

Ptolemaiova nerovnost v geometrii trojúhelníku

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Trojúhelníková nerovnost představuje základní vztah, který splňují vzdálenosti libovolných tří bodů. Obdobným vztahem pro vzdálenosti mezi libovolnými čtyřmi body v rovině je Ptolemaiova nerovnost, viz [4]. Jestliže tři z těchto bodů ztotožníme s vrcholy trojúhelníku ABC (obr. 1), můžeme ji formulovat takto:

Věta 1

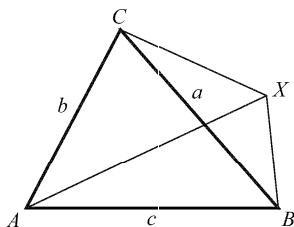
Pro libovolný trojúhelník ABC a bod X v rovině trojúhelníku platí

$$b \cdot |BX| + c \cdot |CX| \geq a \cdot |AX|, \quad (1)$$

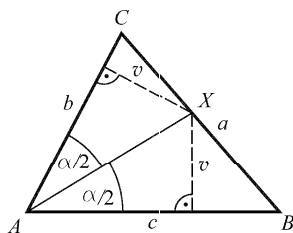
kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníku ABC . Rovnost zde nastane, právě když se bod X nachází na tom oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC , který neobsahuje bod A .

Jestliže místo bodu X uvažujeme v (1) nějaký význačný bod trojúhelníku ABC a při úpravě získaného vztahu využijeme jeho specifické vlastnosti, obdržíme nerovnost (resp. rovnost) pro některé prvky trojúhelníku ABC . V tomto smyslu představuje věta 1 užitečný nástroj ke zjišťování některých metrických vztahů v uvažovaném trojúhelníku ABC , jak nyní ukážeme na několika příkladech.

Zvolme nejprve jako X průsečík osy úhlu BAC a strany BC (obr. 2). Jeho vzdálenost v od přímky AB i AC je stejná, a tak z dvojího vyjádření obsahu pro trojúhelníky ABX a ACX plyne



Obr. 1



Obr. 2

$$\frac{2 S_{ABX}}{2 S_{ACX}} = \frac{|BX| \cdot v_a}{|CX| \cdot v_a} = \frac{c \cdot v}{b \cdot v},$$

a tedy

$$\frac{|BX|}{|CX|} = \frac{c}{b}.$$

Odtud

$$|BX| = \frac{ac}{b+c}, \quad |CX| = \frac{ab}{b+c}.$$

Po dosazení do (1) a označení $|AX| = u_a$ dostaneme nerovnost

$$\frac{2abc}{b+c} > a u_a,$$

kteou lze upravit na ekvivalentní tvar

$$\frac{2}{u_a} > \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Zdůrazněme, že v tomto případě platí ostrá nerovnost a poznamenejme, že pro délku osy úhlu lze odvodit vztah

$$u_a = \frac{2bc \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c},$$

z něhož přímo plyne poslední nerovnost (viz například [1], str. 58-60).

Ve druhém příkladu zvolíme za X bod souměrně sdružený s průsečíkem V výšek trojúhelníku ABC v osové souměrnosti podle přímky BC . Ten, jak známo ([7], [8]), leží na tom oblouku kružnice trojúhelníku opsané, který neobsahuje bod A . Při označení podle obr. 3 můžeme vztah (1) přepsat na tvar

$$cz + by = a(x + 2x'). \quad (2)$$

Z dvojího vyjádření obsahu trojúhelníku ABC plyne $c(z + z') = a(x + x')$. Odtud určíme $cz = a(x + x') - cz'$, dosadíme do (2) a upravíme na tvar

$$by = ax' + cz'.$$

Tento vztah lze interpretovat například tak, že každý trojúhelník se základnou délky b a výškou délky $|BV|$ má stejný obsah jako (na obrázku nekonvexní) čtyřúhelník $ABCV$.

Zajímavý důsledek věty 1 dostaneme, je-li trojúhelník ABC rovnostranný.

Věta 2

Nechť ABC je rovnostranný trojúhelník a X libovolný bod v rovině jím určené. Pak platí nerovnost

$$|BX| + |CX| \geq |AX|, \quad (3)$$

přičemž rovnost nastane, právě když bod X leží na kratším oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC .

Z věty 2 a jejích obměn získaných cyklickou záměnou bodů A , B a C plynou dvě klasické věty:

Věta 3 (van Schooten)

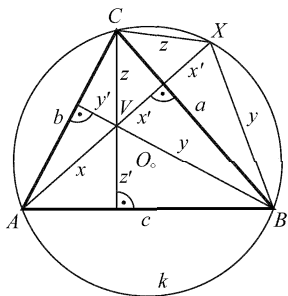
Pro libovolný bod X , který leží na kružnici opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je jedna z jeho vzdáleností od vrcholů tohoto trojúhelníku rovna součtu vzdáleností od zbývajících dvou vrcholů.

Věta 4 (Pompeiu)

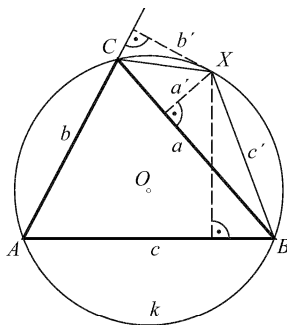
Délky $|AX|$, $|BX|$ a $|CX|$ jsou pro každý bod X a rovnostranný trojúhelník ABC délkami stran tzv. *Pompeiuova trojúhelníku*, který je degenerován, pokud X leží na kružnici trojúhelníku ABC opsané.

Důkazy věty 3, které nevychází z Ptolemaiovy nerovnosti, nalezne čtenář například v [2] (příklad 80) nebo [3] (str. 31 cv. 8).

Podle Alexandra Bogomolného [9] zobecnil nedávno vietnamský matematik *Bui Quang Tuan* van Schootenovu větu na všechny trojúhelníky.



Obr. 3



Obr. 4

Věta 5 (Quang Tuan)

Nechť X je bod kružnice opsané trojúhelníku ABC a $X \notin \{A, B, C\}$. Jestliže a' , b' a c' jsou po řadě vzdálenosti bodu X od přímk BC , CA a AB , pak jeden z podílů a/a' , b/b' a c/c' je roven součtu zbývajících dvou. *Důkaz.* Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že bod X leží uvnitř toho oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC , který neobsahuje bod A (obr. 4). Pro obsah S_{BCX} trojúhelníku BCX platí

$$S_{BCX} = \frac{1}{2} aa' = \frac{a \cdot |BX| \cdot |CX|}{4r},$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC (a tedy i trojúhelníku BCX). Odtud

$$\frac{a}{a'} = a \cdot \frac{2r}{|BX| \cdot |CX|} = a \cdot |AX| \cdot \frac{2r}{|AX| \cdot |BX| \cdot |CX|}.$$

Součtem dalších dvou vztahů, které získáme z předešlé rovnosti cyklickou záměnou vrcholů a délek stran trojúhelníku, dostaneme

$$\frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = \frac{2r}{|AX| \cdot |BX| \cdot |CX|} (b \cdot |BX| + c \cdot |CX|)$$

a dále s využitím (1) máme

$$\frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = \frac{2r}{|AX| \cdot |BX| \cdot |CX|} a \cdot |AX| = \frac{a}{a'}.$$

Tím je věta dokázána.

Vnímavý čtenář si již asi uvědomil že v případě rovnostranného trojúhelníku přechází věta 5 ve větu van Schootenovu, neboť platí

$$\frac{1}{a'} = k \cdot |AX|, \quad \frac{1}{b'} = k \cdot |BX| \quad \text{a} \quad \frac{1}{c'} = k \cdot |CX|,$$

kde

$$k = \frac{2r}{|AX| \cdot |BX| \cdot |CX|}.$$

Uvedli jsme zde jen několik ukázek využití vztahu (1) při zkoumání vlastností trojúhelníku. Ptolemaiova nerovnost je vhodná i k důkazům a nalézání jiných nerovností a k řešení extrémálních úloh, jak můžeme vidět například v [4], [6] nebo [5]. Příspěvek uzavíráme několika úlohami vhodnými k procvičení výše zmíněných metod.

Úlohy k procvičení

1. Pomocí vztahu (1) dokažte, že v každém trojúhelníku ABC při obvyklém způsobu označení délek stran a těžnic platí $bt_b + ct_c > at_a$ a cykl.
(Návod: Za X zvolte těžiště trojúhelníku ABC .)
2. Pomocí vztahu (1) dokažte trojúhelníkovou nerovnost pro trojúhelník ABC .
(Návod: Za X zvolte střed kružnice trojúhelníku opsané.)

3. Pomocí vztahu (1) dokažte, že v každém trojúhelníku ABC při obvyklém označení délek stran a velikostí vnitřních úhlů platí

$$\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} < \frac{b}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{c}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad \text{a cyklicky další.}$$

(Návod: Za X zvolte střed kružnice trojúhelníku vepsané.)

4. Množinou všech bodů X v rovině, které mají součet vzdáleností od některých dvou vrcholů daného rovnostranného trojúhelníku ABC roven vzdálenosti od třetího vrcholu, je kružnice opsaná trojúhelníku ABC . Dokažte.
5. Bod M leží v rovině rovnostranného trojúhelníku ABC , $|AM| = 3$ cm, $|BM| = 5$ cm. Určete největší možnou vzdálenost M od C . Jaká délka a strany trojúhelníku ABC této maximální vzdálenosti odpovídá?
(Odpověď: $|CM|_{\max} = 8$ cm pro $a = 7$ cm. Pro pevně umístěný trojúhelník ABC je bod M určen jednoznačně.)
6. Dokažte, že pro obsah S konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ platí nerovnost

$$2S \leq |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

Kdy nastane rovnost?

(Odpověď: Rovnost nastane pro tětiový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami.)

Literatura

- [1] *Horák, S.*: Nerovnosti v trojúhelníku, Škola mladých matematiků, sv. 57. Mladá fronta, Praha 1986.
- [2] *Kuřina, F.*: Umění vidět v matematice. SPN, Praha 1989.
- [3] *Koman, M.*: Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic. Škola mladých matematiků, sv. 15, Mladá fronta, Praha 1966.
- [4] *Leischner, P.*: Ptolemaiova nerovnost. MFI, roč.15 (2005/06), č. 7, s. 385-392.
- [5] *Pech, P.*: Izoperimetrická nerovnost pro čtyřúhelník a Ptolemaiova nerovnost. Rozhledy M-F, roč. 71 (1993/1994), č. 5, s. 216-219.
- [6] *Pech, P.*: Fermatova úloha a Ptolemaiova nerovnost. Rozhledy M-F, roč. 71 (1993/94), č. 6, str. 264-267.
- [7] *Švrček, J. – Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha 1988.
- [8] *Švrček, J.*: Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníka. Karolinum – nakladatelství Univerzity Karlovy, Praha 1998.
- [9] <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PointOnCircumcircle2.shtml>

Přihrádkový princip ve třech úlohách

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Přihrádkový (nebo také Dirichletův) princip je tvrzení, které je čtenářům nejspíše známé, ale pro jistotu si je připomeneme:

Je-li $n + 1$ předmětů rozmístěno do n přihrádek, pak aspoň v jedné jsou aspoň dva předměty.

Užitím tohoto principu dokážeme tři věty, které sice nejsou příliš významné, ale jistou míru zajímavosti snad nepostrádají. Zde je první z nich:

Ke každému přirozenému číslu n , které není dělitelné dvěma ani pěti, existuje jeho násobek, jehož (dekadický) zápis je tvořen samými jedničkami.

Například:

Pro $n = 1$ je $1 \cdot 1 = 1$,
pro $n = 3$ je $37 \cdot 3 = 111$,
pro $n = 7$ je $15\,873 \cdot 7 = 111\,111$,
pro $n = 9$ je $12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111$.

K důkazu této věty zvolme libovolné přirozené číslo n , které není dělitelné dvěma ani pěti, a utvořme n -člennou posloupnost (a_i) , jejíž i -tý člen je pro všechna $i = 1, 2, 3, \dots, n$ tvořen i jedničkami:

$$(a_i) : 1, 11, 111, 1111, \dots, 11 \dots 1.$$

Vydělme každý člen této posloupnosti číslem n a všimněme si, že mohou nastat jenom následující dvě možnosti.

Některé dělení vyjde beze zbytku, což znamená, že jeden z členů této posloupnosti je dělitelný číslem n . Tento člen je tedy násobkem čísla n , a protože se skládá ze samých jedniček, věta v tomto případě platí.

Žádné dělení nevyjde beze zbytku, takže při dělení n členů posloupnosti (a_i) dostaneme jako zbytky čísla $1, 2, 3, \dots, n - 1$. Představíme-li si nyní, že těchto $n - 1$ čísel jsou přihrádky, do kterých rozmístíme n členů posloupnosti (a_i) tak, že v i -té přihrádce ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) je člen a_i , který po

dělení číslem n dává zbytek i , budou podle přihrádkového principu aspoň v jedné přihrádce aspoň dva členy této posloupnosti, dejme tomu a_r, a_s , kde $r > s$. Protože tyto dva členy mají po dělení číslem n stejný zbytek, je jejich rozdíl

$$a_r - a_s = \underbrace{1111 \dots 1}_{r-s} \underbrace{00 \dots 0}_s = \underbrace{1111 \dots 1}_{r-s} \cdot 10^s = a_{r-s} \cdot 10^s$$

číslem n dělitelný a vzhledem k tomu, že čísla n a 10^s jsou nesoudělná, je člen a_{r-s} , jehož zápis je tvořen samými jedničkami, násobkem čísla n . Věta platí i v tomto případě.

Druhá věta, kterou chceme dokázat, praví:

Ke každému přirozenému číslu n , které není dělitelné dvěma ani pěti a které je různé od jedné, a ke každému přirozenému číslu k existuje mocnina čísla n , jejíž (dekadický) zápis končí k -člennou skupinou $000 \dots 001$.

Například:

$$\begin{aligned} \text{pro } n = 3 \text{ a } k = 1 \text{ je } & \dots 3^4 = 81, \\ \text{pro } n = 3 \text{ a } k = 2 \text{ je } & \dots 3^{20} = 3\,887\,184\,401, \\ \text{pro } n = 7 \text{ a } k = 1 \text{ je } & \dots 7^4 = 2\,401, \\ \text{pro } n = 7 \text{ a } k = 2 \text{ je } & \dots 7^8 = 5\,764\,801, \\ \text{pro } n = 9 \text{ a } k = 1 \text{ je } & \dots 9^2 = 81, \\ \text{pro } n = 9 \text{ a } k = 2 \text{ je } & \dots 7^{10} = 3\,887\,184\,401. \end{aligned}$$

Pro důkaz této věty zvolíme libovolné přirozené číslo $n \neq 1$, které není dělitelné dvěma ani pěti, a libovolné přirozené číslo k a budeme uvažovat konečnou posloupnost, která má 10^k členů:

$$n, n^2, n^3, n^4, \dots, n^{10^k}.$$

Vydělíme-li každý člen této posloupnosti číslem 10^k , nedostaneme u žádného podílu nulový zbytek, neboť čísla n a 10 jsou nesoudělná. Možné zbytky jsou tedy čísla $1, 2, 3, \dots, 10^k - 1$. Představme si nyní, že těchto $10^k - 1$ čísel jsou přihrádky a že do nich rozmístíme 10^k členů uvedené posloupnosti tak, že do i -té přihrádky vložíme ten člen posloupnosti, který po vydělení číslem 10^k dává zbytek i , kde $i = 1, 2, 3, \dots, 10^k - 1$. Podle přihrádkového principu budou aspoň v jedné přihrádce aspoň dva členy této posloupnosti, které označíme n^r, n^s , přičemž $r > s$. Protože tyto dva

členy dávají při dělení číslem 10^k stejný zbytek, je jejich rozdíl číslem 10^k dělitelný, takže

$$10^k \mid (n^r - n^s) \quad \text{neboli} \quad 10^k \mid n^s(n^{r-s} - 1),$$

odkud plyne

$$10^k \mid (n^{r-s} - 1),$$

neboť čísla 10^k a n^s jsou nesoudělná.

Z posledního vztahu vyplývá, že $n^{r-s} - 1$ je násobkem čísla 10^k , tj.

$$n^{r-s} - 1 = p \cdot 10^k, \text{ kde } p \text{ je přirozené,}$$

neboli

$$n^{r-s} = p \cdot 10^k + 1.$$

Tato poslední rovnost znamená, že dekadický zápis čísla n^{r-s} končí k -člennou skupinou 000...001. Věta je tím dokázána.

Třetí a poslední věta, kterou dokážeme, se týká Fibonacciho čísel, tj. členů posloupnosti

$$(a_n) : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots,$$

která je pro všechna přirozená čísla $n > 2$ určená rekurentním vztahem

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ a počátečními podmínkami } a_1 = a_2 = 1.$$

Jde o tuto větu:

Ke každému přirozenému číslu n existuje Fibonacciho číslo, jehož (dekadický) zápis končí n nulami.

K jejímu důkazu zvolíme libovolné přirozené číslo n a vezmeme posloupnost $z_1, z_2, z_3, z_4, \dots$, jejíž každý člen z_k je zbytek po dělení k -tého členu Fibonacciho posloupnosti číslem 10^n (V této posloupnosti je $z_1 = z_2 = 1$ a její každý člen počínaje třetím je roven součtu předchozích dvou podle modulu 10^n .) Z jejich sousedních členů utvoříme posloupnost

$$(z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_4), \dots$$

uspořádaných dvojic a budeme uvažovat jejich prvních 10^{2n} členů.

Je zřejmé, že v těchto 10^{2n} dvojicích není pár $(0, 0)$ – jinak by obě odpovídající sousední Fibonacciho čísla byla dělitelná 10^n , což by podle rekurentního vzorce znamenalo, že číslem 10^n jsou dělitelné všechny členy Fibonacciho posloupnosti. Protože každá z těchto uspořádaných dvojic je tvořena zbytky při dělení číslem 10^n , tj. čísla $0, 1, 2, 3, \dots, 10^n - 1$, je všech možných těchto dvojic (po odečtení dvojice $(0, 0)$) celkem $10^n \cdot 10^n - 1 = 10^{2n} - 1$, tj. o jednu méně než je počet uspořádaných dvojic zbytků po dělení členů Fibonacciho posloupnosti číslem 10^n .

Podle přihrádkového principu to znamená, že v posloupnosti $(z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_4), \dots$ jsou dvě dvojice stejné. Vzhledem k tomu, že každá z těchto dvojic určuje dvojici následující, je tato posloupnost periodická; délka její periody je nejvýše $10^{2n} - 1$. Uvědomíme-li si ještě, že každá z těchto dvojic (vyjma první) určuje i dvojici předcházející, je zřejmé, že první opakující se dvojici bude pár $(1, 1)$. Posloupnost uspořádaných dvojic tvořených zbytky po dělení členů Fibonacciho posloupnosti číslem 10^n je tedy posloupnost

$$(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8), \dots, (z_j, z_{j+1}), (1, 1), (1, 2), (2, 3), \dots,$$

v níž platí

$$z_{j+1} = 1 \quad \text{a} \quad z_j + z_{j+1} = 1.$$

Odtud dostáváme, že je $z_j = 0$, což znamená, že odpovídající člen Fibonacciho posloupnosti je dělitelný číslem 10^n , takže jeho (dekadický) zápis končí n nulami. Tím je věta dokázána.

Všimněme si na závěr případu $n = 1$, tj. posloupnosti, kterou dostaneme, když každý člen Fibonacciho posloupnosti vydělíme číslem 10^1 . Vznikne tak posloupnost

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, \dots,$$

což je posloupnost posledních číslic členů Fibonacciho posloupnosti, ve které se počítá podle modulu 10. Podle toho, co bylo řečeno výše, je tato posloupnost periodická a délka její periody je nejvýše $10^2 - 1 = 99$. Budeme-li ve výčtu jejích členů pokračovat, snadno zjistíme, že dvě po sobě jdoucí jedničky se objeví na 61. a 62. místě, což znamená, že tato posloupnost má periodu délky 60.

Vyučovanie matematiky – intelektuálna konštrukcia

DUŠAN JEDINÁK

Trnavská univerzita v Trnave, SLOVENSKO

Základné predpoklady

Ak je učenie sa proces konštruovania poznatkových štruktúr, tak vyučovanie školskej matematiky vyžaduje pravidelné vytváranie takých situácií, v ktorých študent uskutočňuje svoj vlastný intelektuálny výkon (porozumenie je vždy subjektívne konštruované). Voľne povedané: učiaci sa človek má v primeranej miere hlbšie porozumieť základným abstraktným matematickým pojmom a súvislostiam medzi nimi. Pretože matematika je myšlienková štruktúra popísaná systémom axióm, definícií a viet aj so svojimi dôkazmi, tak pri vyučovaní a učení sa školskej matematiky je zvlášť dôležité a nevyhnutné postupné získanie vhľadu do celej problematiky (motivácie, separované modely, univerzálne modely, abstraktné vedomosti a ich štrukturalizácia). Bez hlbšieho vnútorného záujmu a výrazne kladného vôľového postoja, osobitých myšlienkových foriem a špecifických postupov usudzovania i argumentácie, abstraktnej predstavivosti a systematickej pojmovej výstavby nemožno uspieť ani v budovaní elementárnych základov matematickej kultúry. Neformálne matematické porozumenie je vždy prejavom vytrvalej myšlienkovvej dôslednosti i ochoty prekonávať prekážky vo vnímaní a odhaľovaní súvislostí.

Jednou z ciest, aby vedomosti zo školskej matematiky neboli iba formálne, je uplatňovanie zásady: **vhľad – porozumenie – použitie**. Ak majú byť matematické vedomosti užitočnou súčasťou ľudskej kultúry, tak majú zvýrazniť a rozvíjať samostatné a kritické myslenie, využívať abstraktné prístupy pri rôznej reprezentácii a odhaľovať rôznorodé hierarchizované štruktúry pojmov a súvislostí medzi nimi. Matematický spôsob uvažovania rozvíja *poznávacie schopnosti* (analýza a porozumenie javov a vzťahov, abstrakcia, zovšeobecnenie, objavovanie súvislostí, rozvoj predstavivosti, tvorba pojmov, štruktúra poznatkov), *vyhraňuje postoje a významy* (formulácia myšlienok, príčinné vysvetľovanie, argumentácia, organizácia informácií, kritický prístup a poučenie sa aj z chýb), *zvýrazňuje*

komunikáciu (nevyhnutnosť zdôvodňovania tvrdení, neverbálne a symbolické vyjadrovanie, logická argumentácia, diskusia a porovnávanie názorov). Matematika je pátranie po štruktúrach a pravidelnostiach, ktoré usporadúvajú a zjednodušujú svet (P. A. Griffith). Známi didaktici matematiky Hejný a Kuřina vyjadrili spoločné presvedčenie [2]: *Zmysel vyučovania matematiky spočíva v rozvoji matematickej kultúry študujúcich; jej podstatnou zložkou je rozumieť matematike a vedieť ju aplikovať ... Matematické vzdelanie by malo mať zmysel a malo by byť užitočné. Malo by žiakom prinášať uspokojenie a radosť.*

Charakteristické znaky a princípy

Ani školská matematika sa nedá účinne zvládnuť len učením sa bez porozumenia, aj keď tam sú také prvky učiva, ktoré sa stačí naučiť spamäti. Vyučovací predmet *matematika* už v ZŠ a potom v SŠ nevyhnutne vyžaduje učenie sa s porozumením, aby si študujúci vytvárali svoje vlastné chápanie matematických javov a súvislostí. Vo všeobecnosti sa didaktickou problematikou takýchto výchovno-vzdelávacích postupov zaoberá *pedagogický konštruktivizmus* (ako spojenie kognitívneho a sociálneho konštruktivismu). Uvedme, s ohľadom na špecifické vyučovanie školskej matematiky, jeho charakteristické znaky a princípy [15]:

- Kládie sa dôraz predovšetkým na *učenie sa*, doplnené dialógom medzi žiakmi a učiteľom s cieľom hlbšieho systematického porozumenia.
- Vyžaduje a podporuje sa iniciatíva usmernenej zvedavosti, aktivita skúmania a odhaľovania súvislostí, samostatná myšlienková argumentácia učiacich sa.
- Rešpektujú sa motivačné postoje žiakov, ich učebné štýly, stratégie i podnetné návrhy na obsah vyučovania.
- Zabezpečujú sa autentické matematické skúsenosti v kontexte reálnych životných situácií, riešenie problémových úloh na úrovni najbližšej zóny pochopenia, vytvára sa dostatočný časový priestor.
- Nezanedbáva sa spätná väzba, v diskusii sa odstraňujú vzniknuté rozpory, povzbudzuje sa k novým predstavám (hypotézam).

Praktické návrhy

Po viacročných skúsenostiach z didaktickej prípravy budúcich učiteľov matematiky pre ZŠ odporúčam všetkým učiteľom matematiky, aby so svojimi žiakmi a študentmi vyskúšali hore spomínaný prístup aj na dolu uvedených školských matematických úlohách:

1. Dvaja matematici **A** a **B** sa takto zhovárali:

A: Súčin veku mojich troch synov je 36.

B: Táto informácia mi nestačí na určenie veku každého z nich.

A: Súčet veku mojich synov je rovnaký ako počet okien na dome, ktorý vidíme pred sebou.

B: Ani teraz sa nedá určiť vek tvojich synov.

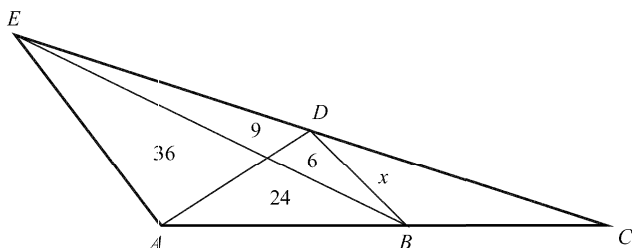
A: Najstarší z mojich synov má čierne vlasy.

B: Ďakujem, to stačí, už poznám vek tvojich synov.

Koľko rokov má každý zo spomínaných synov?

Koľko okien bolo na budove, ktorú videli pred sebou?

2. Na tanečnom večierku bolo 20 mladých ľudí (chlapci a dievčatá). Mária tancovala so siedmimi chlapcami, Oľga s ôsmimi, Viera s deviatimi, atď. Posledná Helena tancovala so všetkými chlapcami. Koľko chlapcov bolo na večierku?
3. V našom meste sú $\frac{3}{5}$ žien vydatých za $\frac{2}{3}$ mužov. Aká časť obyvateľstva je slobodná (nežije v manželstve)?
4. Vo veštiarni sedia vedľa seba tri bohyně: *Pravda*, *Lož* a *Múdrosť*. *Pravda* vždy hovorí pravdu, *Lož* vždy klame a *Múdrosť* hovorí tak aj onak (niekedy pravdu, niekedy lož). Zistíte, v akom poradí sedia bohyně, ak postupne odpovedali na otázky takto: Kto sedí vedľa teba? *Pravda*. Kto si? *Múdrosť*. Kto sedí vedľa teba? *Lož*.
5. Sedem hubárov nazbieralo spolu 100 húb tak, že každý z nich nazbieral iný počet. Dokážte, že medzi nimi sú traja takí, ktorí dohromady nazbierali aspoň 50 húb.
6. Predstavte si, že napíšete všetky prirodzené čísla od 1 do 5 555. Koľkokrát pritom napíšete číslicu 9?
7. Čísla na obrázku znamenajú veľkosti obsahov príslušných trojuholníkov. Stanovte x , t.j. obsah trojuholníka BCD , kde D je stred úsečky CE .



8. Nájdite trojciferné prirodzené číslo, ktoré po vydelení tromi za sebou idúcimi jednocifernými číslami dáva súčet zvyškov 21.
9. V tombole je 100 žrebov a 10 výhier. Máme dva žreby. Aká je pravdepodobnosť, že výhra pripadne aspoň na jeden náš žreb?
10. Stanovte počet šesťciferných prirodzených čísiel, ktoré nie sú deliteľné ani jedným z čísiel 42, 63?
11. Z dostatočne veľkého počtu poštových známok s hodnotami 5 a 17 sa dajú skladať rôzne hodnoty. Aká je *najväčšia* hodnota, ktorá sa nedá vytvoriť kombináciou týchto dvoch hodnôt?
12. Koľko je možností pridelenia štyroch študentov na preskúšanie trom učiteľom, ak požadujeme:
 - aby každý študent bol preskúšaný *aspoň jedným* učiteľom;
 - aby každý študent bol preskúšaný *práve jedným* učiteľom;
 - aby každý učiteľ preskúšal *aspoň jedného* študenta;
 - aby každý učiteľ preskúšal *práve jedného* študenta.
13. Koľko usporiadaných trojíc prirodzených čísel (x, y, z) vyhovuje vzťahu $x \cdot y \cdot z = 10^6$?
14. Dokážte, že existuje práve jeden trojuholník, ktorého dĺžky strán sú tri po sebe idúce prirodzené čísla a jeho jeden vnútorný uhol je dvojnásobkom druhého.
15. Dokážte, že číslo 2^n (n je prirodzené) sa nedá napísať ako súčet niekoľkých za sebou idúcich prirodzených čísiel.
16. Nech p je ľubovoľné prvočíslo väčšie ako 3. Dokážte, že ak číslo p^n má práve 20 cifier, potom niektoré tri z nich sú rovnaké.
17. Medzi dvanástimi dukátmi je jeden falošný (nemá rovnakú hmotnosť ako ostatné). Stanovte postup, akým nájdete tento falošný dukát najviac tromi váženiami na rovnoramenných váhach, ak nie sú k dispozícii žiadne závažia.

Záverečné presvedčenie

Ak sa zamyslíme nad základnými povinnosťami zodpovedného učiteľa matematiky z konštruktivistického pohľadu vedenia vyučovania a štúdia školskej matematiky môžeme zvýrazniť niektoré jeho podstatné a nenahraditeľné úlohy:

- Intenzívne ovládanie základných matematických teórií, ktoré sú základom didaktického systému školskej matematiky spolu so špecif-

kým uplatňovaním pedagogicko-psychologických zásad a vyučovacích postupov i všeobecných zákonov učenia sa.

- Vytrvalá aktívna schopnosť didakticko-pedagogicky skúmať, rozpracúvať a s tvorivou systematickosťou vo vyučovacom procese realizovať tematiku školskej matematiky s prihliadnutím na vek, študijné a pracovné prostredie i schopnosti žiakov.
- Uplatňovanie flexibilných a variabilných vyučovacích i študijných postupov pre žiakov s rôznymi vzdelávacími potrebami v individuálnom, činnostnom a celostnom výchovno-vzdelávacom prístupe.
- Sprístupňovanie matematiky ako vhodne popularizovanej a kladne motivovanej špecifickej ľudskej civilizačno-kultúrnej aktivity, ktorá odhaľuje rozmanitosť, pravidelnosť a vzájomnú prepojenosť spoznávaných abstraktných štruktúr odrážajúcich svet, v ktorom žijeme a vytvárame myšlienkové modely.

Matematika je veda, ktorá dáva najlepšiu príležitosť pozorovať proces myslenia a má tu prednosť, že pri jej pestovaní nadobúdame cvik v metóde rozumového uvažovania, ktoré môže byť potom používané na štúdium ktoréhokoľvek predmetu (G. Pólya). Matematické myslenie nám sprostredkúva vzťah medzi zmyslovým a nadzmyslovým svetom. Matematika nám pomáha pochopiť obrovskú rozmanitosť jednotlivostí sveta. Dôsledným zmysluplným vedením vyučovania školskej matematiky môžeme prispievať k zušľachťovaniu ľudských duší matematickou kultúrou.

Krátky appendix

Zdá sa mi, že spomínaný konštruktivistický prístup ku vzdelávaniu veľmi pôsobivo a vtipne vystihol už *Galileo Galilei* (1564 – 1642): „*Nemôžete nikoho nič naučiť. Môžete mu prinajlepšom pomôcť, aby to sám v sebe našiel.*“

Literatúra

- [1] *Hejný, M. a kol.*: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. PedF UK, Praha 2004.
- [2] *Hejný, M. – Kuřina, F.*: Dítě, škola a matematika. Portál, Praha 2001.
- [3] *Freudenthal, H.*: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Klett-Verlag, Stuttgart 1977.
- [4] *Jedinák, D.*: Dokážeme, že sa nedá. Rozhľedy M-F, roč. 82 (2007), č. 1, s. 54-56.

- [5] *Jedinák, D.*: Odvaha i rozvaha pre dokazovanie v školskej matematike. MFI, roč. 15 (2005/06), č. 4, s. 203-212.
- [6] *Jedinák, D.*: Percentá sú zradné čísla pomerné. Rozhledy M-F, roč. 82 (2007), č. 2, s. 51-53.
- [7] *Jedinák, D.*: Vhodná predstava – cesta k úspechu (aj pri štúdiu matematiky). MFI, roč. 14 (2004/05), č. 5, s. 263-268.
- [8] *Jedinák, D.*: Úlohy školskej matematiky, ktorých riešenie mám rád. Učiteľ matematiky, roč. 14 (2005), č. 1 (57), s. 51-58.
- [9] *Kuřina, F.*: Realismus konstruktivních přístupů k vyučování matematice. In: Vedecké štúdie KU, roč. 2, č. 1, s. 40-47, Ružomberok 2002.
- [10] *Kuřina, F. – Půlpán, Z.*: Podivuhodný svět elementární matematiky. Academia, Praha 2006.
- [11] *Lokšová, I. – Lokša, J.*: Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole. Portál, Praha 1999.
- [12] *Perný, J.*: Konstruktivismus ve vyučování matematice. In: Matematika v škole dnes a zajtra (zborník z konferencie, s. 236-242), Ružomberok: PdF KU, 2007.
- [13] *Pólya, G.*: Mathematics and plausible reasoning. Princeton University Press, Princeton 1954.
- [14] *Pólya, G.*: Mathematical discovery I., II.. John Wiley & Sons, New York – London 1962, 1965.
- [15] *Turek, I.*: Inovácie v didaktike. MPC, Bratislava 2005.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 143 a 144, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle tohoto (17.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 143

Určitý obnos menší než 1000 Kč je rozdělen do deseti číslovaných hromádek (v celých korunách), přičemž platí:

- Když z 1. hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji ke 2. hromádce,
- pak ze 2. takto zvětšené hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji ke 3. hromádce,
- ...

- pak z 9. takto zvětšené hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji k 10. hromádce,
- až nakonec z takto zvětšené 10. hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji k 1. hromádce,

pak bude ve všech hromádkách týž obnos.

Kolik Kč bylo v jednotlivých hromádkách původně a kolik nakonec?

Stanislav Trávníček

Řešení:

Označme $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ původní částky v jednotlivých hromádkách a c částku, která zůstane v každé hromádce nakonec. Zřejmě platí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 10c.$$

Vzhledem k zadání úlohy je pak $10c < 1000$ Kč, tedy

$$c < 100 \text{ Kč}.$$

Označme y částku, kterou přesuneme z druhé hromádky na třetí. Potom ve druhé hromádce byla po prvním kroku částka $10y$, zbyla částka $9y = c$, tedy $y = \frac{1}{9}c$. Ve třetí hromádce pak po přidání částky ve druhém kroku bude $x_3 + \frac{1}{9}c$, po odebrání částky ve třetím kroku tam zbyde částka

$$c = \frac{9}{10} \left(x_3 + \frac{1}{9}c \right).$$

Odtud $x_3 = c$ a ve třetím kroku přesouváme na čtvrtou hromádku opět částku $\frac{1}{9}c = y$.

Tyto úvahy zopakujeme dále pro čtvrtou až desátou hromádku a dostaneme

$$x_3 = x_4 = \dots = x_{10} = c$$

a v posledním kroku přesouváme na první hromádku částku $\frac{1}{9}c = y$. Potom bude v první hromádce částka

$$\frac{9}{10}x_1 + \frac{1}{9}c = c.$$

Odtud

$$x_1 = \frac{80}{81}c.$$

V prvním kroku jsme tedy z první hromádky na druhou přesouvali částku

$$\frac{1}{10}x_1 = \frac{8}{81}c,$$

na druhé hromádce pak byla částka

$$x_2 + \frac{8}{81}c = 10y = \frac{10}{9}c.$$

Odtud

$$x_2 = \frac{82}{81}c.$$

Na jednotlivých hromádkách tedy byly částky

$$x_1 = \frac{80}{81}c, \quad x_2 = \frac{82}{81}c, \quad x_3 = x_4 = \dots = x_{10} = c.$$

Vzhledem k tomu, že podle zadání jsou tyto částky celočíselné a $c < 100$ Kč, platí nutně $c = 81$ Kč. Nyní je třeba ještě ověřit, zda můžeme přesouvané sumy vyjádřit pomocí dostupných mincí či bankovek. V prvním kroku se přesouvá částka 8 Kč, ve druhém 10 Kč, v dalších pak částky 9 Kč, což lze.

Původně byly v jednotlivých hromádkách částky

$$x_1 = 80 \text{ Kč}, \quad x_2 = 82 \text{ Kč}, \quad x_3 = x_4 = \dots = x_{10} = 81 \text{ Kč}$$

a na konci byla na každé hromádce částka 81 Kč.

Správné řešení zaslali *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jan Čapek* z G v Duchcově, *David Klačka*, *Samuel Říha*, *Jana Šormová*, *Adam Zemek* a *Bohuslav Zmek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Miroslav Klimoš*, *Lucie Mohelníková*, *Eliška Nekvapilová* a *Tomáš Toufar*, všichni z GMK v Bílovci, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Martin Michálek* z GJKT v Hradci Králové, *Josef Ondřej* z G v Rožnově pod Radhoštěm a *Alena Peterová* z G v Dobrušce.

Úloha 144

Obdélník $ABCD$ o rozměrech $m \times n$ je rozdělen na mn jednotkových čtverců. Uvažujme libovolný systém přímek, v jejichž sjednocení leží všechny vrcholy zmíněných jednotkových čtverců s výjimkou bodu A . Dokažte, že každý takový systém obsahuje alespoň $m + n$ přímek.

Jaromír Šimša

Řešení:

Daný obdélník umístíme do kartézské souřadnicové soustavy s počátkem v bodě A tak, že celý leží v jejím prvním kvadrantu. Máme ukázat, že každý systém přímek, jejichž sjednocení obsahuje všechny body z množiny

$$M(n, m) = \{(x, y); x \in \{0, 1, \dots, n\}, y \in \{0, 1, \dots, m\}, x + y > 0\}$$

a neobsahuje bod $(0, 0)$, se skládá alespoň z $m + n$ přímek. Libovolný systém přímek, jejichž sjednocení obsahuje všechny body množiny $M(n, m)$ a neobsahuje bod $A = (0, 0)$, budeme dále nazývat $M(n, m)$ -systém.

Definici množiny $M(n, m)$ můžeme zobecnit i na případy, kdy některé z čísel $M(n, m)$ je rovno 0. Totiž $M(0, 0)$ je prázdná množina, pro přirozená čísla m a n pak položíme

$$M(n, 0) = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$$

$$M(0, m) = \{(0, 1), (0, 2), \dots, (0, m)\}$$

Libovolný $M(0, 0)$ -systém pak nemusí obsahovat žádnou přímku. V případě přirozeného čísla n množina $M(n, 0)$ obsahuje n různých bodů, které leží na přímce procházející bodem $(0, 0)$, žádná přímka $M(n, 0)$ -systému nemůže procházet dvěma různými body množiny $M(n, 0)$, protože by jinak procházela také bodem $(0, 0)$. Proto se $M(n, 0)$ -systém skládá z alespoň n přímek. Podobně se $M(0, m)$ -systém skládá z alespoň m přímek. Tvrzení příkladu jsme tak ukázali pro případy, kdy některé z čísel m, n je rovno nule.

Nechť m a n jsou dále přirozená čísla. Uvažujme body množiny $M(n, m)$, které leží na obvodu obdélníku $ABCD$, tj. body z množiny $\mathbf{O}$

$$\begin{aligned} \mathbf{O} = & \{(x, 0), x \in \{1, 2, \dots, n\}\} \cup \{(x, m), x \in \{0, 1, \dots, n\}\} \cup \\ & \cup \{(0, y), y \in \{1, 2, \dots, m\}\} \cup \{(n, y), y \in \{0, 2, \dots, m\}\}. \end{aligned}$$

Nechť přímka obsahuje alespoň tři body z $\mathbf{O}$, potom na ní leží jedna ze stran obdélníku $ABCD$. Pokud tato přímka patří do $M(n, m)$ -systému, mohou na ní ležet pouze strany stran BC , CD , tj. jedná se buď o přímku $x = n$, nebo $y = m$.

Předpokládejme, že do $M(n, m)$ -systému nepatří přímky $x = n$ a $y = m$. Potom každá z přímek tohoto systému prochází nejvýše dvěma body z $2(m + n) - 1$ bodů množiny $\mathbf{O}$, tedy do tohoto systému patří alespoň $m + n$ přímek.

Nyní uvažme situaci, kdy některá z přímek BC , CD patří do $M(n, m)$ -systému. Obecněji předpokládejme, že existují celá nezáporná čísla $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $l \in \{0, 1, \dots, m\}$, tak, že přímky $x = k$ a $y = l$ do $M(n, m)$ -systému nepatří, kdežto každá z $(m + n - k - l)$ přímek $x = k + 1, x = k + 2, \dots, x = n$ a $y = l + 1, y = l + 2, \dots, y = m$ do tohoto $M(n, m)$ -systému patří. Tyto přímky nemají žádný společný bod s množinou $M(k, l)$. Ale podle předchozího se $M(k, l)$ -systém skládá z alespoň $k + l$ přímek, tedy i v tomto případě se $M(n, m)$ -systém skládá z $(k + l) + (m + n - k - l) = m + n$ přímek. Tím je úloha dokázána.

Poznámka 1. Sjednocení soustavy n přímek $x = k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ a soustavy m přímek $y = l$, $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ obsahuje množinu $M(n, m)$, tedy $m + n$ je nejlepší dolní odhad počtu přímek libovolného $M(n, m)$ -systému.

Poznámka 2. Výše uvedeným způsobem úlohu řešili všichni soutěžící, kteří měli úplné řešení.

Správné řešení zaslali *Jan Kusý* a *Tomáš Toufar*, oba z GMK v Bílovci, *Jan Máca* z G v Třebíči, *Josef Ondřej* z G v Rožnově pod Radhoštěm, *Libor Peltan* z G v Českých Budějovicích, Česká a *Josef Tkadlec* z GJK v Praze.

Neúplné řešení zaslal *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jan Čapek* z G v Duchcově a *Li Mang* z GChD v Praze.

Pavel Calábek