

MATEMATIKA

Zlepšení některých nerovností

ŠEFKET ARSLANAGIĆ¹

Prirodno–matematički fakultet, Univerzita Sarajevo, BOSNA a HERCEGOVINA

Problematika související s vylepšováním nerovností je v matematice chápána jako nesporně zajímavá, velmi významná a kreativní činnost. Získávání nových výsledků v této oblasti bývá ale často poměrně obtížné, neboť neexistuje žádná univerzální metoda, jíž bychom se mohli řídit. V tomto článku ukážeme při řešení konkrétních úloh některá zlepšení daných nerovností.

Příklad 1

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ platí nerovnost

$$1 + a + b \geq 3\sqrt{ab} \quad (1)$$

Řešení. Daná nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$1 + a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2ab \geq 9ab,$$

která vznikne umocněním obou stran dané nerovnosti na druhou. Dalšími ekvivaletními úpravami této nerovnosti postupně dostaneme

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (1 - ab) + 2a(1 - b) + 2b(1 - a) \geq 0,$$

tj.

$$(a - b)^2 + (1 - 2ab) + 2[a(1 - b) + b(1 - a)] \geq 0.$$

¹Psáno pro MFI. Z německého originálu přeložil *Jaroslav Švrček*.

Vzhledem k tomu, že $0 \leq a \leq 1$ a $0 \leq b \leq 1$, platí evidentně poslední nerovnost, a tedy i daná nerovnost. Rovnost zde nastane (jak se snadno vidí), právě když $a = b = 1$.

Tím je úloha vyřešena.

Pokusme se nyní dokázat nerovnost

$$1 + a + b \geq 3\sqrt[3]{ab}, \quad (2)$$

kde a, b jsou libovolná reálná čísla z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Dokážeme ji snadno užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (A–G nerovnosti) trojice kladných reálných čísel $1, a, b$. Platí totiž

$$\frac{1 + a + b}{3} \geq \sqrt[3]{1 \cdot a \cdot b} = \sqrt[3]{ab},$$

odkud již po snadné úpravě plyne

$$1 + a + b \geq 3\sqrt[3]{ab},$$

přičemž rovnost i zde nastává, právě když $a = b = 1$.

Protože pro libovolná kladná reálná čísla a, b z intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ je splněna nerovnost

$$\sqrt[3]{ab} \geq \sqrt{ab}, \quad (3)$$

platí

$$1 + a + b \geq 3\sqrt[3]{ab} \geq 3\sqrt{ab},$$

přičemž rovnost v obou uvedených nerovnostech platí, právě když $a = b = 1$. Nerovnost (2) je tedy zlepšením nerovnosti (1)

Příklad 2

Nechť a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou kladná reálná čísla taková, že $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Dokažte, že platí nerovnost

$$(4 + a_1)(4 + a_2) \dots (4 + a_n) > 4^n. \quad (4)$$

Řešení. Užitím známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem dvojic kladných reálných čísel 4 a a_i dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{4+a_1}{2} &\geq \sqrt{4a_1}, \\ \frac{4+a_2}{2} &\geq \sqrt{4a_2}, \\ &\vdots \\ \frac{4+a_n}{2} &\geq \sqrt{4a_n}.\end{aligned}$$

Každou z výše uvedených nerovností upravíme nejprve do tvaru

$$4 + a_i \geq 4\sqrt{a_i}$$

a poté provedeme součin všech takto upravených nerovností. Dostaneme tak

$$(4 + a_1)(4 + a_2) \dots (4 + a_n) \geq 4^n, \quad (5)$$

přičemž rovnost v (5) nastane (s ohledem na použité A–G nerovnosti), právě když platí

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 4.$$

To ale odporuje podmínce $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, a proto v nerovnosti (5) platí (pouze) „ostrá“ nerovnost.

Tím je daná úloha vyřešena.

Za stejných podmínek lze nerovnost (4) dokonce zlepšit, a to následujícím způsobem: Dokážeme, že platí nerovnost

$$(4 + a_1)(4 + a_2) \dots (4 + a_n) \geq 5^n. \quad (6)$$

Tato nerovnost skutečně představuje zlepšení nerovnosti (4), neboť platí $5^n > 4^n$.

Nyní dokážeme nerovnost (6), a to užitím A–G nerovností pro vždy pro pět kladných reálných čísel 1, 1, 1, 1 a a_i . Platí

$$\begin{aligned}\frac{4+a_1}{5} &= \frac{1+1+1+1+a_1}{5} \geq \sqrt[5]{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a_1} = \sqrt[5]{a_1}, \\ \frac{4+a_2}{5} &= \frac{1+1+1+1+a_2}{5} \geq \sqrt[5]{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a_2} = \sqrt[5]{a_2}, \\ &\vdots \\ \frac{4+a_n}{5} &= \frac{1+1+1+1+a_n}{5} \geq \sqrt[5]{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a_n} = \sqrt[5]{a_n}.\end{aligned}$$

Jejich součinem pak obdržíme nerovnost

$$\frac{4+a_1}{5} \cdot \frac{4+a_2}{5} \cdot \dots \cdot \frac{4+a_n}{5} \geq \sqrt[5]{a_1 a_2 \dots a_n} = \sqrt[5]{1} = 1.$$

Odtud po úpravě dostaneme přímo žádanou nerovnost, tj.

$$(4+a_1)(4+a_2) \dots (4+a_n) \geq 5^n.$$

Rovnost v ní nastane, právě když $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

Příklad 3

Dokažte, že pro délky a, b, c stran libovolného trojúhelníku platí nerovnost

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) < 3s^2, \quad (7)$$

kde $2s = a + b + c$.

Řešení. Podle A–G nerovnosti pro kladná čísla a a $b+c$ platí

$$\sqrt{a(b+c)} < \frac{a+(b+c)}{2} = s,$$

tj.

$$a(b+c) < s^2.$$

Analogicky pak platí

$$b(c+a) < s^2,$$

$$c(a+b) < s^2.$$

Sečtením posledních tří nerovností dostaneme

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) < 3s^2,$$

což jsme chtěli dokázat. Poznamenejme ještě, že v dané nerovnosti nelze dosáhnout horní hranice $3s^2$, neboť pro délky a, b, c stran trojúhelníku nemohou být splněny rovnosti $a = b + c$, $b + c = a$ a $c + a = b$.

Nyní ukážeme, že pro délky stran libovolného trojúhelníku a, b, c platí dokonce nerovnost

$$a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) \leq \frac{8}{3}s^2, \quad (8)$$

což je zlepšení nerovnosti (7), neboť $\frac{8}{3}s^2 < 3s^2$. Při důkazu využijeme známé nerovnosti

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \quad (9)$$

která platí pro všechna reálná čísla a, b, c . Její platnost je zřejmá z ekvivalentního tvaru:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0.$$

Detailní úpravy přenecháváme čtenáři.

Z nerovnosti (9) dále plyne

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \geq 3(ab + bc + ca),$$

tj.

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca). \quad (10)$$

Užitím (10) konečně dostáváme

$$a(b + c) + b(c + a) + c(a + b) = 2(ab + bc + ca) \leq 2 \cdot \frac{1}{3}(a + b + c)^2.$$

Protože $a + b + c = 2s$ platí

$$a(b + c) + b(c + a) + c(a + b) \geq \frac{2}{3} \cdot (2s)^2,$$

tj.

$$a(b + c) + b(c + a) + c(a + b) \geq \frac{8}{3}s^2,$$

což jsme chtěli dokázat. Rovnost zde nastane, právě když $a = b = c$, tedy v případě rovnostranného trojúhelníku.

Čtenářům a dalším zájemcům o tuto problematiku jsou určeny jako procvičení následující úlohy. Část b) v každé z nich přitom vždy představuje zlepšení nerovnosti uvedené v části a).

Příklad 4

Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c platí nerovnosti

- a) $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8\sqrt{abc},$
b) $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8(\sqrt[3]{abc} + 1)^3.$

Příklad 5

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y, z platí nerovnosti

- a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$,
- b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx + \frac{3}{4}(x - y)^2$.

Příklad 6

Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c platí nerovnosti

- a) $\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$,
- b) $\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}}$.

Příklad 7

Dokažte, že pro libovolná nezáporná reálná čísla a, b, c platí nerovnosti

- a) $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$,
- b) $ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc(a + b + c)}$.

Příklad 8

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b, c \geq 1$ platí nerovnosti

- a) $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} < \sqrt{c(ab+1)+1}$,
- b) $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}$.

Příklad 9

Dokažte, že pro délky a, b, c stran libovolného trojúhelníku jsou splněny nerovnosti

- a) $a(s - a) + b(s - b) + c(s - c) < \frac{3}{4}s^2$,
- b) $a(s - a) + b(s - b) + c(s - c) \leq \frac{2}{3}s^2$, kde $2s = a + b + c$.

Příklad 10

Nechť a, b, c jsou délky stran a t_a, t_b, t_c jsou délky těžnic v libovolném trojúhelníku. Dokažte, že platí

- a) $s < t_a + t_b + t_c < 3s$,
- b) $\frac{3}{2}s < t_a + t_b + t_c < 2s$.

Literatura

- [1] *Andreescu, T. – Gelca, R.*: Mathematical Olympiad Challenges. Birkhäuser, Boston – Basel – Berlin 2000.
- [2] *Arslanagić, Š.*: Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta. Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo 2001.
- [3] *Arslanagić, Š.*: Matematika za nadarene. Bosanska riječ, Sarajevo 2004.
- [4] *Engel, A.*: Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York – Berlin – Heidelberg 1997.
- [5] *Pavković, B. – Dakić, B. – Hanjš, Ū. – Mladinić, P.*: Male teme iz matematike. Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb 1994.

Matematika – základ evropské vzdělanosti

FRANTIŠEK KUŘINA

Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové

Ve dnech 20. a 21. září 2007 se konala v Hradci Králové celostátní konference *Matematika – základ evropské vzdělanosti*, kterou pořádala *Katedra matematiky Pedagogické fakulty v Hradci Králové* a *Společnost učitelů matematiky Jednoty českých matematiků a fyziků*. Konference se zúčastnilo více než sto učitelů základních, středních a vysokých škol z České republiky a Slovenské republiky. Uspořádání konference bylo motivováno narůstajícími obavami o současný a zejména budoucí stav vzdělávání u nás.

Vlastní akci předcházelo vypracování dvou výzev, které byly přečteny v úvodu jednání.

První výzva se obrací „ke všem, jejichž hlas je slyšet“, tedy k pracovníkům tisku, televize a rozhlasu a k těm, kteří v médiích vystupují. Byla publikována dne 1. října 2007 v *Právu*, 5. října v *Literárních novinách*, na webové stránce katedry matematiky *Matematicko – fyzikální fakulty UK* a ve sborníku této konference [1]. K této výzvě se připojilo více než 1 000 osobností z nejruznějších oblastí našeho života a praví se v ní mimo jiné:

Uvědomte si, že se značnou měrou podílíte na utváření atmosféry v celé populaci, že svými názory ovlivňujete hlavně mladou generaci. Snažte se proto orientovat společnost k cílevědomému vzdělávání, k odpovědné a uspokojení přinášející práci, k úctě k tradičním hodnotám. Pečlivě zvažujte svá slova, která pronášíte o školství, vzdělanosti a vzdělávání. Mějte na paměti, že je rychlejší a jednodušší bořit než stavět. Snažte se proto být konstruktivní a motivovat pozitivními příklady.

Druhou výzvu otiskl náš časopis MFI v červnu 2007 [2].

V tomto článku chceme informovat čtenáře o hlavních referátech, které byly na konferenci předneseny. Jejich části zde proto reprodukuje, úplné znění referátů a další informace o konferenci jsou v citovaném sborníku [1].

Petr Vopěnka: Matematika a vzdělání ([1], s. 25-34)

Každá odcházející generace se domnívá, že se během jejího života velmi změnil svět lidí, a má svým způsobem pravdu. Změnily se vztahy mezi lidmi, rozmnožilo se poznání, věda a umění. Změnila se i příroda, a to nejen samovolně, ale též vlivem zásahů záměrně do ní prováděných lidmi. Ve druhé polovině devatenáctého a v první polovině dvacátého století se pak objevovalo stále více umělých ústrojných výtvorů lidských, to je strojů v nejširším významu toho slova. To vše se odehrávalo tu spojitě, tu ve větších či menších skocích. Avšak ani ty největší skoky nevybočovaly z rámce plného lidského porozumění.

Potom však během velmi krátké doby nastala tak zásadní změna ve světě lidí, jakou nezažila žádná předcházející generace a asi hned tak nezažije ani žádná generace následující. Prožil jsem ji velmi citelně. Když se k nám dostal první jednoduchý počítač, učil jsem se z vlastní píce na něm programovat v jeho strojovém kódu, chtěl jsem totiž zjistit, jak to uvnitř chodí. Sotva jsem se to jakž takž naučil, už zde zase byl počítač mnohem složitější, do jehož vnitřku jsem neviděl – a co bych chtěl zdůraznit: nebavilo mne do něj nahlížet. Dobře jsem učinil, neboť zanedlouho zde byl další počítač, do jehož vnitřku podrobně a naprosto jasně neviděl už ani jeho konstruktér.

Prve zmiňované kritérium na rozlišování mezi umělým a přírodním tak přestalo platit. Vytváření strojů porušujících toto kritérium – říkejme jim superstroje – bylo umožněno zapojením přírodní rychlosti (jmenovitě rychlosti elektrického proudu) do provádění kalkulací se znaky, rychlosti mnohonásobně převyšující rychlost, jakou je schopen při této činnosti vyvinout

člověk. Tím však došlo k přetržení kontinuity do té doby pečlivě propracovávaného porozumění měnícímu se světu.

Když pak tyto superstroje vstoupily do každodenního života lidí, když zaplavily jejich svět, pak už to nebyla jen změna světa lidí, ale zrození nového světa, byť z lůna toho starého.

A protože mladá generace se rodí už jen do tohoto nového světa, musí být vědomí existence těchto dvou navzájem proplétajících se světů východiskem všech našich úvah o vzdělání, vzdělávání a výchově. Nebudeme-li je rozlišovat, nebudeme si navzájem rozumět.

Svou dnes již neodmyslitelnou spoluúčastí i v tom nejběžnějším životě každého člověka vtiskly superstroje světu lidí povahu, na níž lidstvo nepřipravily ani ty nejodvážnější verneovky. Vytvořily totiž novou přírodu, kterou chtě nechtě musí člověk zrozený v tak zvané kulturní oblasti akceptovat, tak jako v době nepříliš vzdálené musel Dajak zrozený na Borneu akceptovat džungli, v níž mu bylo žít. A také vztah obou k jejich přírodě je do značné míry obdobný.

Nezajímá nás vnitřní chod superstroje (například mobilního telefonu), tak jako toho Dajaka nezajímá krevní oběh loveného zvířete, ale to, co z něj lze vytěžit a k čemu slouží. Tomu odpovídajícím způsobem si pak dnešní člověk, stejně jako tehdejší Dajak, přeje být vzděláván. Cílem tohoto vzdělávání však nemá být vzdělání, ale operabilita.

Vzdělání se totiž týká kořenů a květů, operabilita plodů. Vzdělání vyžaduje vědomosti a schopnost usebrání rozumu a mysli. Operabilita vyžaduje informace a schopnost obratného zacházení s nimi. Tyto dva pojmy bychom neměli směšovat, i když dnes pro oba bývá používán název vzdělání.

Vzdělání se vztahuje k nitru člověka, operabilita k vnějšímu světu.

Vzdělání spočívá ve vstřebávání především duchovních – rozumových i citových – statků, které lidstvo vytvářelo během svého téměř desetitisíciletého kulturního vývoje, a jejich zasazování do dějinných souvislostí. Velikost a šíře vzdělání nějakého jednotlivce pak závisí na množství, rozložení, a povaze a náročnosti těchto jím získaných duchovních statků, a jeho hodnota na hloubce jejich vstřebání.

Naproti tomu k získávání statků hmotných, hraček pro dospělé lidi, požitkářskému ukájení pudů, ale i k uspokojování potřeb kulturních (za něž však nezřídka bývá považováno společenské tlachání a zábava značně primitivní), je pro přežívání v novém světě superstrojů, stejně jako před dvěma sty lety v pralesech severního Bornea, nepoměrně důležitější opera-

bilita než vzdělání. Následkem toho ve školní výchově začíná být vyučování výcvikem operability a to často značně pokleslé.

V rodícím se novém a nadto globálním světě lidí a superstrojů se může samostatným subjektem (neboli národem v hypermoderním smyslu slova) stát jen takový celek navzájem spolupracujících a doplňujících se lidí, který je schopen účinně reagovat na výzvy jak ze strany vzdělání, tak i operability. Existence takových samostatných subjektů je žádoucí pojistkou proti totalitarismu v globalizaci latentně přítomnému.

Naléhavým úkolem stojícím v dnešním světě superstrojů před evropským lidstvem se tak stalo zachování evropského kulturního a vzdělanostního dědictví. Přitom základem, na němž vyrostla evropská civilizace, je matematika. Proto jsme se zde sešli, abychom právě na tuto skutečnost důrazně upozornili.

Matematika není vědou v obvyklém smyslu toho slova, neboť nemá svůj vlastní předmět studia. Není vědou o živé či neživé přírodě, o vesmíru, o Zemi, o člověku, o lidské společnosti, ... jak je tomu v případech přírodních nebo společenských věd.

Na druhé straně matematika občas otevře nějaký další předmět studia spolu s vědou o něm, kterou nezdířka vybaví novými vhodnými nástroji a metodami zkoumání. Geometrie, aritmetika, teorie reálných (popřípadě komplexních) funkcí, teorie množin a podobně, mají různé – byť navzájem značně provázané – předměty studia a svým způsobem i různé metody zkoumání; jsou to tedy různé vědy. O těchto vědách se říkává, že to jsou jednotlivé disciplíny vědy zvané matematika. Název vědy matematické je však výstižnější, neboť umožňuje rozlišovat mezi matematikou jako takovou a vědami z ní zrozenými.

Matematika není souhrnem těchto matematických věd. Takovým výměrem bychom ji sevřeli do strnulého rámce poplatného určité době a připravili jí tak o historii prověřenou podstatnou stránku její povahy, a sice schopnost každý takový rámec kvalitativně i kvantitativně překračovat spolu s obtížně tlumeným nutkáním tuto schopnost uplatňovat.

František Kuřina: Problémy matematického vzdělávání ([1], s. 35-45)

Problémy matematického vzdělávání jsou problémy praxe. Jsou to problémy školy a týkají se dítěte, učitele, společnosti a v současné době u nás i školské reformy. Tyto problémy řešili lidé odedávna a stěží lze v této

oblasti přinést nový nápad, novou myšlenku. Mnohé otázky však nabývají v nových souvislostech ve změněných společenských poměrech aktuální naléhavost.

Stejně jako není možné ovlivnit např. působení ročních období na přírodu, mají na našich zbožných přáních nezávislý charakter matematika, společnost, učitelé a žáci. Je tomu tak přesto, že školské reformy vycházejí obvykle z naivních představ o reálnosti změn zmíněných vlivů. Naše reforma z poslední čtvrtiny minulého století, tzv. modernizace vyučování matematice, chtěla změnit matematiku, současná reforma je realizovatelná pouze při radikální změně společnosti, učitele a žáka, a předpokládá dokonce, že se tyto změny odehrají „v střednědobé perspektivě“. Přibližně 200 000 žáků prvních a šestých tříd a jejich učitelé na našich základních školách tyto změny již téměř měsíc prožívá, a to, jak občas probleskne naším tiskem, někteří „z donucení“. Školu nelze žádným mávnutím kouzelného proutku, žádným administrativním opatřením změnit, problémy školy však lze poznat a poučit se z jejich charakteru.

Přikláním se k názoru *Daga Hrubého*, že ... „*mezi hlavní problémy našeho školství patří problémy sociální. Zachovat existenci školy, udržet zaměstnanost při stálém úbytku žáků, udržet platy na snesitelné úrovni, financovat provoz školy, . to vše vytváří klima, které je méně podnětné pro tvořivou pedagogickou činnost.*“

Ekonomické otázky se stávají limitujícím činitelem pro práci základní školy od první třídy (rušení vesnických škol), přes druhý stupeň základní školy, víceletá gymnázia a všechny typy škol středních až po školy vysoké. Otázka zachování třídy nebo školy nemůže nemít vliv na úroveň absolventů. Bylo by iluzí myslet si, že potřebnou úroveň vzdělání je možné zajistit administrativně, formulací požadavků, zadáváním jednotných testů a vyhodnocováním práce škol. Těmito metodami lze snad zjistit, ne však zlepšit stav. Přitom dodržování potřebné úrovně požadavků není nic anti-humánního, naopak lidsky škodlivé je jejich snižování, neboť to může vést v dalším vývoji dítěte k problémům. Stanovení a dodržování úrovně absolventa školy je ovšem obtížné a může být i bolestivé, dotýká se přirozené lidské snahy dosáhnout úspěchu s minimem námahy.

Stěžejní otázku koncepce matematického vzdělávání formuloval americký matematik *George Pólya*:

Jak učit matematiku, aby kultivovala myšlení?

Matematika chápáná jako systém formálních dedukcí, jako systém definic, vět a důkazů nebo na elementární úrovni jako systém vzorců, není nejvýhodnějším základem pro přístup ke školské matematice, neboť skýtá mnoho příležitostí k formálnímu zvládání matematických poznatků. Definice, věty a důkazy se lze naučit, aniž bychom jim porozuměli, tento soubor vědomostí lze reprodukovat u zkoušek. Dobrá paměť rozvíjená tréninkem se zdá být postačující k „osvojení“ minima matematiky. Takováto matematika myšlení nerozvíjí, ale spíše utlumuje, protože myšlení komplikuje pohled na strukturu vytříbenou často mnohageneračním vývojem názorů na řešení určitého problému. Ne tedy studium části hotové matematiky, ale poznávání cesty k matematice je základní příležitostí k rozvíjení myšlení. Snaha porozumět věcem je doložitelná historicky a aplikovatelná i didakticky.

Jsem přesvědčen, že škola, má-li plnit své poslání přípravy mládeže pro společnost, musí být pramenem poznávání a to nikoliv jen mechanického probírání částí jednotlivých disciplín.

Snažme se ukazovat matematiku jak vyrůstá z reality a pomáhá řešit problémy praxe, snažme se ukazovat cestu ke struktuře, spíše než strukturu hotovou. Je otázka, budeme-li to umět. Současná volnost obsahu a forem matematického vzdělávání nám to však umožňuje.

Měli bychom na svých školách uhájit dobré podmínky pro matematické vyučování, dostatečný počet hodin a pěstování zájmu o matematiku u maximálního počtu studentů. Vzejde-li z naší konference pod péčí Daga Hrubého forma konkrétní spolupráce a pomoci všem kolegům na školách tak, aby naše současná reforma znamenala prohloubení vzdělání a nikoli jeho utlumování, splní naše konference svůj účel a nescházeli jsme se zbytečně. Pedagogický realismus musí respektovat společenskou skutečnost a přizpůsobovat se jí. Chceme-li pro naši disciplínu získat více studentů, musíme jim ukázat, že matematika je pro ně užitečná, že má pro ně smysl.

Proč je práce učitele tak obtížná? Protože škola, ale i matematika, jsou produkty společenského vývoje. Jestliže úspěch ve společnosti není prioritně věcí vzdělání, originality myšlení, tvořivosti a hledání pravdy, ale spíše věcí taktiky, přizpůsobení se, umění využít příležitosti a umění „v tom chodit“, učí se nám matematika těžko, protože v matematice nejde o programická, ale logická hlediska. Společenským vývojem jsou utvářeni žáci, ale i my učitelé.

Dag Hrubý: Postavení matematiky na gymnáziích ([1], s. 47-70)

Česká gymnázia se nacházejí na jedné z křižovatek svého historického vývoje. Do roku 2009 musí každé gymnázium sestavit pro žáky ve věku 15-18 let svůj vlastní Školní vzdělávací program (dále jen ŠVP). Východiskem k napsání ŠVP je Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (dále jen RVPG) schválený MŠMT 24. 7. 2007. Výuka podle ŠVP bude zahájena 1. 9. 2009. Budoucnost ukáže, zda tento velmi liberální a ve světě ojedinělý přístup povede ke zkvalitnění gymnaziálního vzdělávání v České republice. Pro mne, jako učitele matematiky, je nepochopitelné, že schválený RVPG, který jinak pokládám za solidní výchozí dokument, stanovuje matematice minimální dotaci jen 10 hodin po celou dobu studia s tím, že v posledním ročníku nemusí být zastoupena matematika vůbec. Český jazyk a cizí jazyky jsou přitom dotovány minimem 12 hodin a jsou povinné v každém ročníku. Učinit matematiku nepovinným předmětem ve čtvrtém ročníku gymnázia je podle mého názoru zásahem do matematického gymnaziálního vzdělávání, který v moderní historii gymnázií nemá od roku 1849 obdoby. Argument, že si každá škola může matematiku do 4. ročníku zařadit, pokládám za velmi slabý. Podle mého názoru by měla být matematika zařazena v každém ročníku gymnázia a její hodinová dotace v průběhu studia by neměla být menší, než 12 hod. Bez pochopení ředitelů to však bude velmi těžké. Chtěl bych proto apelovat na všechny ředitele gymnázií České republiky aby nepodlehli pokušení vyřadit matematiku ze čtvrtého ročníku a zajistili matematice v připravovaných ŠVP důstojné místo, které jí náleží stejně jako českému jazyku a cizím jazykům. V posledních letech jsem měl možnost navštívit gymnázia a jim podobné školy ve Švýcarsku, Finsku, Švédsku, Rakousku, seznámil jsem se s učebními plány gymnázií v některých německých zemích a na lyceích v Alsasku ve Francii. Musím bohužel konstatovat, že ve výše uvedených zemích má matematika v učebních dokumentech středních škol významnější zastoupení než ve schváleném RVPG.

Pro učitele gymnázií je nejdůležitější, aby měli stálý styk s vědou, filosofií, uměním a praktickou činností. Bez tohoto styku se stává učitel řemeslníkem, spěje k formalismu a klesá na úroveň učebnice. Učitel bez všeobecného kulturního nadhledu má tendenci žáky přetěžovat. Důležité je, aby učitelé byli dobře odborně vzděláni a připraveni. Vzdělání a vědomosti jsou předpokladem přirozené autority učitele. Je proto zcela v pořádku, je-li budoucí učitel matematiky na gymnáziu seznámen v univerzitním kurzu

např. se základy teorie funkcí komplexní proměnné, i když tato látka není předmětem gymnaziální matematiky. Matematiku pokládám za nedílnou součást všeobecného vzdělání a proto by měla být, podle mého názoru, obsažena ve všech vzdělávacích programech, které všeobecné vzdělávání poskytují, být povinnou součástí maturitní zkoušky na gymnázium (úroveň A – úroveň B) a obsažena v učivu každého ročníku gymnázia. Otázky typu: „K čemu budu v životě potřebovat diskriminant kvadratické rovnice?“ jsou pro mě irelevantní. „*K čemu je nějaké vědy prakticky potřeba, to ptá se střizlivé lidstvo i jednotlivec na malém stupni kultury, kde je zájem pouze o hmotné potřeby. Čeho každý absolvent střední školy potřebuje, jest, aby se dovedl oholit, a tomu se na střední škole nenaučí*“ [3]. Nové školské programy by měly přinejmenším zachovat dosavadní úroveň absolventů škol, v žádném případě by ji neměly snížit. Poskytnutá svoboda musí být podložena odpovědností za jednání, názory a rozhodování. K tomu je nutný řád, jasná pravidla a přehledná organizace, jinak je zde nebezpečí chaosu.

Moderní české školství je u nás spojeno s Exner – Bonitzovou reformou z roku 1849. V zásadě lze říci, že rakouské gymnázium po roce 1848 nespočívalo na klasickém vzdělání, ale spíše na spojení filologického a matematicko-přírodovědného vzdělání [4]. Reformní snahy ve vyučování matematice v Evropě se objevují již od 60. let 19. století. Tyto snahy vyústily v reformní návrh na úpravu středoškolského matematicko-přírodovědného vzdělávání, který byl zveřejněn a přijat na shromáždění německých přírodovědců a lékařů v Meranu v roce 1905. Tento návrh, který je v literatuře uváděn pod názvem *Meranský program*, připisuje matematice ve středoškolském vzdělávání jedno z klíčových postavení a její úkoly vidí zejména v rozvíjení prostorové představivosti a logického a funkčního myšlení. Meranské návrhy se staly východiskem dalších reforem [5]. Poslední významná úprava středního školství v habsburské monarchii bývá nazývána jako *Marchetova reforma* [6]. Nejpodstatnějšími změnami jsou pro matematiku ty, které vyplynuly z přijetí Meranského programu. Jednalo se především o zavedení pojmu funkce a základů diferenciálního a integrálního počtu.

V předmnichovské republice se gymnázia členila na klasická, reálná a reformní reálná. Své kulturní poslání mohla plnit především díky tomu, že v jejich sborech působili jako profesori vědci, spisovatelé, umělci a hlavně výrazné pedagogické osobnosti, které chápaly své povolání jako poslání a které se díky tomu těšily vážnosti v místní i v celé české národní společnosti.

V letech 1948 až 1989 prošla gymnázia bouřlivým vývojem. Než se gymnázia vzpamatovala z reformy předchozí, přišla reforma nová. Je obtížné zaznamenat všechny obsahové změny. Významné bylo období modernizace výuky matematiky na základě logiky a teorie množin v 70. letech. Starší kolegové vzpomínají v této souvislosti na tzv. komentářovou éru, která paradoxně vedla ke zvýšení aktivity učitelů matematiky na gymnáziích. Nedostatek nových učebnic nutil učitele k hlubšímu zamyšlení nad výukou. Být učitelem matematiky na gymnáziu před rokem 1989 bylo možná jednodušší, než být učitelem dějepisu nebo občanské nauky. Platnost Thaletovy věty není závislá na ideologii, bude platná i za sto let. Jsou však zde jiné problémy. Autorovi tohoto textu se nepodařilo najít učební plán gymnázia z období 1948–1989, ve kterém by matematika nebyla zastoupena v posledním ročníku gymnázia. Navrhované minimum, 10 hodin matematiky v RVPG, odpovídá plánu večerního studia na gymnáziu z roku 1969, kde však byla matematika zastoupena v každém ročníku. Co k tomu dodat?

Školství není v krizi. Podmínky a možnosti vzdělávání jsou ale samozřejmě jiné, než před rokem 1989. Ve většině zemí se od školství očekává konzervace stávajícího řádu a zároveň trvalé přizpůsobování měnící se situaci. Někteří lidé budou proto vždy mít pocit, že škola se mění málo, jiní, že změn a novot je příliš. Výsledkem je neustálá nespokojenost se školou, která má za následek neustálou touhu školu reformovat. Pedagogičtí teoretici a školští politici u nás často proklamují, že bez aktivní angažovanosti učitelů není možné očekávat příznivý výsledek v uskutečňování změn ve školství. Má to pouze jednu slabinu: Apelace směřující k učitelům se neopírají o poznatky, jež by vysvětlovaly, zda jsou učitelé na požadované změny odborně připraveni, zda jsou v daných podmínkách schopni je realizovat a především zda vůbec učitelé pozitivně přijímají požadavky na ně kladené a jsou ochotni je realizovat. Stále přetrvává takový postup, kdy školští politici, či teoretičtí pedagogové „něco vymyslí“ (a může to být něco užitečného a žádoucího) a předloží to učitelům a ředitelům škol jako nezpochybnitelné. Autoři návrhů očekávají, že učitelé se navrhovaných změn nadšeně chopí a začnou je uskutečňovat. Snad nikdo se nezabývá zjišťováním toho, do jaké míry jsou učitelé ochotni určitou změnu akceptovat a podporovat. Bez těchto zjišťování je těžké měnit školu a učitele.

Diskuse o reformě české školy probíhá prakticky od roku 1990. Zejména problematika maturitní zkoušky je ukázkou jisté bezradnosti. Pro žádnou z politických stran se školství nestalo prioritou. Způsob tzv. normativního

financování, který působí na první pohled velmi demokraticky, má výrazné nedostatky. V podstatě nutí nejen střední, ale také vysoké školy, aby přijímaly skoro všechny uchazeče. Učitelé jsou dlouholetou diskusí unaveni. Navíc se nepodařilo vybudovat pro učitele kariérní systém na způsob atestací a rovněž platy učitelů nejsou na odpovídající úrovni. Podařilo se však, že učitel malotřídní školy v Dolní Lhotě, jehož práce si velmi vážím, má stejný plat jako profesor Akademického gymnázia v Praze. Určitou zdrženlivost či ne zrovna horoucí nadšení pro různé změny, jež od učitelů očekávají někteří radikální kritici stavu českého školství, nelze vykládat jako negativní rys učitelů, svědčící o zaostalosti či nízké flexibilitě právě českých učitelů. Je to rys univerzální, charakteristický i pro učitele jiných zemí, a kromě toho spíše rys pozitivní, neboť zachovává stabilitu školní edukace v podmínkách nestabilního světa [7]. Problém kvalitního vzdělání je problém celosvětový [8].

Škola je prostředím, které nás připravuje pro život, vtiskuje nám smysl pro pravidla i jejich nesamozřejmost, proto je místem pro otázky, místem, kde se protrhává každodenní rozvrh a kde sídlí rozumění. Škola by měla být místem eubúlia, místem výchovy ve smyslu dobré rady, člověk je totiž bytostí, v níž se odehrává svár mezi věděním a nevěděním. Škola je místem, kde je zkoušen a dotazován především učitel. Dobrá škola nekončí vysvobozením v podobě zvonění. Zvonek pouze ukazuje na členění času a v dobré škole je přehlšován žadoněním žáků, kteří podobně jako v babiččině pohádce, chtějí vždycky znova vědět, jak to bylo dál [9].

Jindřich Bečvář: Naše žhavá současnost ([1], s. 71-89)

Nelze počítat s tím, že za nás někdo něco udělá, vyřeší a zařídí, že nám někdo něco zadarmo dá, a navíc bez postranních úmyslů. Ať už by to měly být výzkumné ústavy, Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Ministerstvo práce a sociálních věcí, politické strany nebo sdělovací prostředky. A už vůbec nelze spoléhat na nějaké „globální řešení“ (reforma, RVP, ŠVP apod.). V tomto smyslu si nedělejme vůbec žádné iluze.

Každý se však snažme *podle svých možností pozitivně ovlivňovat chování a myšlení svých žáků, studentů a jejich rodičů, kolegů učitelů, svého ředitele, atmosféru ve škole, postoje a stanoviska městského zastupitelstva, ministerstva školství, vlády i politických stran*. Ozývejme se všude, kde můžeme, dávejme najevo své názory, souhlasné i nesouhlasné, svou spokojenost i nespokojenost se školskou politikou státu, regionu, města a obce.

Ozvějme se, i když se nám zdá, že to nemá vůbec žádný efekt. Má to smysl, alespoň v tom, že narovnáme páteř a zachováme si tvář. Čím více se nás bude ozývat, tím větší vliv mohou naše postoje mít.

Bez ohledu na vnější podmínky se každý z nás snažme ve své škole a ve svých hodinách podle svého nejlepšího vědomí a svědomí dávat studentům to nejlepší, čeho jsme schopni. O co se každý z nás jako jedinec nepostará a nezaslouží, to my všichni, jako jeden celek, nebudeme mít.

Významný rakouský filozof Karl Raimund Popper (1902 – 1994) napsal: Za budoucnost jsme ... morálně odpovědní už teď a musíme pro ni bez ideologických brýlí udělat to nejlepší – i tehdy, když vyhlídky na to nejsou nijak příznivé.

... Domnívám se, že jedinou cestou, která může vést k určité nápravě, je kvalitní každodenní práce každého z nás, práce na naší škole, v naší třídě, v prostředí, v němž se pohybujeme. Jsem přesvědčen, že jediný způsob, jak se do jisté míry úspěšně vyrovnat s negativními vlivy doby, je vhodný způsob komunikace s žáky, studenty, rodiči, ředitelem školy atd. Musíme pravidelně, zcela otevřeně, srozumitelně, klidně a třeba i s humorem zaujímat stanoviska ke všemu, co nás obklopuje, a přesvědčivě zdůvodňovat své postoje. Jako osamocení učitelé ničeho nedosáhneme. Musíme se snažit na svou stranu získávat žáky, studenty, jejich rodiče i ostatní populaci. Jinak budeme stále prohrávat a prohrávat bude současně celá společnost ...

Mnozí učitelé se stále drží hlavně učebnic, počítačů a internetu se bojí. S rozumnou pomocí výpočetní techniky – zdůrazňuji s rozumnou pomocí – by mohli své studenty více zaujmout.

Musíme do značné míry držet krok s dobou, počítačů a jejich možností se nesmíme bát. Musíme zvládnout základní počítačové dovednosti, textové editory, nějaký geometrický software, musíme umět pracovat s internetem, vyhledávat informace a vyhodnocovat je. Musíme být např. schopni objevit a prokázat plagiátorství svých žáků, alespoň v jednoduchých případech. Musíme si být rovněž dobře vědomi různých nebezpečí, k nimž přehnaná orientace na počítače vede.

Doba se však změnila i z řady dalších hledisek. Společnost se atomizovala, přehnaný důraz se klade na jedince, na tzv. asertivní jednání, které však mnozí chápou jako vystupování z „pozice síly“, narostla agresivita. Výrazně se posunuly pojmy, významy slov, atmosféra doby se mění stále rychleji a rychleji. Uvedme jen jediný příklad. Jako hrdinové jsou dnes prezentováni ti, co se s vyhlídkou na velkou finanční odměnu a pochybnou popularitu nechají zavřít do izolace a pod objektivy kamer tráví čas pitím,

kouřením, výstřednostmi a trapným, často vulgárním žvaněním o plytkostech. Jak úžasné a lákavé příklady pro naši mládež! A protože se svět tolik změnil – a pro nás neobyčejně náhle – je určitá proměna školy nutná. Jsem však přesvědčen, že bychom se neměli snažit školu měnit prudkými, neověřenými a shora nařízenými reformami. Dávám přednost menším postupně prováděným změnám, které musí být uvážlivě koncipované a dobře promyšlené. Musíme pečlivě zvažovat blízké i vzdálené důsledky změn, které provádíme ...

Na závěr bych rád znovu zopakoval, že *každý z nás má možnost přispět ke zlepšení vzdělanosti a vzdělávání ve svém bezprostředním okolí*. Někdo větší, někdo menší, podle toho, na jaké škole učí, jaké postavení má, kolik žáků vzdělává atd. Tuto možnost nám nemůže dát ani vzít žádná reforma. Čím více učitelů si tento fakt uvědomí a bude usilovat o nápravu, tím lepších celkových výsledků lze dosáhnout.

Každý učitel se může snažit kolem sebe vytvářet skupinku učitelů, studentů a spřízněných duší, skupinku těch, kteří chtějí pracovat a vzdělávat se, těch, kteří mají uspokojení a radost z poznávání a objevování, kteří mají chuť přiložit ruku k dílu a podílet se v přátelském a upřímném prostředí na nějaké společné aktivitě. Takovýto skupinkám říkám s jistou dávkou nadsázky a humoru ostrůvky pozitivní deviace. Snažme se o vytváření a rozvíjení takovýchto ostrůvků.

Ze závěrů konference

- Jsme si vědomi toho, že mnohé nedostatky, o nichž jsme jednali na naší konferenci, jsou dokladem ne vždy kvalitní práce nás, učitelů. Na druhé straně víme, že jsme bezmocní proti negativním vlivům společnosti, ať už na poli ekonomickém, politickém nebo kulturním. Snažme se sledovat vývoj, poukazovat na nedostatky a budovat kvalitní vzdělávací systém na každé úrovni. Snažme se učit dobře matematiku, snažme se dobře vychovávat.
- Dobrá výchovně vzdělávací práce školy může však v dlouhodobé perspektivě pomáhat společnosti přetvářet. Je to však reálné jen tehdy, budou-li učitelé schopni a ochotni takto působit. Musí být osobnostmi, které dokáží vidět podstatné, které dokáží samostatně uvažovat a nepodléhat slepě formálním autoritám. Nesmí jim chybět velkorysost a důslednost.
- Dnes, snad více než kdy jindy, je nejdůležitějším článkem vzdělávacího procesu učitel. Jsme přesvědčeni, že žádná školská reforma

„shora“ nemůže výrazně zlepšit úroveň vzdělávání. Pozitivní změna je možná jen při trvalém a systematickém vytváření podmínek pro dobrou práci učitelů a škol. Dobrý učitel dnes rozumí nejen předmětům své aprobační, ale i studentům. Musí rozumět i společnosti a jejímu vývoji – a to jak na úrovni školy a regionu, tak republiky, a svým všestranným snažením přispívat k dobré práci školy. Měl by mít dobře promyšlenou koncepci svého pedagogického působení v rámci možností školy, na níž působí, a přispívat k utváření dělného učitelského kolektivu.

- Konference se v mnoha příspěvcích dotkla současné reformy našeho školství založené na idejích Bílé knihy. Tato reforma je realitou naší současné školy. Podle našeho názoru tkví její hlavní nebezpečí v malé pozornosti k výchově k odpovědnosti a k rozvíjení pracovních návyků. Těmito tendencím nahrává důraz na přizpůsobení obsahu školního vzdělávání „místním podmínkám“, malý důraz na učivo a jednostranný důraz na tzv. kompetence. Má-li být školní vzdělávání základem pokroku ve všech odvětvích společenského a kulturního života, musí být orientováno k rozvíjení již zmíněné odpovědnosti a k výchově k práci. Krásná a vznešená idea „poskytnout co největšímu množství lidí co nejvyšší vzdělání“ degeneruje u nás „v obludnou myšlenku: co nejvíce lidí musí absolvovat vysokou školu, a to i za cenu, že se razantně sníží nároky na studium“ (Janoušek). Snažme se proto nejen učit, ale zejména naučit. Snažme se pěstovat pracovní návyky žáků a klást důraz na rozvíjení jejich odpovědnosti. Matematika nám k tomu poskytuje dostatek příležitostí.
- Utvořme v Jednotě českých matematiků a fyziků skupinu vedenou Dagem Hrubým, která by se zaměřila na tyto aktivity:
 1. Pomáhat školám (ve spolupráci s jejich ředitelstvím a učitelským sborem) stanovit rozumné dotace hodin matematiky v učebním plánu.
 2. Navrhnout školní vzdělávací programy pro matematiku na gymnáziu, a to ve dvou variantách odstupňovaných podle náročnosti a časové dotace pro matematiku.
 3. Podněcovat tvorbu nových materiálů pro výuku matematiky, které by věnovaly patřičnou pozornost mezipředmětovým vazbám, kulturním souvislostem a aplikacím.
 4. Podle potřeby se scházet k diskusím.

Literatura

- [1] O škole a vzdělávání. Sborník z konference Matematika – základ evropské vzdělanosti. Editor: Bečvářová, M., Matfyzpress, Praha 2007.
- [2] *Bečvář, J. – Hrubý, D. – Kuřina, F. – Vopěnka, P.*: Co nás znepokojuje. MFI, roč. 16, 2006/07, č. 10.
- [3] *Dr. Vladimír Buben, in Čapek, E.*: 100 hlasů o reformě, Praha 1930, str. 39.
- [4] *Svatoš, M.*: Exner-Bonitzovy školské reformy a jejich důsledky pro gymnaziální školství v habsburské monarchii v 19. století. (Sborník referátů z konference konané 24. - 25. června 1999 v Jičíně, str. 42-47).
- [5] *Potůček, J.*: Vývoj vyučování matematice na českých školách v období 1900 – 1945. Pedagogická fakulta ZČU Plzeň, 1993.
- [6] *Klímová, J.*: Reforma středního školství v roce 1908. (Sborník referátů z konference konané ve dnech 24. – 25. června 1999 v Jičíně, str. 72-79).
- [7] *Průcha, J.*: Učitel. Portál, Praha 2002.
- [8] *Bertrand, Y.*: Soudobé teorie vzdělávání. Portál, Praha 1998.
- [9] *Pinc, Z.*: Fragmenty k filosofii výchovy. Oikoymenh, Praha 1999.

58. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola (domácí část)

KATEGORIE A

A–I–1

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$2 \sin x \cos(x + y) + \sin y = 1,$$

$$2 \sin y \cos(y + x) + \sin x = 1.$$

Jaroslav Švrček

A–I–2

Je dán tětíkový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC s průsečíkem výšek trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD .

Tomáš Jurík

A–I–3

Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že $\frac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo.

Ján Mazák

A–I–4

Uvažujme nekonečnou aritmetickou posloupnost

$$a, a + d, a + 2d, \dots, \quad (*)$$

kde a, d jsou přirozená (tj. kladná celá) čísla.

- Najděte příklad posloupnosti $(*)$, která obsahuje nekonečný mnoho k -tých mocnin přirozených čísel pro všechna $k = 2, 3, \dots$
- Najděte příklad posloupnosti $(*)$, která neobsahuje žádnou k -tou mocninu přirozeného čísla pro žádné $k = 2, 3, \dots$
- Najděte příklad posloupnosti $(*)$, která neobsahuje žádnou druhou mocninu přirozeného čísla, ale obsahuje nekonečný mnoh třetích mocnin přirozených čísel.
- Dokažte, že pro všechna přirozená čísla a, d, k ($k > 1$) platí: Posloupnost $(*)$ buď neobsahuje žádnou k -tou mocninu přirozeného čísla, anebo obsahuje nekonečný mnoho k -tých mocnin přirozených čísel.

Jaroslav Zhouf

A–I–5

V každém vrcholu pravidelného 2008úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout:

- na 8 hromádek po 251 minci,
- na 251 hromádek po 8 mincích.

Radek Horenský

A–I–6

Je dán trojúhelník ABC . Uvnitř stran AC, BC jsou dány body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M střed strany AB a P průsečík přímk AD a BE . Dokažte, že obraz bodu P v středové souměrnosti se středem M leží na ose úhlu ACB .

Ján Mazák

KATEGORIE B

B–I–1

Na tabuli je napsáno čtyřmístné číslo dělitelné osmi, jehož poslední číslice je 8. Kdybychom poslední číslici nahradili číslicí 7, získali bychom číslo dělitelné devíti. Kdybychom však poslední číslici nahradili číslicí 9, získali bychom číslo dělitelné sedmi. Určete číslo, které je napsané na tabuli.

Peter Novotný

B–I–2

Určete všechny trojice (x, y, z) reálných čísel, pro které platí

$$\begin{aligned}x^2 + xy &= y^2 + z^2, \\ z^2 + zy &= y^2 + x^2.\end{aligned}$$

Jaroslav Švrček

B–I–3

Na straně BC , resp. CD rovnoběžníku $ABCD$ určete body E , resp. F tak, aby úsečky EF , BD byly rovnoběžné a trojúhelníky ABE , AEF a AFD měly stejné obsahy.

Jaroslav Zhouf

B–I–4

Na desce 7×7 hrajeme hru loď. Nachází se na ní jedna loď 2×3 . Můžeme se zeptat na libovolné políčko desky, a pokud loď zasáhne, hra končí. Pokud ne, ptáme se znovu. Určete nejmenší počet otázek, které potřebujeme, abychom jistě loď zasáhli.

Ján Mazák

B–I–5

Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k . Osa strany AB protne kružnici k v bodě K , který leží v polorovině opačné k polorovině ABC . Osy stran AC a BC protnou přímkou CK po řadě v bodech P a Q . Dokažte, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné.

Leo Boček

B–I–6

Najděte všechny dvojice celých čísel (m, n) , pro něž je hodnota výrazu

$$\frac{m + 3n - 1}{mn + 2n - m - 2}$$

celé kladné číslo.

Vojtech Bálint

KATEGORIE C**C–I–1**

Honza, Jirka, Martin a Petr organizovali na náměstí sbírku na dobročinné účely. Za chvíli se u nich postupně zastavilo pět kolemjdoucích. První dal Honzovi do jeho kasičky 3 Kč, Jirkovi 2 Kč, Martinovi 1 Kč a Petrovi nic. Druhý dal jednomu z chlapců 8 Kč a zbylým třem nedal nic. Třetí dal dvěma chlapcům po 2 Kč a dvěma nic. Čtvrtý dal dvěma chlapcům po 4 Kč a dvěma nic. Pátý dal dvěma chlapcům po 8 Kč a dvěma nic. Poté chlapci zjistili, že každý z nich vybral jinou částku, přičemž tyto tvoří čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla. Který z chlapců vybral nejméně a který nejvíce peněz?

Peter Novotný

C–I–2

Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A , B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D , E . Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC .

Pavel Leischner

C–I–3

Najděte všechna čtyřmístná čísla n , která mají následující tři vlastnosti: V zápise čísla n jsou dvě různé číslice, každá dvakrát. Číslo n je dělitelné sedmi. Číslo, které vznikne obrácením pořadí číslic čísla n , je rovněž čtyřmístné a dělitelné sedmi.

Pavel Novotný

C–I–4

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Na polopřímce BC sestrojte takový bod G , aby obsah trojúhelníku ABG byl shodný s obsahem daného pětiúhelníku.

Lucie Růžičková

C–I–5

Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. (Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje.)

Jaromír Šimša

C–I–6

Dokažte, že pro libovolná různá kladná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Jaromír Šimša

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2008 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 149

Nechť $ABCD$ je čtyřstěn, jehož hrany při vrcholu D jsou navzájem kolmé. Označme S střed kulové plochy opsané čtyřstěnu $ABCD$ a T těžiště jeho stěny ABC . Dokažte, že bod T leží na přímkce DS .

Erich Windischbacher (Graz)

Úloha 150

Nechť $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{R}$ značí po řadě množinu všech celých a reálných čísel. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna celá čísla x, y platí

$$f(3x - y) \cdot f(y) = 3f(x).$$

Pavel Calábek