jak lze odvodit funkční předpis pro n -tý člen těchto posloupností. Obecným postupem, jak z rekurentního předpisu nalézt vzorec pro n -tý člen posloupnosti, se však střední škola nezabývá. S touto úlohou související s řešením *diferenčních rovnic* případně *rekurentních rovnic* se studenti seznamují až v kurzech matematiky na některých typech vysokých škol, viz např. [2]. V článku chceme ukázat návod, jak lze s rekurentně zadanými posloupnostmi pracovat, aniž bychom potřebovali vzorec pro n -tý člen posloupnosti. Použijeme k tomu tabulky sestavené v Microsoft Excelu (dále jen MS Excel). Nejdříve uvedeme popis pro známý proces *složeného úročení*, které se na střední škole studuje pomocí geometrické posloupnosti. Pak uvedeme model pro *splácení půjčky* a model pro *spoření na důchod*. (Prezentovat tyto problémy studentům středních škol bez využití počítače by bylo poměrně zdouhavé.) Nejprve však připomeneme (v návaznosti na [5]) některé aspekty tabulkového procesoru MS Excel, které budou použity při zvoleném způsobu řešení.

2. Relativní a absolutní adresy buněk v Microsoft Excelu

Pracovní plocha MS Excel je tvořena buňkami uspořádanými do řádků a sloupců. Řádky jsou označeny přirozenými čísly **1**, **2**, **3**, atd., sloupce jsou označeny písmeny **A**, **B**, **C**, atd. Každá buňka má svoji adresu. MS Excel rozlišuje dva typy adres buněk: relativní adresu, např. **A1**, **C5**, a *absolutní adresu*, např. **\$A\$1**, **\$C\$5**, **\$B2**, **B\$4**.

2.1. Relativní adresa

Běžný zápis adresy buňky, tj. např. **A1**, **C5**, se chová tak, že pokud např. do buňky **C3** vložíme vzorec **=A1**, bude tato buňka obsahovat stejnou hodnotu, jako **A1**. Pokud buňku **C3** (je v ní uveden vzorec) přesuneme nebo zkopírujeme např. na adresu **D4** (všimněme si, že nová buňka **D4** zaujímá vzhledem k původní buňce **C3** pozici v dolním pravém rohu), vzorec uvnitř se automaticky upraví na **=B2** (což je adresa buňky, která vzhledem k buňce **A1** zaujímá pozici v dolním pravém rohu a má stejnou relativní pozici jako buňka **D4** vzhledem k **C3**). Je to proto, že jsme ve vzorci použili relativní adresu buňky **A1**. Pokud chceme, aby vzorec stále i po přesunutí počítal s hodnotou buňky **A1**, je třeba vzorec zapsat pomocí absolutní adresy, neboť ta se při přesouvání ani při kopírování nemění. Relativní adresu je vhodné použít vždy, když je třeba, aby se při kopírování vzorec automaticky upravoval podle polohy buňky v tabulce.

2.2. Absolutní adresa

Znak **\$** znamená, že ta část adresy (řádek, sloupec), před kterou je uveden, bude neměnná, ať se buňka bude přesunovat nebo kopírovat. Například pokud je ve sloupci **C** třeba vydělit všechny buňky sloupce **B** hodnotou buňky **A1**. V tomto konkrétním případě vložíme do **C1** vzorec **=B1/\$A\$1** a vzorec nakopírujeme dolů do celého sloupce. Protože je adresa dělené buňky ve sloupci **B** relativní, bude se měnit podle řádku. Dělit se však bude stále hodnotou uvedenou v buňce **A1** – ta je použita jako absolutní adresa. Absolutní adresu je vhodné použít vždy, když některá buňka obsahuje nějakou významnou hodnotu (v našem případě to budou zadané parametry rekurentní posloupnosti) a chceme s touto hodnotou pracovat i v jiných buňkách (viz též [5]).

2.3. Číselný posuvník

Chceme-li rychle a pohodlně měnit hodnoty parametrů, které jsou uloženy v buňkách, lze k tomu využít číselný posuvník. Tento prvek nalezneme v menu MS Excelu. Můžeme postupovat např. následujícím způsobem: v menu na horní liště vybrat **Zobrazit** → **Panel nástrojů** → **Formuláře**. Dále vybrat **Posuvník** a vložit jej na místo buněk, které jsme si dříve vybrali. Rozměry posuvníku lze upravit našim potřebám. Chceme-li nastavit parametry posuvníku i to, kam se má hodnota, kterou posuvníkem nastavíme uložit, klepneme na posuvník pravým tlačítkem myši a v odkrytém menu vybereme položku **Formát ovládacího prvku**. Do odkryté tabulky pak můžeme vyplnit potřebné parametry (viz též [6]).

3. Použití rekurentních vztahů v úlohách finanční matematiky

Pro studium procesů odehrávajících se v čase je možné zvolit následující obecný postup: nejprve nalezneme rekurentní zadání posloupnosti a pak pomocí MS Excelu určíme její členy (konečný počet). Ukažme nyní použití tohoto postupu na konkrétních příkladech.

3.1. Složené úročení

Půjčí-li někdo někomu peníze, zpravidla požaduje, aby se za tuto službu zaplatilo. Částka, kterou získává věřitel od dlužníka jako odměnu za půjčení peněz, je *úrok*. Hodnota úroku se obvykle určuje pomocí úrokové míry, která vyjadřuje relativní velikost hodnoty úroku vzhledem k hodnotě zapůjčené částky. Způsob, jakým jsou věřiteli započítávány úroky k zapůjčené částce, se nazývá *úročení*. Zde se budeme zabývat *složeným úročením*,

při kterém se úrok na konci každého úrokovacího období přičítá k již dosažené hodnotě uložené peněžní částky. Budeme přitom řešit otázku, jak vypočítat hodnotu vkladu o hodnotě A Kč za N let, jestliže se úroky připisují n krát za rok.

K výpočtu potřebujeme následující hodnoty: počáteční hodnotu vkladu A , délku spoření N let, počet n úrokovacích období za jeden rok a *nominální* (roční = p.a.) úrokovou míru r , $r \in (0, 1)$. Hodnota nominální úrokové míry se obvykle vyjadřuje v procentech, v našich úvahách je však použití desetinného zápisu úrokové míry vhodnější. Například hodnota $r = 0,12$ reprezentuje nominální úrokovou míru $12/100 \cdot 100 \% = 12 \%$. Protože však předpokládáme, že se úroky připisují n krát za rok, vždy jednou za období délky $1/n$ roku, je úroková míra za jedno úrokovací období dána podílem r/n . Podrobněji např. [4] str. 38.

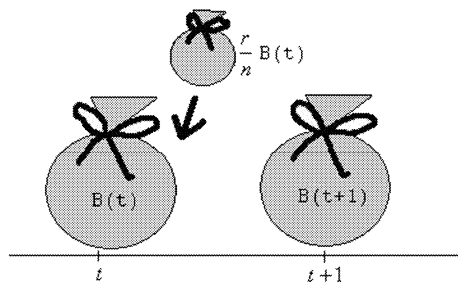
Poznámka. Stát navíc požaduje, aby byl úrok zdaněn. To znamená, že určitá relativní část úroku je bez náhrady odvedena státu. Daň z úroku se obvykle udává v procentech, je však vhodné vyjádřit ji jako číslo $u \in (0, 1)$. Je-li např. $u = 0,15$, jedná se o daň ve výši 15% . To znamená, že 15% z hodnoty úroku připadne státu a pouze 85% je připsáno k hodnotě vkladu na účtu. Obecně lze na účet připsat pouze část z úroku vyjádřenou číslem $k = 1 - u \in (0, 1)$, které nazýváme *zdaňovací koeficient*. Úrok bychom pak počítali jako součin aktuální hodnoty účtu v daném úrokovacím období krát koeficient $k \cdot r/n$. Abychom však další úvahy příliš nekomplikovali, nebudeme dále v tomto článku zdanění uvažovat.

Označme t časové období, kde $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ a $T = N \cdot n$ je celkový počet úrokovacích období. Dále označme $B(t)$ hodnotu účtu v čase t . Prozatím víme, že $B(0) = A$. Úrok, který se k účtu připíše v čase $t + 1$ je hodnota účtu $B(t)$ krát úroková míra za jedno úrokovací období, tj. r/n , viz též ilustrace na obrázku 1. To znamená, že hodnota účtu v čase $t + 1$ je dána vztahem

$$B(t + 1) = B(t) + \frac{r}{n}B(t).$$

Protože známe počáteční hodnotu, můžeme předchozí vztah napsat jako rekurentní předpis pro posloupnost udávající hodnotu účtu v čase t

$$B(t + 1) = \left(1 + \frac{r}{n}\right) B(t), \quad B(0) = A.$$



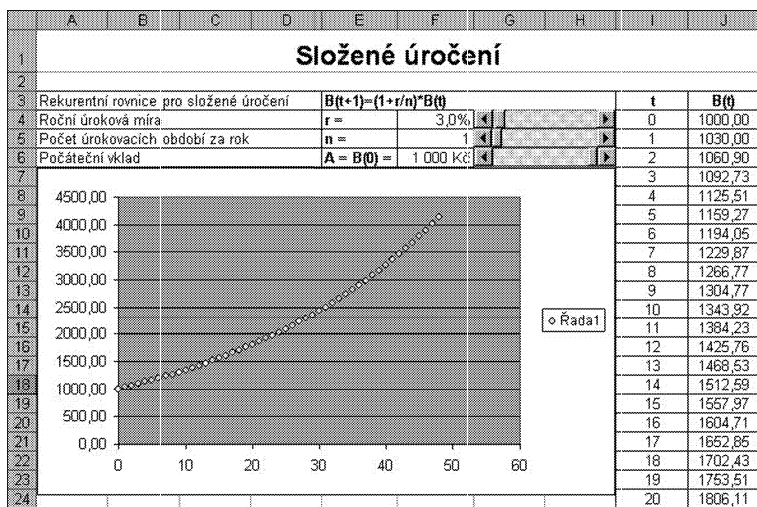
Obr. 1 Ilustrace vztahu pro výpočet hodnoty účtu v následujícím úrokovacím období, jestliže uvažujeme složené úročení.

Poznámka. Není těžké nahlédnout, že se jedná o rekurentní vztah určující geometrickou posloupnost. Tento přístup (matematicky rozhodně korektnější, viz např. [1]) zde však nechceme diskutovat.

Podívejme se, jak lze uvedený rekurentní vztah využít pro řešení v MS Excelu. Nejdříve otevřeme nový list a zadáme parametry úročení a počáteční vklad: do buňky **F4** vložíme roční úrokovou míru r , do buňky **F5** vložíme počet n úrokovacích období a do buňky **F6** vložíme počáteční hodnotu vkladu A . Posloupnost budeme vytvářet ve sloupcích **I** a **J**. Ve sloupci **I** budeme zaznamenávat pořadí členu posloupnosti a ve sloupci **J** budeme postupně vypočítávat hodnoty posloupnosti. Pokračujeme tedy dále, do buňky **I4** zapíšeme počáteční čas, tj. číslo 0. Do buňky **J4** vložíme počáteční vklad – to je již zadaná informace, takže použijeme absolutní adresu a do buňky **J4** zapíšeme vzorec $=\$F\6 . Dále do buňky **I5** vložíme vzorec s relativní adresou ve tvaru $=I4+1$, čímž vytvoříme vzorec, který umožní zvětšovat pořadí úrokovacího období. Do buňky **J5** konečně vložíme dříve odvozený rekurentní vztah ve tvaru $=(1+\$F\$4/\$F\$5)*J4$, kde **J4** představuje hodnotu počátečního vkladu a podíl $\$F\$4/\$F\5 představuje úrokovou míru za jedno úrokovací období – všimněte si, že je zde třeba použít absolutní adresy příslušných buněk. Nyní zkopírujeme vzorce uvedené v buňkách **I5** a **J5** do buněk ve sloupcích **I** a **J** počínaje řádkem označeným číslem 6. Počet řádků, které při kopírování vytvoříme závisí na celkové velikosti úrokovacího období. Pokud zadané hodnoty a vztahy opatříme nadpisy a sloupce **I** a **J** použijeme pro vytvoření grafu, získáme list, jehož výřez je uvedený na obrázku 2. List ještě můžeme opatřit posuvníky, kterými lze snadno měnit hodnotu zadaných parametrů a počáteční

hodnoty vkladu. Získáme tak nástroj, na kterém můžeme snadno demonstrovat vliv změny parametrů na výslednou hodnotu účtu. Pokud např. zvolíme $n = 1$, dochází k úročení pouze jednou za rok.

Pokud dále např. zvolíme $B(0) = 1$, $r = 1$ a $n = 365$, můžeme zjišťovat, jak se zvětší hodnota vkladu o hodnotě 1 Kč za jeden rok, jestliže je úroková míra za rok 100 % a úročí se každý den (to sice banky nedělají, ale proč takovou situaci pro zajímavost nestudovat). Dojdeme přitom k hodnotě 2,71, tj. za jeden rok by hodnota vkladu činila asi 2,7 Kč. Bude-li se počet n úrokovacích období stále zvětšovat, tj. úročilo by se několikrát za den, lze se libovolně přiblížit k hodnotě známého Eulerova čísla $e = 2,71828 \dots$

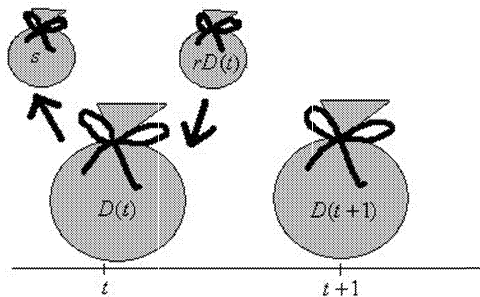


Obr. 2 Ukázka listu MS Excel, který prezentuje výpočet a grafické znázornění růstu hodnoty $A = 1000$ Kč při složeném úročení. Částka byla vložena na účet s roční úrokovou mírou $r = 0,03$, tj. 3 %, v čase $t = 0$. Počet úrokovacích období n za rok je nastaven na hodnotu 1, tj. čísla ve sloupci I tabulky představují počet roků, které uplynuly od vložení částky na účet. Čísla ve sloupci J představují hodnotu vkladu v daném roce. Počáteční hodnotu A vkladu, hodnotu r roční úrokové míry a počet n úrokovacích období za rok lze měnit pomocí posuvníků. Protože MS Excel při jakékoliv změně těchto parametrů přepočítá hodnoty a překreslí graf, můžeme přímo pozorovat účinky změn těchto parametrů.

3.2. Splácení půjčky

Banky nebo různé finanční společnosti prodávají půjčky, aby svým klientům umožnily nákup finančně nákladného zboží. Uvažujme, že hodnota půjčky je D_0 a sjednaná doba, za kterou je třeba půjčku splatit, je T , $T > 0$. Označíme-li $D(t)$ hodnotu půjčky v čase $t \in \{0, 1, \dots, T\}$, je $D(0) = D_0$ a $D(T) = 0$. Necht' r je úroková míra, $r \in (0, 1)$, za kterou banka půjčku poskytne a uvažujme, že si banka připsuje úroky z dlužné částky $D(t)$ vždy na konci každého úrokovacího období. Zdanění v tomto modelu nebudeme uvažovat. Dále uvažujme, že klient splácí svůj dluh na konci každého úrokovacího období konstantními splátkami o hodnotě s . Hodnotu těchto splátek je třeba určit.

Na konci časového intervalu $[t, t + 1]$ se dlužná částka $D(t)$ zmenší o splátku s a zvětší se o připsané úroky $rD(t)$ z dlužné částky $D(t)$. To může být vyjádřeno pomocí vztahu $D(t + 1) = D(t) - s + rD(t)$, srovnej též obrázek 3.



Obr. 3 Ilustrace vztahu pro výpočet dlužné částky v následujícím úrokovacím období

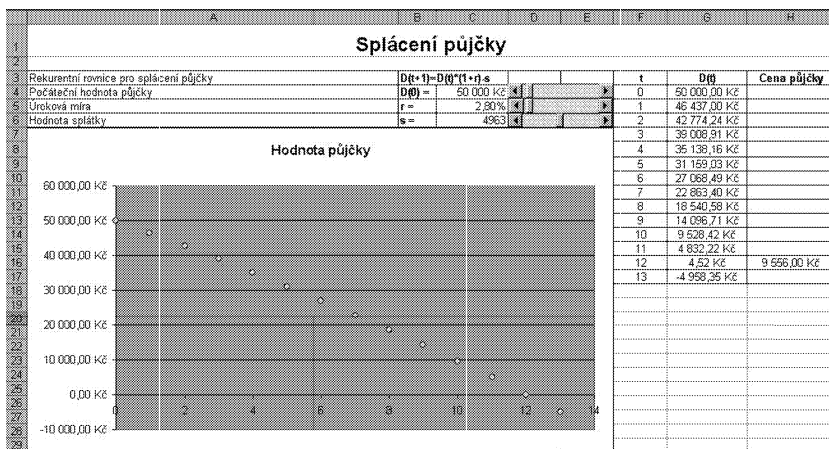
Provedeme-li jednoduché úpravy dané rovnice, získáme následující rekurentní zadání konečné posloupnosti s koncovou podmínkou

$$D(t + 1) = -s + (r + 1)D(t), D(0) = D_0, D(T) = 0.$$

Uvedený rekurentní vztah společně s počáteční a koncovou podmínkou můžeme použít pro výpočet hodnoty splátky s .

Poznámka. Daná úloha je vlastně lineární rekurentní rovnice prvního řádu. Metody pro její řešení jsou uvedeny např. v [2] nebo v [3]. Použijeme-li navíc koncovou podmínku, lze ihned získat vztah pro určení splátky s .

Vzhledem k tomu, že se v tomto článku nesnažíme o nalezení přesného řešení problému, můžeme podobným způsobem, jako v odstavci 3.1 vytvořit tabulku v MS Excelu a měnit hodnotu splátek s tak, aby platila i koncová podmínka. Ukázka výřezu takové tabulky je na obrázku 4.



Obr. 4 Ukázka listu MS Excel, který prezentuje splácení půjčky o hodnotě 50 000 Kč, která má být splacena ve 12 splátkách. Při výpočtu je použita úroková míra $r = 0,028$, tj. 2,8 %, jejíž hodnotu lze posuvníkem změnit. Experimentálně lze pomocí posuvníku nalézt hodnotu splátky s tak, že dlužná částka na konci 12. úrokovacího období bude nulová nebo zbytková částka bude velmi blízko nule. To závisí na nastavené citlivosti změny hodnoty splátky v příslušném posuvníku. V buňce **H16** je vypočítána hodnota půjčky. Jedná se o rozdíl splacené částky, tj. 12 krát nalezená hodnota splátky v buňce **C6** a částky půjčené, tj. hodnoty v buňce **C4**.

3.3. Šetříme na důchod

Uvažujme klienta banky, který spoří na důchod. Nechť banka úročí klientův vklad na konci každého roku pomocí neměnné dlouhodobé úrokové míry r , $r \in (0, 1)$. Zdanění úroků zde nebudeme uvažovat. Předpokládejme, že klientovy současné minimální životní náklady jsou Z Kč za rok, $Z > 0$, a že dlouhodobá míra inflace i je neměnná, $i \in (0, 1)$. Předpokládejme, že klient půjde do důchodu za S let. V průběhu těchto let bude vydělávat a část svého výdělku bude spořit. Jak velkou částku by měl naspořit, aby mohl po odchodu do důchodu financovat své životní náklady po celé další období délky T let?

Uvažujme, že $t = 0$ označuje rok, kdy klient odešel do důchodu a $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ roky, kdy už je v důchodu. Dále označme $B(t)$ výši klientových úspor v čase t . Na konci každého časového intervalu $[t, t + 1]$ se klientovy úspory zvětší o částku $rB(t)$. Minimální životní náklady se vzhledem k inflaci zvýší na $(1 + i)^{S+t+1} \cdot Z$ a o tuto částku se klientovy úspory sníží (v této úvaze jsme použili vzorec pro členy geometrické posloupnosti s počátečním členem Z a toho, že uplynulo $S + t + 1$ roků). Pro $t \in \{0, 1, \dots, T - 1\}$ pak můžeme psát

$$B(t + 1) = B(t) + rB(t) - (1 + i)^{S+t+1} Z.$$

V čase $t = T$ již klient své úspory spotřeboval, takže $B(T) = 0$. Úkolem je nalézt hodnotu $B(0)$ tak, aby platil předchozí vztah a uvedená koncová podmínka. Protože známe koncovou podmínku $B(T) = 0$, můžeme uvedený vztah použít pro výpočet předchozích členů posloupnosti podle vztahu

$$B(t) = \frac{B(t + 1) + (1 + i)^{S+t+1} Z}{1 + r}$$

kde za t postupně dosazujeme hodnoty $T - 1, T - 2, \dots, 0$. To znamená, že členy posloupnosti hledáme odzadu a počítáme tak dlouho, dokud se nedostaneme k hledané hodnotě $B(0)$. Využijeme-li k řešení opět MS Excel, lze postupovat podobným způsobem, jako v odstavci 4.1 s tím rozdílem, že vzorce vkládáme do tabulky odzadu. Ukázka výřezu této tabulky s konkrétními hodnotami je na obrázku 5.

V závislosti na době S , která klientovi banky zbývá k odchodu do důchodu, v závislosti na změně míry inflace i nebo v závislosti na změně úrokové míry r lze experimentálně sledovat, jakou částku je třeba pro život v důchodu naspořit. Jak se ukazuje, je podle popsaného modelu tato částka poměrně vysoká. Popis reálnějšího modelu pro to, jak si z našich výplat spoříme pomocí sociálního pojištění a státu na důchod, však přesahuje rozsah našeho článku.

4. Závěr

Ukázali jsme, že chceme-li pracovat a experimentovat s rekurentně zadanými posloupnostmi, lze použít tabulky vytvořené v MS Excelu. Uvedené příklady dokumentují, že způsob vytvoření takových tabulek je poměrně jednoduchý a navíc lze snadno měnit počáteční hodnoty nebo parametry.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Spoření na důchod									
2										
3	Diferenční rovnice	$B(t+1) = B(t) \cdot (1+r) - Z \cdot (1+i)^t \cdot (S+1+1)$				t	$B(t)$		$Z(t+1 \cdot S)$	
4	Míra inflace	i =	3,00%			0	5 939 840,0 Kč	361 222,2 Kč		
5	Úroková míra	r =	5,00%			1	5 864 773,1 Kč	372 058,9 Kč		
6	Současné životní náklady	Z =	200 000 Kč			2	5 774 791,1 Kč	383 220,7 Kč		
7						3	5 668 813,3 Kč	394 717,3 Kč		
8	Počet let do důchodu	S =	20			4	5 545 695,2 Kč	406 558,8 Kč		
9	Počet let v důchodu	T =	20			5	5 404 224,4 Kč	418 755,5 Kč		
10						6	5 243 117,3 Kč	431 318,3 Kč		
11	Hodnota účtu při odchodu do důchodu	$B(0) =$	5 939 840 Kč			7	5 061 015,4 Kč	444 257,8 Kč		
12						8	4 856 480,6 Kč	457 585,5 Kč		
13						9	4 627 991,6 Kč	471 313,1 Kč		
14						10	4 373 938,6 Kč	485 452,5 Kč		
15						11	4 092 619,5 Kč	500 016,1 Kč		
16						12	3 782 233,9 Kč	515 016,6 Kč		
17						13	3 440 878,5 Kč	530 467,0 Kč		
18						14	3 066 541,4 Kč	546 381,1 Kč		
19						15	2 657 096,0 Kč	562 772,5 Kč		
20						16	2 210 295,2 Kč	579 655,7 Kč		
21						17	1 723 764,6 Kč	597 045,3 Kč		
22						18	1 194 996,1 Kč	614 956,7 Kč		
23						19	621 340,5 Kč	633 405,4 Kč		
24						20	0,0 Kč	652 407,6 Kč		

Obr. 5 Ukázka listu MS Excel, který prezentuje jednoduchý model spoření na důchod. Parametry jsou nastaveny tak, že klient půjde do důchodu za 20 let, jeho současné minimální roční náklady jsou 200 000 Kč, dlouhodobá míra inflace je 3 % a dlouhodobá úroková míra je 5 %. Pomocí posuvníků je však možné hodnoty parametrů měnit. Čas t vyjadřuje, jak dlouho je klient v důchodu a hodnota $B(t)$ vyjadřuje jeho úspory v čase t .

Tak lze ihned sledovat jejich vliv na řešení úlohy. Dále lze snadno získat grafický výstup vypočtených hodnot, což přispívá k lepšímu porozumění základním aspektům řešení i k možnosti jeho interpretace. Popsaný způsob umožňuje, že se lze zabývat i jinými rekurentně zadanými posloupnostmi, než posloupnostmi aritmetickými či geometrickými a výrazně tak obohatit poznání žáků středních škol, především gymnázií, i studentů některých vysokých škol s ekonomickým zaměřením.

(Autorkou úvodní ilustrace je Mgr. Jaroslava Čermáková z Hlinska.)

Literatura

- [1] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady, Prometheus, Praha, 1995.
- [2] *Gavalcová, T. – Pražák, P.*: Základy matematiky 2, Gaudeamus, Hradec Králové, 2004.
- [3] *Pražák, P.*: Splácení půjčky, Rozhledy matematicko-fyzikální 77, str. 212–216, 2000.
- [4] *Čipra, T.*: Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou, HZ Praha, Praha 2000.
- [5] *Hvorecký, J.*: Tabulkové kalkulátory a grafy. MFI, r. 3 (1993/94), č. 1, s. 41–47.
- [6] *Matyáš, V.*: Graf funkce s parametry v Excelu. MFI, r. 17 (2007/08), č. 2, s. 106–113.

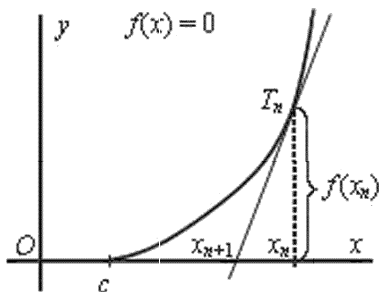
Odmocnina

REDAKCE

Dnešní problém není programátorsky obtížný, těžiště práce je spíše v jeho matematickém zvládnutí.

Úloha: Vytvořit funkci, která počítá druhou odmocninu c z čísla a zadaného jako parametr, využívá základní aritmetické operace $+$, $-$, $*$, $/$ a Newtonovu metodu tečen při řešení rovnice $x^2 - a = 0$.

V Newtonově metodě se při řešení rovnice $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je kladná konvexní funkce, používá postupné přibližování zprava ke hledané hodnotě c užitím tečen (viz obrázek).



Obr. 1

Graf funkce se aproximuje tečnou v bodě T_n o souřadnicích $[x_n, f(x_n)]$, a proto klademe $f(x_{n+1}) = 0$. Platí tak

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n),$$

neboť derivace funkce v bodě má význam směrnice tečny ke grafu funkce v daném bodě. Z rovnosti $f(x_{n+1}) = 0$ dostáváme

$$0 = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n)$$

a odsud jednoduchou úpravou

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Jako startovací hodnota x_0 iterací se bere přibližná hodnota čísla c . Hledaná hodnota c , pro niž je $f(c) = 0$, je pak limitou posloupnosti $\{x_n\}$.

V našem konkrétním případě je $f(x) = x^2 - a$ tedy platí

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}$$

a po úpravě

$$x_{n+1} = \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) / 2.$$

V předloženém programu se použila univerzální startovací hodnota $x_0 = 1$ a iterace se počítají tak dlouho, dokud se dvě po sobě jdoucí iterace nerovnájí na úrovni přesnosti prováděných operací. Je proveden tisk odmocniny počítané Newtonovou metodou a pro kontrolu tisk odmocniny počítané Pascalovskou funkcí Sqrt. Výsledky se shodují.

```
program Odmocni;

var
  Z: Real;

function Odmoc(A: Real): Real;
var
  X, Y: Real;
begin
  X := 1;
  repeat
    Y := X;
    X := (Y + A / Y) / 2
  until X = Y;
  Odmoc := X
end;

begin
  Write('Odmocnina z cisla: ');
  ReadLn(Z);
  WriteLn('Newt ', Odmoc(Z):0:9);
  WriteLn('Sqrt ', Sqrt(Z):0:9);
  ReadLn
end.
```