

MATEMATIKA

Užití Jensenovy nerovnosti

MILOŠ PŘINOSIL

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

S algebraickými nerovnostmi se setkáváme ve většině matematických teorií, ale i v mnoha oborech mimo matematiku. Jednou z metod jejich dokazování je využití tzv. Jensenovy nerovnosti^{*)}. Ta je v teorii algebraických nerovností jednou z nejvýznamnějších. Většinu klasických nerovností z ní totiž můžeme odvodit a zároveň s její pomocí elegantně vyřešit celou řadu algebraických i geometrických úloh.

Věta 1 (Jensenova nerovnost)

Nechť f je spojitá funkce reálné proměnné na intervalu I . Je-li funkce f konvexní na I , pak pro libovolnou konvexní kombinaci $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ jakýchkoliv čísel $x_1, \dots, x_n \in I$ platí nerovnost

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n). \quad (1)$$

K uvedené větě poznamenejme, že konvexní kombinací čísel $x_1, \dots, x_n$ rozumíme každé reálné číslo $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, kde koeficienty λ_i splňují tyto podmínky

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{a} \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Jak vidíme, hlavním předpokladem pro využití Jensenovy nerovnosti je konvexnost funkce f . Je to každá funkce s vlastností: Každý vnitřní bod libovolné tětiny jejího grafu (uvažované jako úsečka) leží „nad“ grafem této funkce. Funkce s opačnou vlastností se nazývá konkávní a platí: Je-li

^{*)} Johan Ludvig William Valdemar Jensen (1859-1925), dánský matematik.

funkce f konvexní na intervalu I , pak funkce $(-f)$ je konkávní na intervalu I a naopak. Pokud má funkce f na daném intervalu I druhou derivaci, lze o konkávnosti (konvexnosti) rozhodnout. Pro funkce mající druhou derivaci totiž platí, že konvexní (konkávní) na daném intervalu I jsou právě ty funkce f , které $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pro každé $x \in I$.

Nejdříve ukážeme, jak lze z Jensenovy nerovnosti odvodit některé klasické nerovnosti patřící k základům celé teorie algebraických nerovností.

Věta 2 (AG-nerovnost)

Pro libovolná nezáporná reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnost mezi jejich aritmetickým a geometrickým průměrem

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}. \quad (2)$$

Důkaz. Pokud je x_i nulové pro některé $i = 1, \dots, n$, je nerovnost (2) zřejmá, neboť její pravá strana je rovna nule. Předpokládejme tedy, že $x_i > 0$, pro $i = 1, \dots, n$. Funkce $f(x) = \ln x$ je konkávní na $\mathbb{R}^+$, neboť platí $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pro každé $x > 0$. Proto z Jensenovy nerovnosti dostaneme volbou $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) &\geq \frac{1}{n} \ln x_1 + \frac{1}{n} \ln x_2 + \dots + \frac{1}{n} \ln x_n, \\ \ln \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) &\geq \ln \left(x_1^{\frac{1}{n}} \cdot x_2^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot x_n^{\frac{1}{n}} \right), \\ \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, \end{aligned}$$

což je nerovnost (2).

Věta 3 (Youngova nerovnost)

Pro libovolnou dvojici čísel $x > 0$, $y > 0$ a pro libovolná reálná čísla $p > 0$, $q > 0$, pro něž je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, platí

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \quad (3)$$

Důkaz. Nerovnost (3) plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(u) = \ln u$ (která je na $\mathbb{R}^+$ konkávní, neboť $f''(u) = -\frac{1}{u^2} < 0$ pro každé $u > 0$):

$$\ln(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \geq \lambda_1 \ln u_1 + \lambda_2 \ln u_2.$$

Dosadíme-li do této nerovnosti $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$ a $u_1 = x^p$, $u_2 = y^q$, pak nerovnost (3) dostaneme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\ln \left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \right) &\geq \frac{1}{p} \ln x^p + \frac{1}{q} \ln y^q, \\ \ln \left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \right) &\geq \ln x + \ln y, \\ \ln \left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \right) &\geq \ln (xy), \\ \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} &\geq xy.\end{aligned}$$

Věta 4 (Bernoulliho nerovnost)

Pro každé reálné číslo $x > -1$ a libovolné kladné reálné číslo $p \neq 1$ platí

$$(1+x)^p \geq 1+px \quad (\text{pro } p > 1), \quad (4)$$

$$(1+x)^p \leq 1+px \quad (\text{pro } 0 < p < 1). \quad (5)$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že $p > 1$ a dokážeme (4). Pokud bude v nerovnosti (4) platit $1+px \leq 0$, bude tato nerovnost splněna triviálně. Nechť je tedy pravá strana nerovnosti (4) kladná. Pak po logaritmování dostáváme ekvivalentní nerovnost

$$p \ln(1+x) \geq \ln(1+px).$$

Tato nerovnost však plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \ln x$, konkávní na $\mathbb{R}^+$. S ohledem na $p > 1$ jsou obě čísla $\lambda_1 = \frac{1}{p}$ a $\lambda_2 = 1 - \frac{1}{p}$ kladná a $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, takže můžeme psát

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} \ln(1+px) &= \frac{1}{p} \ln(1+px) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \ln 1 \leq \\ &\leq \ln \left(\frac{1}{p} (1+px) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot 1 \right) = \ln(1+x).\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &\geq \frac{1}{p} \ln(1+px), \\ p \ln(1+x) &\geq \ln(1+px), \\ (1+x)^p &\geq 1+px.\end{aligned}$$

V případě $0 < p < 1$ je důkaz nerovnosti (5) obdobný. Využijeme opět Jensenovu nerovnost, tentokrát pro konvexní kombinaci s koeficienty $\lambda_1 = p$ a $\lambda_2 = 1 - p$:

$$\begin{aligned}p \ln(1+x) &= p \ln(1+x) + (1-p) \ln 1 \leq \\ &\leq \ln(p(1+x) + (1-p) \cdot 1) = \ln(1+px).\end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned}p \ln(1+x) &\leq \ln(1+px), \\ (1+x)^p &\leq 1+px.\end{aligned}$$

Věta 5 (Nerovnost mezi váženým mocninným a váženým geometrickým průměrem)

Pro libovolnou n -tici čísel $x_1, \dots, x_n > 0$, reálné koeficienty $\lambda_i > 0$, pro něž platí $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, a pro libovolné reálné číslo $p > 0$ platí

$$(\lambda_1 x_1^p + \dots + \lambda_n x_n^p)^{\frac{1}{p}} \geq x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}. \quad (6)$$

Důkaz. Nerovnost (6) logaritmuje a postupně upravíme ekvivalentním způsobem

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} \ln(\lambda_1 x_1^p + \dots + \lambda_n x_n^p) &\geq \ln(x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}), \\ \ln(\lambda_1 x_1^p + \dots + \lambda_n x_n^p) &\geq p(\ln x_1^{\lambda_1} + \dots + \ln x_n^{\lambda_n}), \\ \ln(\lambda_1 x_1^p + \dots + \lambda_n x_n^p) &\geq \lambda_1 \ln x_1^p + \dots + \lambda_n \ln x_n^p,\end{aligned}$$

Poslední nerovnost však plyne z Jensenovy nerovnosti pro funkci $f(x) = \ln x^p$, která je konkávní na $\mathbb{R}^+$, neboť $f''(x) = -\frac{p}{x^2} < 0$ pro všechna $x > 0$.

Z předchozích důkazů je patrné, že Jensenova nerovnost je v teorii algebraických nerovností velmi silným nástrojem. Nyní si ukažme její význam při řešení konkrétních úloh.

Příklad 1

Ukažte, že pro každé reálné číslo $x > 1$ platí nerovnost

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Řešení:

Důkaz této nerovnosti lze snadno provést algebraickými úpravami. My však ověříme její platnost pomocí Jensenovy nerovnosti. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{x}$, konvexní na intervalu $(0; \infty)$, neboť $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ pro každé $x > 0$, má Jensenova nerovnost tvar

$$\frac{\lambda_1}{x_1} + \frac{\lambda_2}{x_2} + \frac{\lambda_3}{x_3} \geq \frac{1}{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}.$$

Odtud pro čísla $x_1 = x - 1$, $x_2 = x$, $x_3 = x + 1$, která jsou kladná a navzájem různá pro každé $x > 1$, a koeficienty $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ dokazovanou nerovnost již snadno získáme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) &\geq \frac{1}{\frac{1}{3}(x-1+x+x+1)}, \\ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) &\geq \frac{1}{x}, \\ \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} &\geq \frac{3}{x}. \end{aligned}$$

Příklad 2

Ukažte, že pro libovolná reálná čísla $a, b \in \langle -1; 1 \rangle$ platí

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{4-(a+b)^2}.$$

Řešení:

Funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je na intervalu $\langle -1; 1 \rangle$ konkávní, což plyne z tvaru jejího grafu, kterým je polokružnice. Z Jensenovy nerovnosti tedy plyne

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1-a^2}}{2} + \frac{\sqrt{1-b^2}}{2} &\leq \sqrt{1 - \frac{(a+b)^2}{4}}, \\ \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} &\leq 2\sqrt{\frac{4-(a+b)^2}{4}}, \\ \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} &\leq \sqrt{4-(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Příklad 3

Dokažte, že pro kladná reálná čísla a, b , pro něž $a + b = 1$, platí

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Řešení:

Daná nerovnost plyne z Jensenovy nerovnosti aplikované pro funkci $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$. Ta je na intervalu $(0; \infty)$ konvexní, neboť $f''(x) = 2\left(1 + \frac{3}{x^4}\right) > 0$ pro každé $x > 0$. Platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 &\geq \left(\frac{a+b}{2} + \frac{2}{a+b}\right)^2, \\ \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 &\geq 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{1}\right)^2 = \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Příklad 4

Ukažte, že pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z , pro něž $x + y + z = 1$, platí nerovnost

$$64 \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

Řešení:

Uvedený vztah plyne z Jensenovy nerovnosti aplikované na funkci

$$f(t) = \ln \left(1 + \frac{1}{t}\right) = \ln(1+t) - \ln(t),$$

která je na intervalu $(0; \infty)$ konvexní, což je zřejmé z výpočtu její druhé derivace:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{1+t} - \frac{1}{t}, \\ f''(t) &= -\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{t^2} = \frac{2t+1}{t^2(1+t)^2} > 0. \end{aligned}$$

Jensenovu nerovnost pro funkci f tedy můžeme zapsat takto

$$\begin{aligned} & \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3} \right) \leq \\ & \leq \lambda_1 \ln \left(1 + \frac{1}{t_1} \right) + \lambda_2 \ln \left(1 + \frac{1}{t_2} \right) + \lambda_3 \ln \left(1 + \frac{1}{t_3} \right). \end{aligned}$$

Dosadíme-li za $t_1 = x > 0$, $t_2 = y > 0$, $t_3 = z > 0$ a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$, dostaneme s ohledem na předpoklad $x + y + z = 1$ postupnými úpravami

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{3}(x+y+z)} \right) & \leq \frac{1}{3} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{3} \ln \left(1 + \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{3} \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right), \\ \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} \right) & \leq \frac{1}{3} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{y} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{z} \right) \right], \\ 3 \ln 4 & \leq \ln \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(1 + \frac{1}{y} \right) \left(1 + \frac{1}{z} \right) \right], \\ 64 & \leq \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(1 + \frac{1}{y} \right) \left(1 + \frac{1}{z} \right), \end{aligned}$$

což je dokazovaná nerovnost.

Příklad 5

Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí

$$(1+n) \cos \frac{\pi}{n+1} - n \cos \frac{\pi}{n} \geq 1.$$

Řešení:

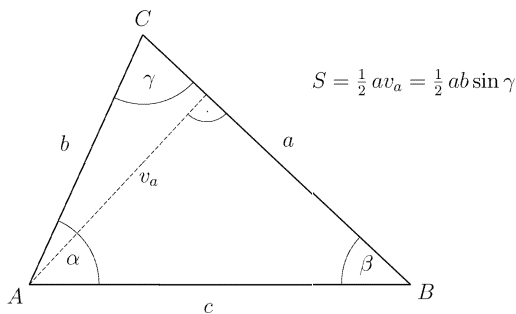
Funkce $f(x) = \cos x$ je na intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ konkávní, což je zřejmé ze známého průběhu jejího grafu. Pro hodnoty $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{n}$ a $\lambda_1 = \frac{1}{n+1}$, $\lambda_2 = \frac{n}{n+1}$ tedy z Jensenovy nerovnosti pro funkci f plyne

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{1}{n+1} \cdot 0 + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{n} \right) & \geq \frac{1}{n+1} \cos 0 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi}{n}, \\ \cos \left(\frac{\pi}{n+1} \right) & \geq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi}{n}, \\ (n+1) \cos \left(\frac{\pi}{n+1} \right) & \geq 1 + n \cos \frac{\pi}{n}, \\ (1+n) \cos \frac{\pi}{n+1} - n \cos \frac{\pi}{n} & \geq 1. \end{aligned}$$

Příklad 6

Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC se stranami délek a , b , c a obsahem S platí

$$ab + ac + bc \geq 4\sqrt{3} S.$$



Obr. 1

Řešení:

Jak je patrné z obr. 1, obsah libovolného trojúhelníka lze vyjádřit pomocí dvou stran a úhlu, který tyto strany svírají. Platí tedy

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

Odtud plynou rovnosti

$$ab = \frac{2S}{\sin \gamma}, \quad ac = \frac{2S}{\sin \beta}, \quad bc = \frac{2S}{\sin \alpha}.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$ab + ac + bc = 2S \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \right). \quad (7)$$

Nyní uplatníme Jensenovu nerovnost, a to pro funkci $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Ta je na intervalu $(0; \pi)$ konvexní, jak dokazuje kladná hodnota její druhé derivace

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2},$$

$$f''(x) = \frac{1}{\sin x} + 2 \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} > 0 \quad \text{pro každé } x \in (0; \pi).$$

Z Jensenovy nerovnosti tedy plyne

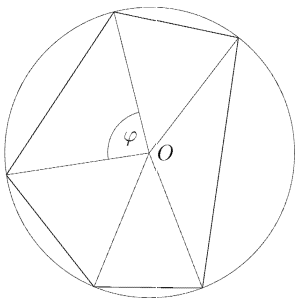
$$\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} \geq \frac{3}{\sin \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)} = \frac{3}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3},$$

takže s využitím rovnosti (51) můžeme psát

$$ab + ac + bc \geq 2S \cdot 2\sqrt{3} \geq 4\sqrt{3} S.$$

Příklad 7

Ukažte, že ze všech konvexních n -úhelníků (s daným $n \geq 3$) vepsaných do dané kružnice má největší obsah právě pravidelný n -úhelník.



Obr. 2

Řešení:

Jistě můžeme uvažovat jen takové vepsané n -úhelníky, které obsahují střed O dané kružnice. Z obr. 2 (pro konvexní pětiúhelník) je patrné, že každý takový konvexní n -úhelník se skládá z n rovnoramenných trojúhelníků, které mají společný hlavní vrchol ve středu O . Obsah každého takového n -úhelníku je tedy roven součtu obsahů jednotlivých trojúhelníků. Je-li daná kružnice jednotková, pak pro obsah S každého z nich platí

$$S = \frac{1}{2} \sin \varphi,$$

kde φ je úhel při středu O . Obsah A celého n -úhelníku tedy můžeme zapsat:

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k, \quad \text{kde} \quad 0 < \varphi_k < \pi \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^n \varphi_k = 2\pi.$$

Funkce $f(x) = \sin x$ je konkávní na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$, a proto z Jensenovy nerovnosti plyne

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \leq \frac{1}{2} n \sin \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_k \right) = \frac{1}{2} n \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) = A',$$

kde A' je zřejmě obsah pravidelného n -úhelníku. A protože rovnost zde nastane, právě když $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n$ (tedy $\varphi_k = \frac{2\pi}{n}$ pro všechna $1 \leq k \leq n$), je tvrzení o maximálním obsahu pravidelného n -úhelníku dokázáno.

O koeficientech rozvoje výrazu $(1 + x + x^2)^n$

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Na střední škole se studenti seznamují s binomickou větou, takže vědí, že koeficienty rozvoje výrazu $(1 + x)^n$ jsou kombinační čísla $\binom{n}{k}$, která se dají uspořádat do schématu zvaného Pascalův trojúhelník. V tomto článku se budeme zabývat koeficienty rozvoje výrazu $(1 + x + x^2)^n$ a některými jejich vlastnostmi.

Začneme tím, že koeficienty rozvoje výrazu $(1 + x + x^2)^n$ vypočteme pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ a uspořádáme je do trojúhelníkového schématu; o jeho vrcholu budeme hovořit jako o nultém řádku:

				1						
				1	1	1				
			1	2	3	2	1			
		1	3	6	7	6	3	1		
	1	4	10	16	19	16	10	4	1	
1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1
					...					

Podívejme se na tuto tabulku blíže a představme si, že před každou jedničkou na začátku a za každou jedničkou na konci každého řádku se nacházejí samé nuly. Všimněme si pak, že každé číslo x v n -tém řádku (pro všechna n s výjimkou $n = 0$) je rovno součtu $a + b + c$, kde b je v řádku $(n - 1)$ nad číslem x a čísla a , c s číslem b sousedí. Např. pro čísla čtvrtého řádku postupně platí:

$$1 = 0+0+1, \quad 4 = 0+1+3, \quad 10 = 1+3+6, \quad 16 = 3+6+7, \quad 19 = 6+7+6,$$

$$16 = 7 + 6 + 3, \quad 10 = 6 + 3 + 1, \quad 4 = 3 + 1 + 0, \quad 1 = 1 + 0 + 0.$$

Zdá se tedy, že tímto způsobem lze určit čísla každého řádku, známe-li řádek předcházející. Je-li tato domněnka správná, potom znalost koeficientů při x^k v rozvoji výrazu $(1 + x + x^2)^n$ umožní snadno určit koeficienty v rozvoji výrazu $(1 + x + x^2)^{n+1}$.

Označme nyní $B(k, n)$ koeficient při x^k v rozvoji výrazu $(1 + x + x^2)^n$ a tento rozvoj vyjádřeme ve tvaru

$$(1 + x + x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} B(k, n)x^k.$$

Uvažované schéma tak bude mít tvar:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & B(0, 0) \\ & & & & & & \\ & & & & & & B(0, 1) \quad B(1, 1) \quad B(2, 1) \\ & & & & & & \\ & & & & & & B(0, 2) \quad B(1, 2) \quad B(2, 2) \quad B(2, 2) \quad B(4, 2) \\ & & & & & & \\ & & & & & & \dots \end{array}$$

a jeho n -tý a $(n + 1)$ -ní řádek pak budou:

$$\begin{array}{ccccccccccc} B(0, n) & B(1, n) & B(2, n) & \dots & B(2n - 1, n) & B(2n, n) \\ B(0, n+1) & B(1, n+1) & B(2, n+1) & B(3, n+1) & \dots & B(2n, n+1) & B(2n+1, n+1) & B(2n+2, n+1) \end{array}$$

Správnost uvedené domněnky bude dokázána, ukážeme-li, že platí:

$$B(0, n + 1) = B(0, n), \quad B(1, n + 1) = B(0, n) + B(1, n),$$

$$B(k, n + 1) = B(k, n) + B(k - 1, n) + B(k - 2, n)$$

pro všechna $k = 2, 3, 4, \dots, 2n$,

$$B(2n+1, n+1) = B(2n, n) + B(2n-1, n); \quad B(2n+2, n+1) = B(2n, n).$$

Abychom tyto rovnosti dokázali, je třeba určit koeficienty v rozvoji výrazu $(1+x+x^2)^{n+1}$:

$$\begin{aligned} (1+x+x^2)^{n+1} &= (1+x+x^2)(1+x+x^2)^n = (1+x+x^2) \sum_{k=0}^{2n} B(k, n)x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} B(k, n)x^k + \sum_{k=0}^{2n} B(k, n)x^{k+1} + \sum_{k=0}^{2n} B(k, n)x^{k+2} \end{aligned}$$

Každý z těchto tří součtů vyjádříme ve tvaru:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} B(k, n)x^k &= B(0, n) + B(1, n)x + \sum_{k=2}^{2n} B(k, n)x^k, \\ \sum_{k=0}^{2n} B(k, n)x^{k+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} B(k-1, n)x^k = B(0, n)x + \\ &+ \sum_{k=2}^{2n} B(k-1, n)x^k + B(2n, n)x^{2n+1}, \\ \sum_{k=0}^{2n} B(k, n)x^{k+2} &= \sum_{k=2}^{2n+2} B(k-2, n)x^k = \sum_{k=2}^{2n} B(k-2, n)x^k + \\ &+ B(2n-1, n)x^{2n+1} + B(2n, n)x^{2n+2}. \end{aligned}$$

Dostaneme tak

$$\begin{aligned} (1+x+x^2)^{n+1} &= B(0, n) + [B(1, n) + B(0, n)]x + \\ &+ \sum_{k=2}^{2n} [B(k, n) + B(k-1, n) + B(k-2, n)]x^k + \\ &+ [B(2n, n) + B(2n-1, n)]x^{2n+1} + B(2n, n)x^{2n+2}. \end{aligned}$$

A protože je také

$$(1 + x + x^2)^{n+1} = \sum_{k=0}^{2n+2} B(k, n+1) x^k,$$

plyne odtud (porovnáním koeficientů polynomů na pravých stranách posledních dvou rovností), že vztahy mezi čísly n -tého a $(n+1)$ -ního řádku našeho schématu vskutku platí.

Podívejme se nyní na některé další vlastnosti čísel $B(k, n)$. Vzhledem k tomu, že trojúhelníkové schéma těchto čísel je souměrné podle svislé osy procházející jeho vrcholem, platí

$$B(k, n) = B(2n - k, n).$$

Z rozvoje

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2)^n &= [1 + x(1 + x)]^n = 1 + \binom{n}{1} x(1 + x) + \\ &+ \binom{n}{2} x^2(1 + x)^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n(1 + x)^n = \\ &= 1 + \binom{n}{1} x + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right] x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^{2n} \end{aligned}$$

je dále vidět (s použitím uvedené vlastnosti souměrnosti), že platí

$$\begin{aligned} B(0, n) &= B(2n, n) = 1, \quad B(1, n) = B(2n - 1, n) = n, \\ B(2, n) &= B(2n - 2, n) = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

A na závěr ještě dvě vlastnosti, které dostaneme z rovnosti

$$(1 + x + x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} x^k.$$

Dosazením $x = 1$ získáme vztah

$$3^n = B(0, n) + B(1, n) + B(2, n) + \dots + B(2n, n),$$

dosazením $x = -1$ pak dostaneme

$$1 = B(0, n) - B(1, n) + B(2, n) - B(3, n) + \dots - B(2n - 1, n) + B(2n, n).$$

Pokud bude čtenář mít zájem, může si některé další rovnosti podobným způsobem odvodit již samostatně.

Harmónia v školskej matematike

DUŠAN JEDINÁK

Trnavská univerzita v Trnave, SLOVENSKO

Úvodná správa

V 48. ročníku MO v kategórii Z-9 bola zadaná úloha na určenie dĺžky priečky lichobežníka s danými veľkosťami základní, ktorá prechádza priesečníkom jeho uhlopriečok a je rovnobežná so základňami. Hľadaná veľkosť je *harmonickým priemerom* veľkostí oboch základní. To sa však nepovedalo, tak som si vyhľadal príslušné doplnenie.

K pojmu harmónia

Harmónia znamená (z gréckeho *harma*) spojenie pevného s pohyblivým, súlad, súzvuk, súhra, zladenie, vyrovnanosť, súmernosť častí a celku, proporcionalita. Znamená to aj rovnaké číselné pomery (napríklad spájanie, význam i použitie akordov v hudobnej skladbe), výraz zákonitosti a miery vo svete, protiklad chaosu (organizovanosť), bezkonfliktná jednota dopĺňujúcich sa protikladov.

V priebehu dejín

Pytagorovci, filozofické spoločenstvo a bratstvo nasledovníkov *Pytagora* (asi 582-497 pred n. l.), sa okrem iného zaoberali aj preniknutím do tajomstva čísiel a otázok harmónie. Možno ako prví v histórii začali chápať prirodzené čísla ako abstraktné entity, ktoré samé o sebe charakterizujú príčinný svet javov. Objavili harmonické postupnosti v témach hudobnej stupnice (oktáva: pomer 1:2 pri dĺžkach strún, kvinta 2:3, kvarta 3:4). Vytvorili možnú charakteristiku všetkých vecí a javov v povahe pomerov čísiel, to dnes znamená, že základné sily vesmíru možno vyjadriť jazykom matematiky. *Archytas z Tarentu* (asi 428-365 pred n. l.) uvádzal niekoľko typov stredných veličín – priemerov a medzi nimi aj aritmetický, geometrický a *harmonický priemer*. Ak bola daná trojica kladných čísiel $a > b > c$, tak harmonický priemer bol daný ako

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}.$$

Z toho vyplýva, že

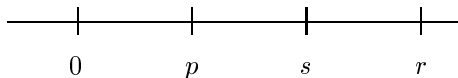
$$b = \frac{2ac}{a + c}$$

(čo je aj dnes *harmonický priemer čísel* a , c). Podobné údaje uvádzal aj *Nikomachos z Gerasy* (prvá polovica 2. storočia n. l.) a *Boethius* (asi 480 – 524/5). *Izidor zo Sevily* (asi 570 – 636) tvrdil, že „... podľa hudby hľadáš stred takto: Akým pomerom prostredné prevyšuje prvé, takým pomerom je prostredné prevýšené posledným.“ V jeho *Etymológii* o harmonickom priemere je uvedený: „Harmonický priemer získaš nasledujúcim spôsobom: Ak sa vezmú krajnosti, napríklad 6 a 12, vidíš, o koľko jednotiek je 6 prevýšené dvanástimi, teda o 6 jednotiek. Potom to umocniš: šesťkrát 6 dáva 36. Potom sčítaš tie prvé krajnosti, 6 a 12, dávajú dohromady 18. Vydelíš 36 osemnástimi a dostaneš výsledok 2. Ten pričítaš k menšej krajnosti (to znamená k 6) a výsledok je 8, čo je *harmonický stred* medzi 6 a 12. Ako 8 prevyšuje 6 o dve jednotky, to znamená o tretinu zo 6, tak aj 8 je prevyšované dvanástimi o štyri jednotky, teda tiež o tretinu z 12. Je teda prevyšované tým istým pomerom, ktorým prevyšuje.“

V súčasnosti to môžeme chápať a vysvetliť aj takto:

Ak prvé je p , posledné r , tak pre prostredné s (s uvedenou vlastnosťou) bude platiť (pozri obr. 1)

$$\frac{s - p}{p} = \frac{r - s}{r},$$



Obr. 1

teda

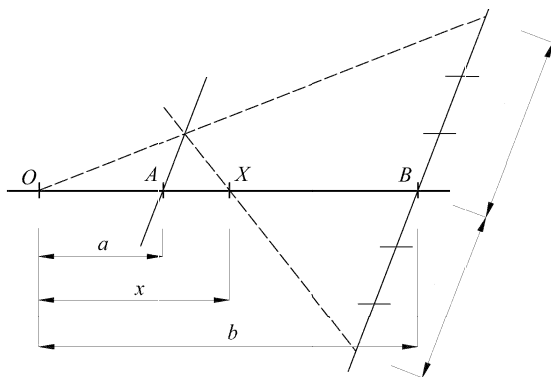
$$sr - pr = pr - ps,$$

$$s(r + p) = 2pr,$$

$$s = \frac{2pr}{p + r}$$

a to je *harmonický priemer čísel* p , r .

Ak pre harmonickú štvoricu bodov $ABXO$ označíme $|OA| = a$, $|OB| = b$, $|OX| = x$, tak (podľa obr. 2) dostaneme:



Obr. 2

$$-1 = \delta(ABXO) = \frac{\lambda(ABX)}{\lambda(ABO)},$$

$$-1 = \frac{-\frac{|AX|}{|BX|}}{\frac{|AO|}{|BO|}} = \frac{-\frac{(x-a)}{(b-x)}}{\frac{a}{b}},$$

$$-1 = -\frac{b(x-a)}{a(b-x)},$$

$$ab - ax = bx - ab,$$

$$2ab = ax + bx,$$

$$x = \frac{2ab}{a+b},$$

ale aj

$$x = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}.$$

Pre nenulové čísla a, b budeme výraz $x = \frac{2ab}{a+b}$, t.j. aj nazývať *harmonický priemer* čísel a, b (prevrátená hodnota aritmetického priemeru prevrátených hodnôt).

Všeobecnejšie: harmonický priemer kladných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ je

$$x_{\text{harm}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Harmonický rad je nekonečný rad, v ktorom každý jeho člen (okrem prvého) je harmonickým priemerom oboch svojich susedných členov, napr. rad, ktorého n -tý člen $a_n = \frac{1}{n}$, t.j.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

tento rad je divergentný, jeho súčet je $+\infty$, lebo

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)} + \dots$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2} \quad > \frac{1}{2} \dots$$

Ale $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0,577\,215\,664\,9$ (*Eulerova konštanta*, o ktorej sa nevie, či je číslom racionálnym alebo iracionálnym).

Rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-)^{k+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

nazývame *anharmonický rad*, konverguje a má súčet $\ln 2$.

Jednoduché úlohy

- Aká je priemerná rýchlosť vozidla, ktoré prejde trať rýchlosťou 60 km/h a vracia sa po rovnakej trase rýchlosťou 40 km/h.
- Vypočítajte veľkosť výšky zrezaného rotačného kužeľa, ak veľkosť obsahu jeho plášťa je súčtom veľkostí obsahov jeho podstáv (s polomeri R a r).
- Znázornite a odôvodnite vzťah medzi aritmetickým, geometrickým a harmonickým priemerom dvoch kladných reálnych čísel a , b :

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Vnímanosť pre harmóniu

Vo svojich motivačných zápiskoch zisťujem, že český matematik *Z. Frolik* sa vyjadril aj takto: *Krása matematiky spočíva v jej harmónii. A nahádzanie harmónie je ... tým najhlbším zdrojom uspokojenia. Je to krása vnímateľná a vnímanie tejto krásy môže dať človeku náplň života. Túto krásu môže človek iba vnímať – a vôbec ju nemusí vytvárať. Skoro žiadny matematikár na gymnáziu vedecky nepracuje, ale každý by mal mať pre krásu matematiky vyvinutú vnímavosť.* Nezanedbateľným impulzom pre učiteľov matematiky v oblasti naznačovania krásy i harmónie aj v školskej matematike by mohlo byť systematické vytváranie doplnkových stručných učebných a populárno-vedeckých textov z primeranej matematickej problematiky aj s historicko-kultúrnym pozadím doby a osudmi ľudí, ktorí ju tvorili. Ich pravidelné knižné alebo časopisecké vydávanie by určite potešilo učiteľov aj ich žiakov.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 140 a 141, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (17.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 141

Z dřevěného kvádru o rozměrech $a \times b \times c$, kde a, b, c jsou přirozená čísla větší než 1, vyřezeme u některých dvou protilehlých vrcholů daného kvádru dvě rohové jednotkové krychličky. Určete všechny trojice a, b, c , pro které lze takto vytvořené těleso rozřezat na *dvojkrychle* $2 \times 1 \times 1$.

Jožef Cmar

Řešení:

Kvadr o rozměrech $a \times b \times c$ umístíme do kartézské souřadnicové soustavy tak, že jeden z jeho vrcholů je umístěn v počátku, celý kvádr leží v prvním oktantu a jedna z vyříznutých krychliček má vrchol v počátku. Těleso s touto polohou označme $T(a, b, c)$. Pokud bude existovat rozřezání zkoumaného tělesa na dvojkrychle, budou tyto dvojkrychle složené z jednotkových krychliček, jejichž vrcholy mají celočíselné souřadnice. Pro celá čísla x, y, z označme $k(x, y, z)$ jednotkovou krychličku s vrcholy (x, y, z) , $(x + 1, y, z)$, $(x, y + 1, z)$, $(x, y, z + 1)$, $(x + 1, y + 1, z)$, $(x + 1, y, z + 1)$, $(x, y + 1, z + 1)$, $(x + 1, y + 1, z + 1)$. Z kvádru $a \times b \times c$ tak budou vyříznuty krychličky $k(0, 0, 0)$ a $k(a - 1, b - 1, c - 1)$. Jednoduše nahlédneme, že dvě krychličky $k(x_1, y_1, z_1)$ a $k(x_2, y_2, z_2)$ budou mít společnou stěnu, právě když

$$\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|\} = \{1, 0, 0\},$$

budou mít společnou hranu, právě když

$$\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|\} = \{1, 1, 0\},$$

a budou mít společný vrchol, právě když

$$\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|, |z_2 - z_1|\} = \{1, 1, 1\},$$

Pokud jsou a, b, c vesměs lichá čísla, je $T(a, b, c)$ složeno z $abc - 2$ krychliček, což je liché číslo a tedy toto zkoumané těleso nelze rozřezat na dvojkrychle, jejichž objem je 2.

Nechť dvě z čísel a, b, c jsou sudá čísla a třetí je liché. Pro $x \in \{0, 1, \dots, a-1\}$, $y \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ a $z \in \{0, 1, \dots, c-1\}$ obarvěme jednotlivé jednotkové krychličky následujícím způsobem. V případě, když $x+y+z$ je sudé číslo, obarvěme krychličku $k(x, y, z)$ bílou barvou, jinak ji obarvěme černou barvou. Celý kvádr $a \times b \times c$ se tak skládá z $\frac{1}{2}abc$ černých krychliček a z $\frac{1}{2}abc$ bílých krychliček, přitom se tyto krychličky pravidelně střídají. Abychom dostali $T(a, b, c)$, vyřízli jsme z kvádru $a \times b \times c$ krychličky $k(0, 0, 0)$ a $k(a-1, b-1, c-1)$, obě jsou obarvené bíle. Pokud by existovalo rozřezání $T(a, b, c)$ na dvojkrychle, skládala by se každá z jedné černé a z jedné bílé krychličky a tedy bílých a černých krychliček by byl stejný počet. Jelikož se ale zkoumané těleso $T(a, b, c)$ skládá z $\frac{1}{2}abc - 2$ bílých a $\frac{1}{2}abc$ černých krychliček, nemůže existovat rozřezání zkoumaného tělesa $T(a, b, c)$ na dvojkrychle.

Nyní ukážeme, že pokud $a+b+c$ je sudé číslo, lze $T(a, b, c)$ rozřezat na dvojkrychle. Důkaz provedeme několikerým užitím matematické indukce vzhledem k proměnným a, b, c .

Těleso $T(2, 2, 2)$ lze rozřezat na tři dvojkrychle, ty jsou složeny například z krychliček $(k(1, 0, 0), k(1, 1, 0))$, $(k(0, 0, 1), k(1, 0, 1))$ a $(k(0, 1, 0), k(0, 1, 1))$. Těleso $T(3, 3, 2)$ lze rozřezat na dvojkrychle

$$\begin{aligned} &(k(1, 0, 0), k(2, 0, 0)), \quad (k(2, 1, 0), k(2, 2, 0)), \quad (k(0, 1, 0), k(1, 1, 0)), \\ &(k(0, 2, 0), k(1, 2, 0)), \quad (k(0, 0, 1), k(1, 0, 1)), \quad (k(2, 0, 1), k(2, 1, 1)), \\ &(k(0, 1, 1), k(1, 1, 1)), \quad (k(0, 2, 1), k(1, 2, 1)). \end{aligned}$$

Podobně lze rozřezat na dvojkrychle tělesa $T(3, 2, 3)$ a $T(2, 3, 3)$.

Předpokládejme, že lze rozřezat na dvojkrychle těleso $T(a, b, c)$. Ukážeme, že potom lze rozřezat také $T(a+2, b, c)$. Z tělesa $T(a+2, b, c)$ odřízneme dvojkrychle $(k(x, y, z), k(x+1, y, z))$ pro trojice (x, y, z) z množiny

$$\{(x, y, z) | x = a, y \in \{0, 1, \dots, b-1\}, z \in \{0, 1, \dots, c-1\},$$

$$(y, z) \neq (b-1, c-1)\}$$

a pro trojici $(a-1, b-1, c-1)$. Potom dostaneme těleso $T(a, b, c)$, které podle indukčního předpokladu na dvojkrychle rozřezat lze. Podobně ukážeme, že z předpokladu, že na dvojkrychle lze rozřezat těleso $T(a, b, c)$ plyne, že na dvojkrychle lze rozřezat tělesa $T(a, b+2, c)$ či $T(a, b, c+2)$.

Užitím principu matematické indukce tak zjistíme, že na dvojkrychle lze rozřezat každé těleso $T(a, b, c)$, kde a, b, c jsou taková přirozená čísla větší než jedna, že součet $a + b + c$ je sudé číslo.

Správné řešení zaslali *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jan Čapek* z G v Duchcově, *David Kláška* a *Jana Šormová*, oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Miroslav Klímoš* a *Jan Kusý*, oba z GMK v Bílovci, *Jan Máca* z G v Třebíči, *Li Mang* z GChD v Praze, *Martin Michálek* z GJKT v Hradci Králové, *Josef Ondřej* z G v Rožnově pod Radhoštěm, *Libor Peltan* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova, Česká*, *Josef Tkadlec* z GJK v Praze a *Jan Vaňhara* z G v Holešově.

Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 142

Určete počet všech přirozených čísel n menších než 2008, pro něž je číslo $2^n - n^2$ dělitelné sedmi.

Peter Novotný

Řešení:

Nejprve prozkoumáme zbytky při dělení sedmi čísel 2^n a n^2 pro několik prvních přirozených čísel n . Tyto zbytky zapíšeme do tabulky.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
zbytek 2^n při dělení 7	2	4	1	2	4	1	2	4
zbytek n^2 při dělení 7	1	4	2	2	4	1	0	1

Z tabulky vidíme, že $2^3 \equiv 1 \pmod{3}$, pro všechna celá nezáporná čísla k, j platí $2^{3k+j} = (2^3)^k 2^j \equiv 2^j \pmod{3}$. Zbytky čísel 2^n při dělení sedmi se budou opakovat s periodou 3. Pro všechna celá nezáporná čísla k dále platí

$$(k+7)^n - k^n = 7 \left((k+7)^{n-1} + (k+7)^{n-2}k + (k+7)^{n-3}k^2 + \dots + k^n \right),$$

proto zbytky při dělení sedmi čísel n^2 se budou opakovat s periodou 7. Celkem tedy vidíme, že zbytky při dělení sedmi čísel $2^n - n^2$ se budou opakovat s periodou 21.

Nyní najdeme všechna přirozená čísla n z množiny $N_{21} = \{1, 2, \dots, 21\}$, pro která čísla 2^n a n^2 dávají při dělení sedmi stejné zbytky. Uvažujme všechny možné zbytky čísel 2^n .

- Zbytek 1 dává číslo 2^n pro $n \equiv 0 \pmod{3}$ a číslo n^2 pro $n \equiv 1 \pmod{7}$ nebo $n \equiv 6 \pmod{7}$. Všechna taková čísla z množiny N_{21} jsou 6 a 15.
- Zbytek 2 dává číslo 2^n pro $n \equiv 1 \pmod{3}$ a číslo n^2 pro $n \equiv 3 \pmod{7}$ nebo $n \equiv 4 \pmod{7}$. Všechna taková čísla z množiny N_{21} jsou 4 a 10.
- Zbytek 4 dává číslo 2^n pro $n \equiv 2 \pmod{3}$ a číslo n^2 pro $n \equiv 2 \pmod{7}$ nebo $n \equiv 5 \pmod{7}$. Všechna taková čísla z množiny N_{21} jsou 2 a 9.

Všechna čísla n z množiny N_{21} , pro která je číslo $2^n - n^2$ dělitelné sedmi jsou čísla

2, 4, 6, 9, 10 a 15.

Platí $2007 = 95 \cdot 21 + 12$. Vzhledem k tomu, že zbytky při dělení sedmi čísla $2^n - n^2$ se opakují s periodou 21, je počet všech čísel menších než 2008, pro něž je $2^n - n^2$ dělitelné sedmi, roven $95 \cdot 6 + 5 = 575$.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *Jan Čapek* z G v Duchcově, *David Kláška*, *Samuel Říha* a *Adam Zemek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Miroslav Klimoš*, *Lucie Mohelníková* a *Eliška Nekvapilová*, všichni z GMK v Bílovci, *Jan Máca* z G v Třebíči, *Jan Matějka* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Martin Michálek* z GJKT v Hradci Králové, *Josef Ondřej* z G v Rožnově pod Radhoštěm, *Libor Peltan* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, Česká, *Josef Tkadlec* z GJK v Praze a *Jan Vaňhara* z G v Holešově.

Neúplné řešení zaslali *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Alena Peterová* z G v Dobrušce a *Jana Šormová* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše.