

MATEMATIKA

Co lze a co nelze odvodit aneb trochu jinak o axiomatických systémech

IVAN CHAJDA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Již řadu let se v odborných časopisech diskutuje otázka automatického (tj. pomocí počítače) dokazování. Neformálně řečeno, je-li dán některý jazyk (predikátové logiky prvního řádu) obsahující symboly proměnných, symboly operací a relací, a je-li dán nějaký systém základních pravidel, tj. axiomů, jak s těmito symboly zacházet, vzniká otázka, zda lze každou formuli tohoto jazyka, která je pravdivým výrokem, ze systému axiomů odvodit. Tato úloha není nepředstavitelná pro středoškolského studenta, ale právě naopak. Student, ovládající práci s počítačem, se např. při řešení domácího úkolu či dokonce úlohy Matematické olympiády může zamyslet nad otázkou, zda by nešlo tuto úlohu „vhodně zadat“ a očekávat, že ji počítačový program rozřeší sám.

Odmysleme se pro jednoduchost od techniky formalizace a počítačového software, a pokusme se najít odpověď na otázku, zda takový problém je či není řešitelný formalizovaným aparátem.

Nejprve se vraťme k pojmu axiomatický systém. Předpokládejme, že je dán některý jazyk predikátové logiky prvního řádu obsahující potřebné symboly operací, funkcí, relací a proměnných. Nechť je dán axiomatický systém v tomto jazyce. Dotazujeme-li se u státních závěrečných zkoušek adeptů učitelství matematiky na vlastnosti axiomatických systémů, zpravidla odpovídají, že to jsou: *nezávislost, úplnost a bezespornost*. Poněkud horší je to již s odpovědí na dotaz, který axiomatický systém těchto vlastností znají. Pokusím se zde vnést jasno do této problematiky.

Pokud by axiomatický systém nebyl bezesporný, pak by v něm platil některý výrok P i jeho negace P . Jelikož pro každý výrok Q (tétoho jazyka) je pravdivý výrok $P \wedge \neg P \Rightarrow Q$, šlo by v takovém systému dokázat jakýkoliv výrok tohoto jazyka, což je zjevný nesmysl. Tedy axiomatický systém, který není bezesporný, není použitelný. Máme-li dán některý axiomatický systém, můžeme se o jeho bezespornosti přesvědčit tak, že nalezneme jeho model. Jako příklad lze uvést axiomatický systém teorie grup. Nechť L je jazyk, obsahující symboly $+$, $-$, 0 , $=$ a symboly proměnných $x, y, z, \dots$, logické spojky a kvantifikátory. Axiomatický systém lze pak zvolit takto:

$$\begin{aligned}x + (y + z) &= (x + y) + z \\x + 0 &= x \\0 + x &= x \\ \forall x \exists y \quad \text{tak, že} \quad x + y &= 0 \quad \text{a} \quad y + x = 0\end{aligned}$$

Jeho modelem je libovolná grupa (v aditivní notaci). Tím je ověřeno, že je bezesporný.

Co se týká nezávislosti jednotlivých axiomů axiomatického systému, jedná se spíše o technickou otázku, která nemá zásadní vliv na náš problém, a proto se nezávislosti axiomů zde nebudeme věnovat.

Klíčovou otázkou tedy zůstává úplnost axiomatického systému. Teorii (daného jazyka L) nazýváme úplnou (viz např. [4]), jestliže z každých dvou výroků Q a $\neg Q$ jazyka L lze v této teorii aspoň jeden dokázat (tedy sporný systém je vždy úplný!). Tento termín „úplný“ pak aplikujeme nejen na tuto teorii, ale i na axiomatický systém, na němž je založena.

Nechť je tedy **AS** axiomatický systém formulovaný v některém jazyce L , a nechť je T některý výrok jazyka L . Lze vždy užitím **AS** a odvozovacích pravidel rozhodnout, zda je či není T pravdivý výrok? Pro jednoduchost výkladu předpokládám, že čtenář ví, jaká jsou odvozovací pravidla používané logiky. Nechť **Teor(AS)** označuje množinu všech pravdivých výroků, odvozených z **AS** (např. v uvedeném axiomatickém systému teorie grup čtenář jistě snadno odvodí pravdivé výroky $0 + 0 = 0$ nebo $(x + y) + (z + v) = x + (y + (z + v))$). Ptáme se tedy, zda vždy $T \in \mathbf{Teor(AS)}$ nebo $\neg T \in \mathbf{Teor(AS)}$. Student, ovlivněný používáním počítače zpravidla sympatizuje s názorem, že tomu tak je (jde „jen“ o to, jak počítač naučit dokazovat, a on jistě po nějaké době rozhodne o platnosti výroku T). Pro studenta to může být překvapením, ale pro vyučujícího

by nemělo být překvapením, že odpověď na uvedenou otázku je obecně negativní, alespoň za jistých (ale zcela přirozených) okolností. To nyní upřesníme.

Čtenář, který je obeznámen s jazykem aritmetiky ví, že aritmetiku lze axiomatizovat pomocí tzv. Peanových axiomů. Označme P tuto teorii jazyka prvního řádu doplněného o symboly „+“ , „ $\cdot$ “ pro aritmetické operace, symboly proměnných, symbol rovnosti „=“ a symbol „0“ (pro číslo nula). V roce 1930 dokázal *Kurt Gödel* tzv. větu o úplnosti predikátové logiky prvního řádu:

Věta 1 (Gödelova věta o úplnosti)

V každém jazyce predikátové logiky prvního řádu jsou větami (tj. pravdivými výroky) právě ty formule, které jsou logicky odvoditelnými.

V roce 1931 pak tentýž matematik vyslovil a dokázal větu o nerozhodnutelnosti teorie P , viz [1]:

Věta 2 (Gödelova věta o nerozhodnutelnosti aritmetiky)

Je-li teorie P bezesporná, pak jazyk L obsahuje formuli V , která je neodvoditelná z P , a také její negace $\neg V$ je neodvoditelná z P .

Neboli, plyne odtud že v aritmetice budou existovat formule, o kterých nelze rozhodnout, zda jsou nebo nejsou pravdivé. Závěr je tedy následující: je-li jazyk L natolik „bohatý“, že obsahuje symboly aritmetiky, a axiomatický systém AS natolik „bohatý“, že obsahuje Peanovy axiomy, pak vždy existují v L formule, o jejichž pravdivosti (či dokazatelnosti, odvoditelnosti) nelze v rámci AS rozhodnout (více se čtenář může dozvědět např. v monografii E. Mendelsohn [3]).

Čtenáři se může zdát, že tento závěr je poněkud pesimistický. Přece naprostá většina našich teorií, které v matematice studujeme, obsahuje přinejmenším aritmetiku, a tedy i nerozhodnutelné formule. Je to vskutku tak, a proto naivní víra typu „počítač dokáže jednou odvodit vše“ nemůže, obrazně řečeno, překročit svůj vlastní stín.

Ovšem situace je ještě složitější. Jak již bylo řečeno, o bezespornosti teorie se přesvědčíme tím, že najdeme její model. Teorii P považujeme za bezespornou, neboť čtenář jistě zná její model, což jsou např. přirozená čísla se známou aritmetikou (v přísně logickém smyslu ale ani bezespornost teorie P není tímto zcela garantovaná, viz např. [3] nebo [5]). Tento model je samozřejmě nekonečný, jak plyne bezprostředně z Peanových axiomů.

Ovšem již v letech 1915 až 1919 dokázali T. Skolem a L. Löwenheim (viz [2], [4]) dvě zásadní věty, jejichž důsledkem je následující tvrzení:

Věta 3 (Skolem-Löwenheimova)

Má-li teorie jazyka prvního řádu nekonečný model, pak má model libovolné nekonečné mohutnosti.

Jelikož je $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ s operacemi „+“, „ $\cdot$ “ nekonečným spočetným modelem aritmetiky P , plyne z této věty, že existují i nespočetné modely aritmetiky, které se nazývají nestandardní modely. Místo $\mathbb{N}_0$ můžeme např. uvažovat množinu $\mathbb{R}_+$ všech nezáporných reálných čísel. Čtenář se snadno přesvědčí, že pro tuto množinu opět platí všechny axiomy aritmetiky. Avšak tato množina je nespočetná, tedy tento model je nestandardní. Uvažujme nyní formuli

$$\forall x \exists y \text{ tak, že } x = y + y.$$

Tato formule je zřejmě pravdivým výrokem v aritmetice nezáporných reálných čísel, ale je nepravdivým výrokem v aritmetice čísel přirozených. Je tedy nerozhodnutelnou formulí v rámci naší teorie P .

Pokud čtenáře předchozí věta zaujala, nechám k úvaze poznámku, která již „nadzvedla ze židle“ nejednoho matematika. Čtenář jistě ví, že teorii množin lze axiomatizovat např. Hilbert-Bernaysovým axiomatickým systémem. Tedy tato teorie má nekonečný model, a dle věty Skolem-Löwenheimovy má i model nekonečný spočetný. Avšak čtenář se v kurzu teorie množin jistě učil Cantorův diagonalizační proces, kterým mj. dokazoval, že množina všech podmnožin nekonečné spočetné množiny není spočetná. Takže, vážený čtenáři, je toto tvrzení ve sporu s větou Skolem-Löwenheimovou? Není nakonec ta matematika přece jen mnohem složitější než její fragment, který lze formalizovaně zpracovávat výpočetní technikou se sofistikovaným software ?

A na závěr: Příkladem teorie (a tedy i axiomatického systému), která je úplná a bezesporná je např. klasická dvouhodnotová výroková logika. Zasvěcenější čtenář zajisté ví, že jejím modelem je každá Booleova algebra.

L i t e r a t u r a

- [1] *Gödel, K.*: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Monatsch. Math. Phys. 38(1931), 173 – 198.

- [2] *Löwenheim, L.*: Über Möglichkeiten in Relativkakül. Math. Ann., 76(1915), 447 – 470.
- [3] *Mendelson, E.*: Introduction to Mathematical Logic. D. Van Nostrand, 1963.
- [4] *Skolem, T.*: Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. Skrifter Vidensk, Kristiania, 1(1919), 1 – 36.
- [5] *Tarski, A.*: Úvod do logiky. Academia, Praha 1969.

Pěstování samostatnosti v matematice

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cíle edukace (výchovy a vzdělání) v matematice lze shrnout takto: Žák či student (dále jen „žák“) má

- a) získat pro danou školu stanovené znalosti matematických pojmů a metod, schopnosti a zručnost uvědoměle a samostatně je používat;
- b) umět používat matematické modely při řešení problémů mimo matematiku;
- c) zvládnout na dané úrovni přesné matematické myšlení a vyjadřování, pochopit a naučit se používat matematický přístup k problémům a situacím i mimo matematiku (kritičnost, racionální myšlení, exaktní práce atd.)

Společným požadavkem těchto bodů je, že chceme, aby žáci dovedli *samostatně* matematicky uvažovat a *samostatně* v matematice pracovat. A tak je v samostatnosti trénujeme (alespoň si to myslíme) např. zadáváním domácích úkolů, a kontrolujeme, jak už umí samostatně pracovat, např. písemkami. Nebude na škodu si o tom popřemýšlet.

Výchozí předpoklady

Vyjádřením, že žák pracuje (má pracovat) samostatně, máme zpravidla na mysli stav, když žák vykonává posloupnost různých matematických operací, včetně operací myšlenkových, aniž by mu přitom radila druhá osoba. Nejde však o stavy ano – ne; můžeme totiž mluvit o *míře samostatnosti*: když žák řeší úlohu podle písemné předlohy obdobné úlohy, je

míra samostatnosti menší než v případě, že si koncepci řešení úlohy vytváří sám. Pojem samostatnosti práce má navíc několik různých kvalitativních stupňů podle zaměření řešených úloh a problémů (od rutinních úloh až po aktivní úlohy a problémy v rámci uplatňování didaktického konstruktivismu) a také podle disponibilních pomůcek (učebnice, poznámky, kalkulátory, počítače a další). Např. při písemkách jsou povoleny (někdy) kalkulátory, u domácích úloh i učebnice a sešity.

Žáci dovedou samostatně a úspěšně v matematice pracovat, mají-li k tomu čtyři navzájem související předpoklady: *motivaci, porozumění látce, znalosti a sebedůvěru*. Přitom si musíme uvědomit, že ani zde nejde o binární mají – nemají, ale že každý žák má každý z těchto předpokladů jen v určité míře, někdo více, někdo méně (ale patří sem i extrémní případy), a v určité kvalitě.

Častou, ale pasivní *motivací* k samostatné práci je donucení: když se píše písemka, tak je žák donucen pracovat samostatně. U domácího úkolu už to tak být nemusí – jsou spolužáci, od kterých se dá opsat, jsou rodiče a starší sourozenci. Patrně nejlepší a aktivní motivací je touha po uznání, což je elementární vrozený rys člověka. Každý člověk potřebuje vědět a potvrdit si, že je uznáván. Tato touha jemně podporovaná a usměrňovaná učitelem a rodiči by měla vést k žákovu odhodlání: to přece zvládnou, nedám se zahanbit!

Co je to *porozumění látce* a co se při tom děje v hlavách žáků, to úplně nevíme, i když v posledních letech bylo dosaženo značného pokroku při studiu mechanismu poznávacího procesu. Máme však představu, že vzniká po dobrém vysvětlení látky, přispívá k němu aktivizování poznávacího procesu využitím didaktického konstruktivismu a prohlubuje se procvičováním látky a jejím uváděním do nových souvislostí. Zpravidla se považuje za uspokojivý stav porozumění, když žák dovede odpovídat na otázky či pokyny s určitým dílem entropie – neurčitosti (ne moc malým, ne moc velkým). Pokyn: „Řekni vzorec pro $(a - b)^2$ “ neobsahuje žádnou neurčitost; ze správné odpovědi nepoznáme, jestli žák látce rozumí, ale jen to, jestli požadovaný vzorec patří mezi jeho znalosti. Otázka: „Kolik společných bodů a v jaké poloze mohou mít dvě kružnice?“ je jiná, než se obvykle ptáme a už v sobě má jistou neurčitost, kterou žák musí řešit tím, že si sem transformuje obvyklou otázku na vzájemnou polohu dvou kružnic (a ještě může přibýt jeden případ, když obě kružnice mají týž poloměr). Tady už testujeme porozumění dílčí části látky o kružnicích. Dále je však ještě třeba uvážit, že uvědomělé používání nějaké matematické metody

znamená *dvojí* porozumění: jednak rozumět samotné metodě a jednak rozumět tomu, v jaké situaci lze (bývá, může být) vhodné danou metodu použít. Např. je třeba u dané úlohy poznat, že je vhodné použít k jejímu řešení soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a jednak je třeba znát způsoby řešení takové soustavy, i když má třeba méně obvyklý tvar.

Často mlčky – ke škodě žáků – předpokládáme, že se naši žáci umějí učit. Ale ruku na srdce – vysvětlili jsme jim někdy (a raději opakovaně), jak se mají matematiku učit? Mohlo by se zdát, že otázku *znalostí* jakoby někdy teoretici podceňovali jednostranným zdůrazňováním aktivních prvků při získávání poznatků a v jejich boji proti formalizmu jakoby zanikala nezbytnost se matematiku také učit. Avšak není to tak; desatero didaktického konstruktivismu (viz např. [4]) jasně mluví i o usilovné práci pro zvládnutí řemesla, do něhož také patří získání matematických znalostí a obratnosti při jejich používání, neboť aktivní práce v matematice má smysl a je efektivní, právě jen když žáci mají potřebné klíčové znalosti (samozřejmě nejlépe znalosti podložené porozuměním). Nelze brát za příklad studenta, který např. rozumí násobení mnohočlenů, ale již zmíněný vzorec pro $(a - b)^2$ si nepamatuje a byl by ochoten si ho znovu a znovu odvozovat.

Od učitelů – praktiků slýcháváme však častěji povzdech na adresu jiného typu žáků: „Sice tomu moc nerozumějí, ale aspoň, že se to naučí.“ Než tento výrok někdo zavrhne, měl by si uvědomit, že „normální“ časová posloupnost porozumět – procvičit – naučit se, je u mnohých žáků obrácená, tj. učivo začnou chápat, až se ho naučí a procvičí. Pripusťme také, že existují žáci, kteří pro ně trochu složitějšímu učivu už nejsou schopni porozumět. Mají rezignovat na matematiku nebo se mají alespoň naučit „vzorečky“ a naučit se také probírané učivo používat, i když třeba napůl formálně? Většina učitelů dá jistě přednost druhé možnosti, ale nevzdává u nich boj o dosažení rozumného stupně porozumění. Někteří žáci nechtějí chápat matematiku programově a připadá jim jednodušší naučit se učivo jen mechanicky (tj. nechtějí vynakládat úsilí nutné k pochopení matematiky a prostě říkají, že na to nemají). Zkušenost příležitostných učitelů, kteří takové žáky doučují (na žádost jejich rodičů), bývá taková, že jde o normální děti, jen jsou z minulých školních let do určité míry matematicky zanedbaní a proto nechápou a ani nechtějí chápat nové učivo.

Výjimečně se vyskytují i učitelé, kteří jsou sice rádi, když jejich žáci učivu rozumějí, ale jde jim hlavně o to, aby uměli počítat. Pak dávají např. při řešení trojčlenky se zápisem:

$$\begin{array}{l} 84 \% \dots\dots\dots 56 \text{ kg} \\ 100 \% \dots\dots\dots x \text{ kg} \end{array}$$

tuto praktickou radu: „napište x = zlomek, kde v čitateli je součin údajů, které jsou ve stejném řádku a sloupci jako x a ve jmenovateli údaj zbývající“. Toto pravidlo může v žácích nějakou dobu setrvat, ale *pokud je to jediná informace* o trojčlence, kterou dá učitel žákům, je to špatné – a to nejen kvůli nepřímé úměrnosti.

I *sebedůvěra* je k samostatné práci nutná, aby se před řešením zadané úlohy žák neobával, že ho čeká nějaké tísnivé neznámo, a nebál se do ní pustit. Získání sebedůvěry nemusí být pro žáka snadné, protože sebedůvěra bývá ovocem úspěchů. Nejúčinnější pro její zvyšování jsou pocity vítězství nad úlohami – „já jsem to zvládl!“ Proto bychom měli dávat žákům, kteří si teprve budují svou sebedůvěru v matematice zejména takové úkoly, aby nebyly nad jejich síly, ale aby jejich zvládnutí jim dalo práci a aby se tedy jejich úspěšně vynaložená práce realizovala ve vzrůstu sebedůvěry. Samozřejmě jako úspěchy působí i učitelovy pochvaly a pěkné známky (chválené rodiči). Za situace, kdy na školách na jednu pochvalu připadá deset napomenutí, umožňuje proto dobrý učitel i slabšímu žákovi prožít při vhodné příležitosti pocit úspěchu tím, že je ho za (i relativně nevelký) mimořádný výkon pochválí.

Na druhé straně zažitá zklamání („zase jsem to nezvládl“) sebedůvěru velmi oslabují nebo podlamují a mohou vést až k pochybnostem o inteligenci žáka. Zejména pro introverty, kteří jsou v tomto citlivější, to může být bludný kruh a potřebují pomoci. Odborníci však radí (viz např. [2]): „Nikdy nevycházejte z toho, že inteligence je převážně vrozená. Nedovolte, aby taková představa potlačovala sebevědomí vašich dětí. Nerezignujte.“

Chceme tedy po žácích, aby (při domácích úlohách, při písemkách, atd.) pracovali samostatně. Od žáků však nemůžeme očekávat, že se naučí samostatně pracovat sami od sebe, měl by je to učit někdo, kdo profesně ví, jak na to, tedy jejich učitel matematiky. *Ale naučili jsme je samostatně pracovat?* Měli bychom je to naučit ve škole. Jestliže žáci učivu v podstatě rozumějí a absolvovali ukázkové úlohy a částečné procvičení učiva, může přijít na řadu *nácvik samostatné práce*.

Samostatné práce

Žáci se relativně často dostávají do situace, kdy nevědí, jak dál. Mají subjektivní pocit, že na daný nebo vzniklý problém nestačí sami, že si musejí nechat poradit. Na jedné straně je třeba vytvořit klima, aby se

nebáli požádat o radu, na druhé straně to znamená, že potřebují vyšší myšlenkovou aktivitu, hlubší pochopení látky a tvrdou práci, aby byli při problémech „odolnější“ [3]. Nejlepší příležitostí učit se samostatně pracovat a vyzkoušet si tuto svou schopnost mají žáci v části vyučovací jednotky nazvané *samostatné práce*.

Používají se v průběhu vyučovacích hodin a žáci při nich samostatně písemně řeší různé matematické úlohy, často spojené i se samostatným rozhodováním o dalším postupu. Ověřují si tak, aniž by jim přitom hrozilo špatné hodnocení nebo známka, nakolik už nové a částečně procvičené učivo pochopili a nakolik s ním dovedou samostatně pracovat (zpravidla však ve stylu vzorové úlohy). Jestliže žák neví, jak dál, může se zeptat učitele, ale hlavním cílem žáka není dopočítat konkrétní úlohu, ale uvědomit si, proč se „zasekl“, co nevěděl a co by už příště vědět měl. Samostatné práce vykonávají tedy žáci bez přímé účasti učitele, ale dle jeho zadání a s jeho připraveností pomoci v případě potřeby. Mohou mít formu individuální, skupinovou nebo kolektivní.

Při *individuální* samostatné práci každý žák řeší svůj úkol samostatně. Všichni žáci mohou mít stejný, nebo může být zadáno několik variant, nebo každý žák může řešit jinou úlohu. Takové práce jsou nejvydatnější, ale také nejnáročnější na přípravu a organizaci. Učitel totiž nemůže po zadání práce jen čekat na výsledky, ale musí průběh práce sledovat a kontrolovat. Kontrola průběhu samostatné práce žáků se provádí současně s jejich individuálním vedením. Učitel sleduje práci žáků (obchází třídu), všímá si postupu jejich práce, správnosti, pohotovosti a prováděných zkoušek. Ponechává žákům značnou volnost, ale na druhé straně poradí těm, kteří v některém kroku uvázli. Je tu zároveň příležitost věnovat se více i rozvíjení a prohlubování znalostí talentovaných žáků tím, že dostanou náročnější úkoly a že se od nich bude vyžadovat kvalitnější řešení.

Při *skupinové* samostatné práci se žáci mají naučit ve skupinách společně řešit problémy – prodiskutovat způsob řešení, rozdělit si práci, konfrontovat řešení různých žáků, společně formulovat závěry. Jde tady (nebo může jít) vlastně o *nácvik týmové práce*, jejíž znalost – vzhledem k pozdějšímu vstupu žáků do praktického života, v němž se týmová spolupráce uplatňuje, je rovněž mimořádně důležitá. (Učitel musí ovšem vybrat vhodné úlohy.) Rozhodně však tento druh samostatné práce nesmí probíhat tak, že jeden žák ve skupině úlohu řeší a ostatní jeho řešení opisují. Během práce postupuje učitel jako v předchozím případě a sleduje komunikaci v jednotlivých skupinách.

Při *kolektivní* samostatné práci je pracovním kolektivem celá třída, jednotliví žáci navrhuji způsob řešení, další se k tomu vyjadřují, opravují, zlepšují a všichni pak na problému pracují. Učitel pomáhá organizovat rozpravu a pozorně sleduje její průběh, může dávat i impulzy k dalšímu rozvíjení řešení.

Po skončení práce učitel ještě zkontroluje, kdo nemá práci dokončenu a kdo ano a s jakým výsledkem. Kontrolu výsledků může provádět tak, že

- prohlédne řešení jednotlivých žáků (nejspolehlivější, ale náročné na čas a organizaci),
- vyvolá jednoho nebo více žáků, kteří sdělí svá řešení (postup a výsledek) a ostatní si s tím porovnají svá řešení, učitel pak zjistí, kdo to má jinak a podle situace reaguje,
- provede kontrolu jiným systémem (speciální učebny, speciální pomůcky).

Učitel pak samostatnou práci celkově zhodnotí a může i pochválit – např. když vyhodnotí slabšího žáka, který pracoval mimořádně pečlivě a se zájmem, je takové hodnocení pro žáka zaslouženým povzbuzením. *Samostatné práce však nejsou součástí klasifikačního hodnocení, nýbrž výcviku*, jejím účelem není klasifikace! Nebylo by vhodné klasifikací samostatné práce žáků porušit ovzduší naprosté důvěry k učiteli, které je tu nezbytné, má-li se žák bez obav dotazovat a žádat o radu bez nebezpečí, že za to bude nepříznivě hodnocen.

Pokud učitel ještě samostatné práce žáků neprováděl, musí na ně žáky nejprve zvyknout. První etapou může být kolektivní práce třídy (bez žáka u tabule), jak je uvedeno výše, kdy střídavě vždy některý žák nahlas říká, jak v řešení postupovat dál. Nebo může jít o polosamostatnou práci, kdy učitel řešení na tabuli začne (ve spolupráci se třídou) a žáci je samostatně dokončí.

Pro úplnost dodejme, že jinému účelu slouží i jiné typy samostatných prací, např. výzkumné práce, včetně prací propedeutického charakteru, připravující zavedení nového pojmu. Žáci také mohou ověřovat platnost různých pravidel a vzorců, o hledat vztahy zatím pro ně neznámé nebo konat různé matematické experimentální práce.

Někdy může jít i o docela krátké samostatné práce, učitel se nemusí zříkat ani trocha humoru. Např. autor před lety zadal *při motivaci* pojmu výška trojúhelníku a průsečík výšek v 8. třídě jako kolektivní samostatnou práci úlohu: „Sestrojte libovolný ostroúhlý trojúhelník ABC a dále se

strojte pro každý vrchol kolmici spuštěnou na protější stranu trojúhelníku. Pozorujete něco zvláštního?“ Když žáci končili v sešitech rýsování, učitel pokračoval: „Ty tři kolmice ke stranám se nazývají výšky trojúhelníku. Vidíte, že vám tyto výšky vytvořily uvnitř trojúhelníku ABC takový malý trojúhelníček.“ Žáci souhlasně pokyvovali hlavou a někteří dokonce svůj obrázek upravovali, aby jejich trojúhelníček byl hezčí. „Ale je-li správně rýsováno, žádný trojúhelníček nevznikne, protože všechny tři výšky ve skutečnosti procházejí jedním bodem, společným průsečíkem výšek.“ Odezva byla velmi veselá a živá, ale práce pokračovala: „Teď si sestrojte libovolný tupoúhlý trojúhelník KLM a dále sestrojte pro každý vrchol výšku, tj. kolmici spuštěnou na protější stranu trojúhelníku. Pozorujete něco zvláštního?“ Žáci se usmívali, protože už počítali s tím, že výšky opět půjdou jedním bodem, ale mnozí tento bod nemohli hned najít – ležel vně trojúhelníku. A pak ještě následoval případ trojúhelníku pravoúhlého. Nebo v jiné hodině učitel narýsoval každému žákovi v sešitě kruhový oblouk (s různými poloměry, různých délek a bez vbodnutí kružidla) s úkolem: *Nalezněte střed příslušné kružnice a kružnici dorysujte.*

Zpravidla však bývají zvoleny úlohy, jejichž řešení trvá déle, a kdy učitel má více času sledovat své žáky při práci a podle potřeby poradit.

Uvedme ještě příklad skupinové samostatné práce, která proběhla též v 8. třídě po probrání potřebných partií učiva. Jednalo se o nácvik týmové práce, nešlo však o závod mezi skupinami. Učitel předem připravil výkresy jednoduchých velkých tiskacích písmen s kótovanými rozměry (okraje písmen byly složeny jen z úseček a oblouků kružnice) a několik krátkých nápisů (složených zhruba z 10 písmen). Při samostatné práci byly výkresy umístěny na tabuli (nebo mohou být reprodukovány a předány jednotlivým skupinám) a každá skupina dostala zadán jeden nápis. Úkolem skupiny bylo tento nápis ve vhodném měřítku narýsovat a dále zjistit jeho hmotnost pro případ, že by písmena byla zhotovena z plechu zadané tloušťky a ze zadaného materiálu. Při výpočtech si žáci ve skupinách rozdělili písmena, každý řešil svá (případně za vzájemné pomoci nebo poradil učitel), nakonec provedli společnou kontrolu a kompletaci výsledků. Každý žák nesl svou část odpovědnosti za úspěch celé skupiny.

Domácí úkoly

Pokračujme v našich úvahách o samostatné práci žáků, tentokrát v domácím prostředí. V systému školní výuky má pravidelné zadávání domácích úkolů své nezastupitelné místo a proto je třeba věnovat jim potřebnou

pozornost, aby jejich vypracování přinášelo požadovaný vzdělávací efekt. Pojednejme o nich proto komplexněji.

Zadávaají se domácí úkoly tří druhů:

- Úkol, kterým se má dokončit předchozí výuka (dopočítat rozpracovanou úlohu, narysovat obrázek, přepsat si z učebnice věty nebo vzorce, apod.). Nemělo by však být pravidlem, že učitel nestíhá probrat v hodině naplánovanou látku a že zbytek vždy zadá za domácí úlohu.
- Úlohy, kterými se procvičuje probrané učivo nebo které s učivem jinak souvisejí. Toto je nejčastější typ domácích úkolů a lze jej považovat i za trénink na písemky.
- Úkoly, kterými se připravuje příští výuka (něco zjistit, vypsát, vypracovat zvláštní případ budoucího učiva apod.).

Pro práci s domácími úkoly v prostředí domova je vhodné dát žákům rady i různá technická doporučení, jako např.:

- Je vhodné zpracovat domácí úkol ještě v den zadání, dokud má žák všechno ještě v čerstvé paměti a den před výukou ho ještě projít a zkontrolovat.
- Pro práci na úkolu si vytvořit časové podmínky; nepokoušet se na úkolu pracovat v časovém stresu, neodkládat práci až na pozdní večer.
- Vytvořit si podmínky pohody v práci; cítit se v dobré fyzické i duševní kondici, pracovat sám (sama) v klidném prostředí, ne s hudbou odvádějící pozornost, ne při sledování televize apod.
- Úkol zpracovat co nejpečlivěji a vypracovaný úkol si znovu projít a zkontrolovat.

Uvedme některé předpoklady pro efektivitu cesty k dosažení cílů domácích úkolů (promýšlení problémů, procvičování, výcvik samostatné práce, zopakování učiva, početní a grafická praxe):

- a) Domácí úkoly by měly být zadávány pravidelně.
- b) Domácí úkoly je třeba zadávat včas (ne až při zazvonění), aby bylo dost času a klidu pro zadání a případná vysvětlení či pokyny i pro jejich zaznamenání.
- c) Rozsah úkolu by měl být přiměřený (jeho vypracování by žákům středních škol nemělo trvat více než 30 minut).
- d) Uložené úkoly by měly být středně obtížné a rozmanitého druhu (tj. ne vždy jen na formální úpravy a výpočty).

- e) Zadání by mělo být zcela jasné, aby žák neměl doma pochybnosti, co má vlastně dělat. V případě potřeby by učitel měl při zadávání domácího úkolu dát žákům srozumitelné pokyny, jak si mají počínat.
- f) Vypracovaný domácí úkol by měl obsahovat text zadání (ne jen odkaz na zadání), aby při pozdějším opakování látky bylo žákovi zřejmé, co vlastně řešil.
- g) Domácí úkoly je třeba kontrolovat, zda jsou vypracovány, zda jsou správně a zda byly zpracovány samostatně. Při větším počtu závad je třeba správný postup vysvětlit žákům dodatečně a případně zadat jiný podobný úkol.
- h) Domácí úkoly by měly přispět k tomu, aby se žáci naučili pracovat s učebnicí.
- i) Občas mohou být zadávány i „dobrovolné domácí úkoly“, jejichž řešení se očekává – ale nevynucuje – od žáků, kteří chtějí z matematiky známku 1, resp. 2.

Originální řešení vždy oceníme, případně na místě vyhodnotíme, v čem je lepší než způsob probraný ve škole a v čem jsou jeho nedostatky (např. že postihuje jen zvláštní případ). K hledání jiných řešení můžeme žáky i vyzvat: „Řešili (počítali) jsme to takto . . . , zkuste to i jinak!“

U domácích úkolů by měl učitel vyžadovat lepší formální úroveň než u školních písemek. Podcenění tohoto faktoru vede k tomu, že žáci si zvyknou provádět své zápisy nedbale a pak v nich ztrácejí orientaci, což vede k chybám a i k nezvládnutí řešení. Na druhé straně se však nesmí učitel spokojit jen s pěkně zapsaným domácím úkolem, ale musí přehlédnout i věcnou správnost. Někteří učitelé se omezují jen na to, že – třeba v průběhu vyučovací hodiny – vždy jenom zběžně ovidují výsledky, a tak se může jejich vidovací značka objevit i u části s věcnými chybami. Žáci pak reagují logicky: stačí to napsat pěkně, o správnost už tak nejde. Ani výměna sešitů mezi žáky a jejich vzájemná kontrola není dostatečná. Čas od času si musí učitel sešity vybrat a provést jejich důkladnější kontrolu, včetně domácích úkolů. Je vhodné, když kvalitu vypracovaných domácích úkolů přitom slovně ohodnotí.

Při této příležitosti se zmíníme i o školních sešitech. Učitel by měl žákům poradit a radit, jak si je vést a jak s nimi pracovat, jak se s jejich pomocí učit. Klíčem k úspěchu v matematice je soustavná práce a sešit by tedy měl být jedním z žákových pomocníků. Z toho plyne nutnost správnosti a úplnosti zápisů, jejich přehlednosti, grafické úrovně (např. rámečky, podtržení,

barevné vyznačení apod. – to vše může být součástí samostatné domácí přípravy). Žáci se tak mohou učit poznávat a rozlišovat, co je podstatné a co ne, což je velmi důležitá schopnost i pro život.

Někteří učitelé ohodnocují úpravu sešitů jednou známkou za čtvrtletí. Domácí úkoly však nelze hodnotit jako písemky, nelze je klasifikovat, a to především z toho důvodu, že nelze rozumně ověřit, nakolik byly zpracovávány samostatně – jak už jsme připomněli, jsou tu spolužáci, starší sourozenci, rodiče – takže *ze správně napsaného* domácího úkolu nelze činit žádné hodnověrné závěry.

Učitel by měl věnovat zvýšenou pozornost domácím úkolům slabších žáků a žáků po delší absenci a pomocí kontrolních dotazů zjistit, zda žáci řešili zadaný úkol správně a samostatně. Některí učitelé volí občas tuto možnost kontroly samostatnosti – domácí úkol na počátku hodiny nekontrolují, ale před koncem hodiny napíší písemnou prověrku na úlohy podobné, jako byly v minulém domácím úkolu.

Žáci by se měli vždy dozvědět, jaký byl u domácího úkolu správný postup a výsledek. To je také zpravidla obsahem části hodiny „Kontrola domácích úkolů“. V případě větší skupiny žáků, kteří některé úlohy řešili špatně nebo se omlouvají, že si nevěděli rady, je třeba bez ohledu na naplánovaný obsah vyučovací hodiny dotyčné úlohy znovu vysvětlit a vyřešit.

Zkoušení

O tom, jak dovedou jeho žáci samostatně pracovat, se učitel přesvědčuje pozorováním žáků a též formou písemného a ústního zkoušení

Když učitel probere a procvičí nějaký tematický celek, musí se přesvědčit, zda jeho žáci učivo zvládli a nakolik dovedou samostatně řešit úlohy vztahující se k tomuto tematickému celku. To lze nejlépe provést tak, že se napíše tematická písemka, kterou mají žáci vypracovat absolutně samostatně. Pro zajištění samostatnosti práce a klidu při práci je vhodné posadit žáky do lavic po jednom. To však často není možné a tak se písemky zadávají ve více verzích, zpravidla ve dvou, A a B. Jestliže totiž dva žáci ve stejné lavici řeší tutéž úlohu, tak je tato okolnost v podstatě ruší v práci, neboť je to láká k zvědavému nakukování k sousedovi – jak je už daleko? postupoval jako já? má stejný výsledek? Toto jsou ještě nevinné otázky. V našich končinách však mezi žáky ještě nevzniklo ani čestné ani konkurenční prostředí, takže někteří žáci mají snahu načerpat inspiraci pro svou další práci ve svém okolí a považují i přímé opisování při písemkách

a posílání taháků s řešením za kladný výraz solidarity. Je tedy na učiteli, aby podmínky pro samostatnost práce žáků zajistil.

Ústní zkoušení nesmíme redukovat jen na suché zjišťování, zda vyvolaný žák dovede řešit zadaný úkol *samostatně*, učitel by tu měl fungovat trochu jako od počítačů známý systém HELP. Tedy žáku, *kteřý to potřebuje*, by měl při zkoušení pomoci, popostrčit ho, třeba mu i něco (ve spolupráci se třídou) vysvětlit, návodnými otázkami a vhodnými pomocnými příklady ho převést přes úskalí řešené úlohy a přitom vnímat všechny rozměry jeho výkonu. Pak samozřejmě vyhodnotit a spravedlivě ocenit, jak žák přispěl k řešení úlohy. Za zcela nevhodný lze považovat k.o. systém pro rychlé získávání známek. Jako příklad uveďme postup některých učitelů: vyvolají k tabuli třeba 4 žáky najednou, každý dostane zadaný příklad a počítá jej na tabuli (proč ne? ale jde tím o druh písemky). Po několika minutách učitel práci zastaví, vyvolaní žáci dostanou známky podle stavu výpočtů a ti, co v řešení z nějakých důvodů brzo uvázli (potřebovali popostrčit) mají pětky. A to vše tento učitel nazve ústní zkoušení.

Kontrolní písemky na porozumění (open – book exams)

Podívejme se nyní na samostatnost z jiné strany; tato část se týká nejen matematiky. Mnozí učitelé jsou toho názoru, že ideální žák umí všechno učivo z paměti. Má sice také učebnici a sešit, ale tyto pomůcky používá často jen proto, aby s jejich pomocí z paměti zvládal definice matematických pojmů a různé věty, vzorečky a pravidla.

Rozvíjení paměti (všech druhů paměti) žáků je samozřejmě jeden z významných úkolů školy. Avšak zbožnění vnitřní paměti a naprosté potlačení používání paměti vnějších (řečeno počítačovou mluvou) při ústním, ale zejména písemném zkoušení žáků nemá oporu v praxi, ani dokonce u dobrých odborníků. Každý odborník v nějaké profesi musí sice samozřejmě znát z paměti hodně o své profesi, ale na něco má záznamy, příručky, tabulky, počítačové programy ad. Například tlumočník musí mít samozřejmě potřebnou slovní zásobu pohotově ve své paměti, ale jen z oboru tlumočení. Překladatel též musí znát jazyk dokonale, ale stejně nahlíží do slovníků a příruček, chce-li, aby výsledek jeho práce měl vysokou kvalitu. V praxi se při práci běžně používají různé pomůcky tištěné (slovníky, příručky, tabulky, výkresy, schémata), ve formě počítačových výstupů i ve formě písemných či grafických pomůcek a záznamů, které si vyhotoví sami pracovníci. Tyto písemnosti tedy slouží přímo při práci a nikoli jako prostředek k učení se z paměti. Záleží ovšem na oboru a na postavení pracovníka.

Jestliže se zamýšlíme nad vztahem školy a praxe a chceme posílit tento vztah při vzdělávání žáků, zapomínáme často na *metody práce*, které se podstatně uplatňují v praxi, a že by se s těmito metodami mohli žáci setkávat už ve školních lavicích.

Svěží obměnou tradičních písemek jsou *kontrolní písemky na porozumění* (*open – book exams*). Při nich se nekontroluje, co a kolik si toho žáci pamatují, ale jak probranému učivu porozuměli a dovedou ho aplikovat při řešení úloh. Podstata zvláštního postavení těchto písemek spočívá v tom, že žáci při nich mohou používat učebnici i (nebo) své poznámky a je to jen jiná verze jejich samostatné práce.

Tento postup vlastně *nejlépe odpovídá situaci v praxi*, kde velmi často není nutno, aby si člověk všechno pamatoval; znovu zopakujeme – něco musí znát a umět z paměti, ale někdy je třeba si udělat poznámky, ověřit si v literatuře postupy a vzorce nebo zjistit chybějící údaje. Musí tedy vědět, kde potřebnou informaci nalezne a jak si s ní má počínat.

Tyto písemky tak současně vyvíjejí tlak na žáky, aby si psali své poznámky přehledně, srozumitelně a na dobré grafické úrovni, a aby se naučili orientovat v učebnici. Přitom se zároveň učí, protože si mohou uvědomit souvislosti, které jim při „normálním“ učení unikaly. Kdo všechno zná a umí bezpečně i z paměti, tím lépe pro něj.

Nové situaci musejí být přizpůsobeny i zadané úlohy. Je třeba samozřejmě, že nemá smysl zadávat stejné úlohy, jako již byly řešeny ve škole či doma nebo úlohy velmi podobné. Je vhodné volit úlohy kombinované, ale spíše do šířky než do hloubky. Např. v analytické geometrii jsou dány tři vrcholy trojúhelníku v rovině a mají se zjistit délky jeho stran, těžnic a výšek, střed a poloměr kružnice opsané. Zpravidla stačí obvyklé dvě verze A, B, i když pro klid při práci může být (i v jiných případech) účelné, aby sousedé zleva doprava i zpředu dozadu měli různá zadání, na což stačí 4 verze.

Jinou alternativou, možná i lépe odpovídající situaci v praxi, je, že si žáci např. během týdne před písemkou mohou napsat *písemnou pomůcku* („tahák“) a při písemce mohou tuto pomůcku používat (ale učebnici a sešit už pak ne). Přitom musejí být dána *pravidla* pro zajištění efektivnosti tohoto způsobu psaní písemek, zejména je stanoven rozsah a forma pomůcky, např. 1 stránka formátu A4 či A5 (podle rozsahu opakování) psaná rukou autorovou a autorem podepsaná. Při přípravě pomůcky si žák látku projde, utřídí, uvědomí si to podstatné, zjistí, zapamatování kterých údajů mu dělá potíže a uklidní se. Zkušenost říká, že matematicky zdatnější žáci

si píší své písemné pomůcky jen velmi stručné nebo třeba i vůbec žádné, zatímco slabší žáci je píší obširnější, takže si stanovené učivo vydatněji zopakují.

Přípravou písemných pomůcek se žáci učí „pro život“ připravovat si (a používat) písemné poznámky jako pracovní pomůcky pro vyhotovování písemných zpráv, ústních zpráv a odborných sdělení a zejména též pro použití ve vlastní odborné práci. Žáci se však ve škole s touto pro praxi velmi užitečnou činností setkávají jen málo (výjimkou je ojedinělá příprava referátů) a vlastně jen ilegálně při přípravě přísně zakázaných taháků. Nicméně umění připravit si inteligentní „tahák“, tedy vhodnou písemnou pomůcku, je pro praxi dosti důležité a je ironií, že i zakázaný tahák má velký vzdělávací a – promiňte – i výchovný význam (není-li ovšem při písemce použit).

Způsob hodnocení písemek na porozumění se pak samozřejmě liší od způsobu hodnocení „normálních“ písemek. Např. za znalost vzorce nebo pravidla nezíská žák žádný kladný bod, ale kladné body získá až za to, že tento vzorec nebo pravidlo umí správně použít a dobrat se výsledku.

O tomto kladném působení „taháků“ se autor přesvědčil i v prostředí vysokoškolského studia při mnohaleté výuce matematické analýzy v 1. ročníku na UP v Olomouci, ale i na UTB ve Zlíně při písemkách, které se v principu nijak nelišily od písemek na střední škole. Zkušenosti jsou jen dobré. Kromě toho, že se studenti při přípravě pomůcek učili všechno to, co je uvedeno výše, odpadly automaticky i pokusy o podvod (tajné taháky), které dříve, bohužel, nebyly výjimečné, a zlepšily se i výkony, protože studenti se nemuseli tak soustřeďovat na mechanické zvládání textů a vzorců, ale tím více se museli zaměřit na porozumění, logiku věci a užití (i když díky tomu pak lépe zvládali i slovní formulace).

Dokonce i pro ústní dílčí zkoušku v 1. ročníku byla vyzkoušena a zavedena možnost použití vlastnoručně vypracované písemné pomůcky na jednu stranu formátu A4, na níž si libovolným písmem mohl každý student napsat cokoli. Při zkoušce pak při své písemné přípravě po vytažení otázky mohl zkoušený svou písemnou pomůcku použít, při vlastní zkoušce už pak ne. Jak již bylo uvedeno, zkouška pak nabyla trochu jiného charakteru a proběhla na vyšší odborné úrovni: např. správná formulace připravené definice nebo věty ještě „nebodovaly“, ale kladné hodnocení získal student až prokázal, že řečenému dobře rozumí, dovede to vysvětlit, uvést souvislosti, příklad nebo protipříklad, větu s porozuměním dokázat. Znalost *stěžejních pojmů a vztahů* se ovšem vyžadovala „on line“.

Kontrolní písemky na porozumění (open-book exams) oproti „normálním“ písemkám jsou významnou pomocí také na základních a středních školách, a to nejen pro slabší žáky, ale pro všechny, neboť se tak při přípravě na písemku mohou více věnovat matematice (porozumění a aplikacím) na úkor mechanického „šprtání“ – i když samozřejmě jsou věci, jako třeba příklad na užití Pythagorovy věty nebo řešení kvadratické rovnice, které žák při vyvolání musí zvládnout bez písemné pomůcky. Význam těchto písemek na porozumění není zatím zcela doceněn, ale jejich občasné konání lze plně doporučit.

L i t e r a t u r a

- [1] *Trávníček, S.*: Oprava písemek z matematiky. Skripta, UP Olomouc, 2006.
- [2] *Lauster, P.*: Selbstbewusstsein (Svědění: Jak získat sebejistotu a neztratit cit). Knižní klub, Praha 1993.
- [3] *Mareš, J.*: Žák a jeho vyhledávání pomoci v hodinách matematiky. Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Pdf UK, Praha 2004.
- [4] *Stehlíková, N.*: Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Pdf UK, Praha 2004.

Trinomická veta

KLEMENT HRKOTA st. – KLEMENT HRKOTA ml.

Piaristické gymnázium, Trenčín – Trenčianská Univerzita AD, Trenčín, SLOVENSKO

Binomické koeficienty $\binom{n}{k}$, ktoré vystupujú v binomickej vete

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

vypočítame zo známeho vzťahu

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pre dôkaz binomickej vety matematickou indukciou má rozhodujúci význam rovnosť

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Toto všetko je možné jednoducho dokázať a pre malé n tvoriť ľahko a rýchlo Pascalov trojuholník binomických koeficientov súčtom $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ umiestňovaným do nasledujúceho riadku Pascalovho trojuholníka.

Trinomické koeficienty $\binom{n}{k,l}$ vystupujúce v trinomickej vete

$$(a + b + c)^n = \sum_{k+l=0}^n \binom{n}{k,l} a^{n-k-l} b^k c^l \quad (1)$$

vypočítame zo vzťahu

$$\binom{n}{k,l} = \frac{n!}{k! l! (n-k-l)!}.$$

Pre dôkaz tejto vety matematickou indukciou má rozhodujúci význam rovnosť

$$\binom{n}{k,l} + \binom{n}{k-1,l} + \binom{n}{k,l-1} = \binom{n+1}{k,l}, \quad (2)$$

čo taktiež možno ľahko dokázať.

Dôkaz trinomickej vety užitím princípu matematickej indukcie vzhľadom na n :

- (i) Pre $n = 0$ (aj pre $n = 1$) veta evidentne platí.
- (ii) Nech platí indukčný predpoklad (1). Počítajme

$$\begin{aligned} (a + b + c)^{n+1} &= (a + b + c)^n \cdot (a + b + c) = \\ &= \left[\sum_{k+l=0}^n \binom{n}{k,l} a^{n-k-l} b^k c^l \right] \cdot (a + b + c) = \\ &= \left[\sum_{k+l=0}^n \binom{n}{k,l} a^{n-k-l+1} b^k c^l \right] + \left[\sum_{k+l=0}^n \binom{n}{k,l} a^{n-k-l} b^{k+1} c^l \right] + \\ &+ \left[\sum_{k+l=0}^n \binom{n}{k,l} a^{n-k-l} b^k c^{l+1} \right] = \sum_{k+l=0}^n \binom{n}{k,l} a^{n-k-l+1} b^k c^l + \\ &+ \sum_{k+l=1}^{n+1} \binom{n}{k-1,l} a^{n-k-l+1} b^k c^l + \sum_{k+l=1}^{n+1} \binom{n}{k,l-1} a^{n-k-l+1} b^k c^l \end{aligned}$$

Z prvej sumy vyčleníme prvý člen, z ďalších dvoch súm vyčleníme posledných $n + 2$ členov. Dostaneme tak:

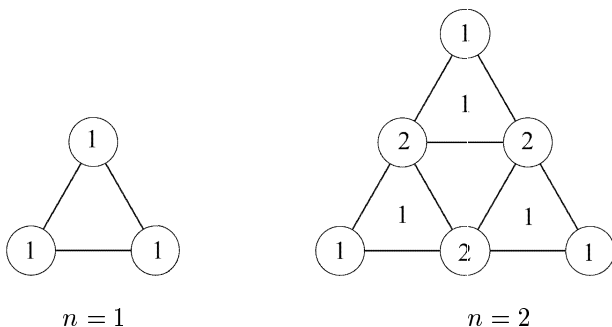
$$a^{n+1} + \left[\sum_{k+l=1}^n \binom{n}{k, l} + \sum_{k+l=1}^n \binom{n}{k-1, l} + \sum_{k+l=n+1} \binom{n}{k-1, l} + \right. \\ \left. + \sum_{k+l=1}^n \binom{n}{k, l-1} + \sum_{k+l=n+1} \binom{n}{k, l-1} \right] a^{n-k-l+1} b^k c^l$$

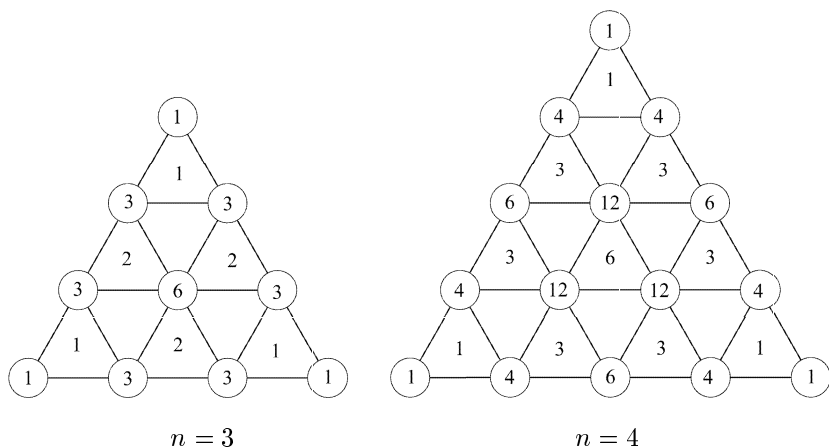
Pre prvú, druhú a štvrtú sumu v poslednom výraze použijeme rovnosť (2) a pre tretiu a piatu sumu ľahko overíme, že ak $k + l = n + 1$, potom súčet trinomických koeficientov v nich vystupujúcich je rovnaký ako v (2), takže dostaneme:

$$a^{n+1} = \left[\sum_{k+l=1}^n \binom{n+1}{k, l} + \sum_{k+l=n+1} \binom{n+1}{k, l} \right] a^{n+1-k-l} b^k c^l = \\ = \sum_{k+l=0}^{n+1} \binom{n+1}{k, l} a^{n+1-k-l} b^k c^l,$$

čo sme mali dokázať.

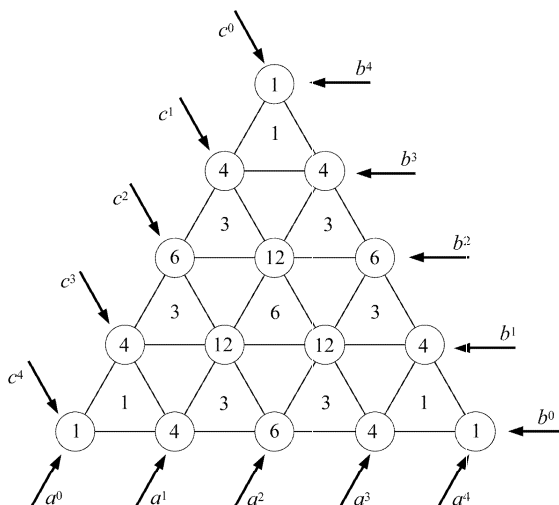
V ďalšom ukážeme ako tvoriť trinomické koeficienty pre „neveľké“ n z koeficientov pre mocninu $n - 1$. Trinomické koeficienty zoskupujeme do trojuholníkov podľa nasledujúcej schémy:





Pri pohľade na trojuholníky sa ukáže zjavná súvislosť. Čísla v krúžkoch každého trojuholníka sa ocitnú v príslušných trojuholníčkoch nasledujúceho trojuholníka, ktorý má po stranách binomické koeficienty a čísla vo vnútorných krúžkoch sú súčtom patričných troch koeficientov (predchádzajúceho trojuholníka), ktoré daný krúžok obklopujú.

Nasledujúci obrázok ukazuje priradenie mocnín členov a , b , c k trinomickému koeficientom.



K danému koeficientu přiřadíme tie mocniny, ktorých šipky ukazujú na jeho pozíciu. (Například: $12abc^2$.)

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení zašlete nejpozději do 10. 5. 2008 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 147

Řešte kvadratickou rovnici

$$x^2 - (2p + 3q)x + pq^2 = 0$$

s neznámou x a s celočíselnými parametry p ($p \neq 0$) a q , jejíž kořeny jsou tvaru $\frac{c}{p}$ a c , kde c je celé číslo. Zjistěte všechny možné číselné hodnoty kořenů.

Stanislav Trávníček

Úloha 148

Označme K , L , M a N středy stran AB , BC , CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že z úseček KL , KM a KN lze sestavit trojúhelník a vyjádřete jeho obsah pomocí obsahu čtyřúhelníku $ABCD$.

Jaroslav Švrček