

MATEMATIKA

Další důkaz známé trigonometrické nerovnosti

ŠEFKET ARSLANAGIĆ^{*)}

Prirodno–matematicki fakultet, Univerzita Sarajevo, BOSNA a HERCEGOVINA

V článcích [1] a [2] jsou publikovány nejrůznější důkazy nerovnosti

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}, \quad (1)$$

kteřá je splněna pro velikosti α, β, γ vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku ABC . V obou výše zmíněných příspěvcích bylo uvedeno celkem čtrnáct různých důkazů této nerovnosti. Zde se můžete seznámit ještě s jiným (patnáctým) důkazem této nerovnosti.

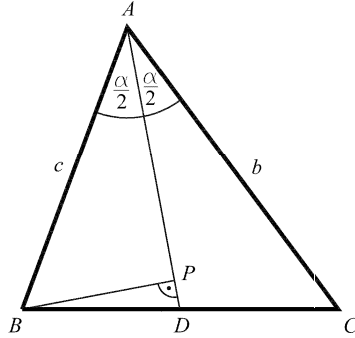
Důkaz nerovnosti (1). Nechtě α, β a γ značí (při obvyklém označení) velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC a D nechtě značí průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC s jeho stranou BC .

K důkazu naší nerovnosti využijeme následující tvrzení:

Osa libovolného vnitřního úhlu daného trojúhelníku protíná jeho protější stranu ve vnitřním bodě, který tuto stranu dělí v poměru délek (tomuto úhlu) přilehlých stran.

Důkaz tohoto tvrzení je natolik snadný, že jej přenecháváme čtenářům (lze využít např. sinové věty pro trojúhelníky ABD a ACD , viz obr.).

^{*)} Psáno pro MFI. Z německého originálu přeložil Jaroslav Švrček.



Při obvyklém označení délek stran trojúhelníku ABC tedy platí

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|BD|}{a - |BD|} = \frac{c}{b}.$$

Odtud

$$|BD| = \frac{ac}{b + c}. \quad (2)$$

Označme P patu kolmice z vrcholu B k přímce AD . Z pravoúhlého trojúhelníku APB plyne

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|BP|}{|AB|}.$$

Protože $|BP| \leq |BD|$, dostáváme využitím vztahu (2)

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\frac{ac}{b + c}}{c} = \frac{a}{b + c}. \quad (3)$$

Analogicky platí

$$\sin \frac{\beta}{2} \leq \frac{b}{c + a}, \quad (4)$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{c}{a + b}. \quad (5)$$

Součinem nerovností (3) – (5) dostaneme

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}. \quad (6)$$

Pro délky a, b, c stran trojúhelníku ABC přitom platí nerovnosti

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} \quad \text{a} \quad \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}.$$

Jejich součinem dále obdržíme

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca}.$$

Po snadné úpravě odtud plyne nerovnost

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc, \quad \text{resp.} \quad \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{8}. \quad (7)$$

Ze vztahů (6) a (7) již bezprostředně vyplývá nerovnost

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8},$$

kterou jsme chtěli dokázat.

Rovnost v ní nastane, právě když platí $a = b = c$ (tj. $\alpha = \beta = \gamma$), tedy v případě, je-li trojúhelník ABC rovnostranný.

L i t e r a t u r a

- [1] *Arslanagić, Š.*: Zehn Beweise einer trigonometrischen Ungleichung für Dreiecke. √Wurzel, Heft 2/2003 und Heft 3+4/2003.
- [2] *Arslanagić, Š.*: Vier weitere Beweise einer trigonometrischen Ungleichung für Dreiecke. √Wurzel, Heft 5/2007.
- [3] *Arslanagić, Š.*: Matematika za nadarene. Bosanska riječ, Sarajevo 2004.
- [4] *Arslanagić, Š.*: Metodická zbirka zadatakasa osnovama teorije iz elementarne matematike. Grafičar promet d.o.o., Sarajevo 2006.
- [5] *Bottema, O. et al.*: Geometric inequalities. Wolters-Noordhoff Publishing, Goningen 1969.
- [6] *Švrček, J. – Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha 1988.
- [7] *Švrček, J. – Calábek, P.*: Sbírká netradičních matematických úloh. Prometheus, Praha 2007.

Interpretácia matematického modelu

JANA MIHALČOVÁ – JOZEF SEKERÁK

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice, SLOVENSKO

Úvod

Vývoj za posledných dvadsať rokov viedol k radikálnym spoločenským a ekonomickým zmenám, ktoré sa nevyhli žiadnej krajine. V dôsledku rýchleho progresu sú na spoločnosť kladené čoraz väčšie nároky. Mnohé európske krajiny, aby dokázali efektívne zareagovať na nároky a zlepšiť tak svoj sociálny a ekonomický štandard, presadzujú myšlienku, že vzdelanie je tým najcennejším zdrojom ekonomického rastu. Snahou vzdelávania má byť rozvíjanie vedomostí, zručností, schopností a postojov, ktoré jednotlivcom umožnia úspešne sa začleniť do sociálneho a pracovného života, zastávať rôzne pracovné pozície a funkcie, riešiť nepredvídateľné problémy s dávkou originality a dôvtipu, vyrovnávať sa s rýchlymi zmenami v pracovnom, spoločenskom a osobnom živote, čo je reakcia na požiadavky trhu práce. Súbor takýchto osobnostných charakteristík sa v odbornej literatúre označuje pojmom kľúčové kompetencie [1], [5]. Ide o kompetencie, ktoré majú praktický význam pre každého človeka a celú spoločnosť. Preto je dôležité, aby sa tieto kompetencie rozvíjali už na základných a stredných školách.

Na základe rôznych prieskumov (pozri [1]) vyplynulo, že medzi najžiadanejšie kľúčové kompetencie patria kompetencie riešenia problémov. Aj keď preferujeme nadpredmetové^{*)} (kroskurikulárne) vnímanie kľúčových kompetencií, myslíme si, že vyučovanie matematiky má najväčší potenciál spomedzi ostatných vyučovacích predmetov v oblasti rozvíjania tejto kategórie kľúčových kompetencií. Podstatnou časťou riešenia problémov je zostavovanie modelov. Preto nás zaujímalo do akej miery vyučovanie matematiky rozvíja u žiakov kompetencie modelovania, konkrétne interpretáciu modelov.

Matematické modelovanie

Matematický model vnímame ako abstraktný model používajúci matematický zápis na opísanie konkrétnej situácie. Teda model „reprezentuje“

^{*)} Kľúčové kompetencie sa neviažu na konkrétny obsah, resp. predmet ale sú spojené s procesuálnou stránkou vyučovania.

danú situáciu. To vyjadruje určité zodpovedanie si objektov, stavov, činností, procesov, atď., ktoré môžeme nájsť na jednej strane v situácii a na strane druhej v modeli. Tento vzťah však v žiadnom prípade nie je vždy bijektívny [4].

Zastávame názor, že základnou črtou matematicky gramotného jedinca je kompetencia rozoznať v úlohovej situácii problém a slovne ho formulovať, zostaviť matematický model situácie a použiť ho pri riešení. Teda musí vedieť stanoviť východiská, nájsť vhodné matematické pojmy (resp. štruktúry, reprezentácie) súvisiace s týmto problémom, postupne odstraňovať prvky reality (matematizácia), tým sa presadzujú matematické rysy situácie, riešiť matematicky formulovaný problém a „preložiť“ riešenie matematického problému do „reči“ reálnej situácie (dematematizácia). Všetky tieto parciálne kompetencie sú úzko prepojené s matematickým modelovaním a spolu tvoria jednu z najdôležitejších kategórií kľúčových kompetencií, t.j. kompetencie riešenia problémov.

Uvedené nazeranie na podstatu matematického vzdelávania vedie k záveru, že nie rozsah matematického obsahu, ale skôr dostatočný rozvoj poznávacích aktivít je podstatnou zložkou matematického vzdelania. Tzn. posun od cieľov poznatkových, informatívnych ku cieľom činnostným, operačným.

Slovné úlohy, ktoré zachytávajú reálne situácie, môžu byť efektívnym prostriedkom sprostredkovania operačných vedomostí. Doterajšia školská prax však obvykle takéto úlohy využíva len zriedka. Je takmer pravidlom, že žiaci riešia len tie matematické úlohy, ktoré precvičujú učiteľom sprostredkovanú vedomosť, ktoré sú umelé a často krát veľmi abstraktné. Konečným cieľom je v podstate získať výsledok. Zriedkakedy sa využíva možnosť diskutovať o podmienkach riešenia. Málokedy sa riešenie kvantitatívnej úlohy chápe ako matematické modelovanie konkrétnej úlohovej situácie, takmer nikdy sa riešenie neopakuje aby sa zistilo, ako sa zmení matematický model pri zmene podmienok a predpokladov a už vôbec sa neriešia úlohy, v ktorých je známy matematický model a žiaci majú sformulovať slovné zadanie úlohy. A práve takáto úloha bola prostriedkom nášho prieskumu.

Prieskum

Za najvhodnejšiu a najreprezentatívnejšiu skupinu považujeme 15-ročných žiakov, pretože majú dostatočný aparát na riešenie nami predloženého problému. Preto tento prieskum prebiehal práve v prvom ročníku.

Prieskum bol realizovaný, v januári 2007 v siedmich triedach všeobecného gymnázia.

Na začiatku vyučovacej hodiny žiaci dostali presné inštrukcie na vyplnenie pracovného materiálu. Prieskum bol motivovaný tým, že ide o skutočné riešenie nedôsledného žiaka. Aby sme zlepšili psychologický moment a posilnili dôveryhodnosť motivácie prepísali sme toto riešenie rukou. V pracovnom materiáli sme obmedzili x a y na zelený a čierny čaj kvôli tomu, aby sa žiaci nezamestnávali vymýšľaním čo sa za týmito premennými ukrýva. Taktiež sme vyriešili sústavu lineárnych rovníc, aby sa nezdržovali zisťovaním čomu sa x a y rovná.

Pracovný materiál:

MENO:

TRIEDA:

Sformulujte zadanie k danému riešeniu.

x ... zelený čaj

y ... čierny čaj

$$x + y = 50 \rightarrow x = 50 - y,$$

$$220x + 300y = 240 \cdot 50, \quad x = 50 - y,$$

$$220 \cdot (50 - y) + 300y = 240 \cdot 50,$$

$$y = 12,5,$$

$$x = 50 - 12,5, \quad \text{tj.} \quad x = 37,5.$$

Už od piateho ročníka ZŠ sa žiaci stretávajú s úlohami, ktoré sa dajú riešiť aj cez sústavu rovníc s dvoma neznámymi. Také úlohy sa vyskytujú bežne v odporúčaných učebniciach pre daný ročník.

Úloha 30 [3], str. 69: *Janko si kúpil 2 lízanky a 1 perník a zaplatil 6,40 Sk. Keby kúpil 1 lízanku a 2 perníky, zaplatil by 8,90 Sk. Koľko korún stála lízanka a koľko stál perník?* (Táto úloha je v zbierke úloh označená ako ťažká. Pod ňou je však ďalšia, podobná, ktorá je už označená ako zábavná.)

Žiaci v tomto veku majú skúsenosti len s rovnicami o jednej neznámej. No aj napriek tomu túto úlohu vedia vyriešiť logickou úvahou.

V deviatom ročníku sa na hodinách matematiky začínajú preberať sústavy dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych. Žiaci sa zväčša stretávajú s konvergentnými úlohami (prvého stupňa tvorivosti) typu: *Riešte*

sústavu rovníc ... Neskôr sa hľadá praktické využitie tohto poznatku v slovných úlohách. Prepojenie týchto úloh s reálnym životom je žiakom často nejasné.

Hĺbka pochopenia preberaného učiva sa prejaví až po nejakom čase, keď sa žiaci stretnú so situáciou im už známou no nie bezprostredne preberanou.

V učebnici pre deviaty ročník sme našli príklad: „V čajovni pripravujú zmes zeleného čaju tak, aby jeden kilogram stál 240 Sk. V dodávke majú dva druhy zeleného čaju a to v cene 220 SK za 1 kg a 300 Sk za 1 kg. Koľko kilogramov druhu každého čaju musia v čajovni zmiešať, aby pripravili 50 kg požadovanej zmesi?“ ([6], príklad 7, str. 104), ktorej riešenia nám poslúžilo ako materiál pre náš prieskum. Nás zaujímalo ako sa žiaci popasujú s opačným problémom. Do akej hĺbky chápú čo daný matematický model predstavuje. Tiež nás zaujímalo ako žiaci vedia pracovať so slovom, ako dokážu naformulovať zmysluplnú slovenskú vetu, ktorá by vystihovala daný matematický model (komunikačné kompetencie).

Výsledky prieskumu

V tejto časti budeme uvádzať presné žiacke formulácie aj s drobnými pravopisnými chybami, či s nie celkom „hladkými“ myšlienkovými postupmi, aby sme zachovali ich autenticitu.

Prieskumu sa zúčastnilo 229 žiakov prvého ročníka všeobecného gymnázia. Z tejto vzorky sme vylúčili 37 žiakov. 20 žiakov odovzdalo prázdny pracovný materiál. Používali konceptový papier a nie všetci ho priložili k pracovnému materiálu. Nevieme povedať či úlohu nestihli opísať z pomocného papiera, alebo ju nevedeli doformulovať. Z tohto dôvodu je zo vzorky vylúčených ďalších 17 žiakov.

Aj keď riešenie je napísané ako neúplné riešenie slovnej úlohy, našli sa aj takí (7), ktorí zadanie formulovali slovami: „V obore $\mathbb{R}$ riešte sústavu rovníc:“

Na základe formulácii 126 žiakov usudzujeme, že interpretáciu matematického modelu sústavy dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych, nepoznajú.

Z nich 43 riešiteľov formuluje len prvú rovnicu:

„Janko má zelený a čierny čaj. Spolu má 50 balení zeleného a čierneho čaju. Vypočítajte koľko balení zeleného a koľko balení čierneho čaju má Janko.“

Zamýšľali sme sa nad touto formuláciou a myslíme si, že žiak zabudol na druhú rovnicu. Je tiež možné, že ju považoval za akúsi „úpravu“ tej prvej.

Ďalších 47 riešiteľov si uvedomuje existenciu koeficientov v druhej rovnici, ale zabúda na pravú stranu:

„Mama kúpila spolu 50 g zeleného a čierneho čaju. Za zelený zaplatila 220 Sk a za čierny 300 Sk. Vypočítajte koľko stojí 1 g zeleného a 1 g čierneho čaju.“

Ak by sme zostavili sústavu podľa tejto formulácie, nevedeli by sme čomu sa rovná pravá strana druhej rovnice. Toto vynechanie pravej strany je možno spôsobené tým, že slovne nevedeli sformulovať pravú stranu v tvare $240 \cdot 50$. Keby na pravej strane druhej rovnice vystupovalo len číslo 12 000, je možné, že počet takýchto formulácií by sa znížil.

Formuláciu s využitím pomeru sme nečakali (3 žiaci):

„V sáčku sa nachádza 50 g čaju. Koľko gramov je zeleného a koľko čierneho čaju, keď vieš že v 240 sáčkoch sa nachádzajú čaje v pomere 220 : 300“

Žiak si zrejme až dodatočne uvedomuje ďalšie údaje vyskytujúce sa v druhej rovnici sústavy, tak sa snažia zakomponovať ich do formulácie. Žiaľ zvolili si cestu cez pomer. Myslíme si, že žiak nemá interpretáciu pomeru dostatočne osvojenú.

33 riešiteľov vo svojej formulácii použilo všetky číselné údaje, zo zadanej sústavy. Na základe takejto formulácie nevieme nájsť (zostaviť) vhodný matematický model, ktorý by sme mohli použiť na vyriešenie danej situácie:

„Doma máme zelený a čierny čaj. Spolu je v zelenom a čiernom čaji 50 g čaju. Zelený čaj váži 220 g a čierny čaj váži 300 g. Koľko váži 240 g zeleného a čierneho čaju?“

59 riešiteľov pochopilo daný matematický model. V 12-tich formuláciách je len drobná nepresnosť v neúplnej špecifikácii:

„Zelený a čierny čaj spolu stoja 50 Sk. 220 kusov zeleného a 300 kusov čierneho spolu stoja 240krát viac ako keby sme kupovali po jednom. Koľko stojí zelený a koľko čierny čaj?“

47 riešiteľov zvolili cestu jasnej, presnej a zrozumiteľnej formulácie bez zbytočných slov. Podľa tejto formulácie vieme zostaviť nami požadovaný matematický model:

„Ak kúpime balenie, v ktorom je 1 zelený a 1 čierny čaj, zaplatíme 50 Sk. Ak kúpime maxi balenie, v ktorom je 220 zelených a 300 čiernych čajov, zaplatíme 240krát viac. Koľko stojí zelený a koľko čierny čaj?“

Ako ukážku tiež uvádzame formuláciu žiaka:

„Do mestskej čajovne doniesli nové druhy čajov. Rozhodli sa, že ich budú predávať za lepšiu cenu v balení po 2 druhy a preto sa ich rozhodli odvážiť. Balenie s jedným vrecúškom čierneho a jedným zeleného čaju váži 50 g. Ak by chceli takto odvážiť všetkých 220 vrecúšok zeleného a 300 vrecúšok čierneho čaju, museli by tak urobiť 240krát. Koľko teda váži jedno vrecúško zeleného a koľko vrecúško čierneho čaju?“

Toto zadanie úlohy síce korešponduje s nami zadaným matematickým modelom, no nie je spätý s reálnym životom. A po jeho prečítaní sa núka otázka: „Prečo by to takto niekto robil?“

Veľmi nás potešilo, že medzi „korektnými“, presnými formuláciami sa našlo aj niekoľko veľmi hodnotných aj z hľadiska tvorivosti (originality). Za všetky uvádzame jednu:

„Do obchodu objednali 220 krabičiek zeleného čaju a 300 krabičiek čierneho čaju. Janka si kúpila 1 krabičku zeleného a jednu krabičku čierneho čaju. Spolu za ne zaplatila 50 Sk. Koľko zaplatila za krabičku čierneho čaju a koľko za krabičku zeleného čaju ak vieme že, predavačka za objednávku platila 240timi 50 korunáčkami?“

Zaujímalo nás aj ako často a či vôbec sa žiaci stretli s naformulovaním úlohy na základe riešenia (či modelu). Prekvapilo nás, že spomedzi 130tich opýtaných len 7 žiakov odpovedalo kladne na túto otázku. Aj napriek tomu, že v učebnici pre 9. ročník ZŠ, sme našli úlohu ([6], úloha 7, str. 100):

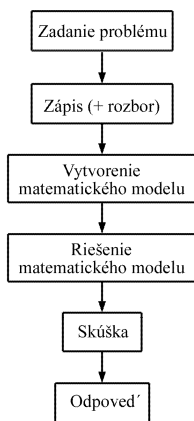
„Vymyslite hádanku o číslach, ktorú je možné riešiť touto sústavou dvoch rovníc s dvomi neznámymi:

$$\begin{aligned}\frac{a}{6} + \frac{b}{2} &= 13, \\ \frac{a}{2} - \frac{b}{3} &= 6.\end{aligned}$$

Závery prieskumu

Z kvantitatívnej analýzy výsledkov prieskumu vyplýva, že len 1/4 z respondentov dokázala správne interpretovať zadaný matematický model. Príčiny tohto výsledku vidíme hlavne v týchto troch faktoroch:

- Na vyučovacích hodinách sa kladie dôraz na algoritmus riešenia problémov, ktorý je jednosmerný v zmysle tejto schémy



- Ďalším problémom môže byť aj to, že žiaci chápu skúšku správnosti ako overenie riešenia v zmysle matematického modelu a nie v zmysle zadania. Aj v tomto prípade si žiaci neoverili, či matematický model zodpovedá ich formulácii úlohy.
- Nedostatočná motivácia, keďže výsledky žiakov z tohto prieskumu nie sú hodnotené známku.

Záver

Na základe prieskumu, ktorý sme zrealizovali môžeme tvrdiť, že žiaci majú značný problém s interpretáciou matematického modelu. I napriek tomu, že žiaci prvého ročníka gymnázia sa určite stretli s riešeniami takýchto úloh, no nie sú schopní na základe riešenia sformulovať zadanie. Len veľmi málo študentov má túto oblasť rozvinutú na adekvátnej úrovni, pričom všetky metódy, ktoré ovládajú, sú natoľko univerzálne, že im umožňujú zhromažďovať informácie a konštruovať matematické modely nielen v prírodných, lekárskech a technických vedách, ale aj v mnohých úlohách,

ktoré rieši ekonómia, jazykoveda, archeológia alebo v ďalších oblastiach spadajúcich do pôsobnosti vied o spoločnosti. To upevňuje náš názor, že žiaci riešia problémy algoritmicky bez tvorivého prístupu. Z formulácií k riešeniu ešte vyplýva, že žiaci, tak ako sú zvyknutí, formulujú nereálne situácie. Preto nevedia v reálnych podmienkach rozpoznať model, pomocou ktorého by dokázali riešiť problém. Mnohé formulácie odpovedali riešeniu, no boli príliš formálne, čo súvisí s ich komunikačnými kompetenciami.

Možné zlepšenia vidíme v tom, aby na vyučovaní matematiky prebiehala aj diskusia o riešení, t.j. diskusia o reálnej použiteľnosti riešenia. To môže obohacovať žiakov v oblasti vytvárania hypotéz, ich dokazovania, či vyvracania a v presnom vyjadrovaní sa. Súčasťou diskusie by mala byť aj úvaha o tom, ako sa zmení model a riešenie, ak sa zmenia podmienky v zadaní daného problému.

Literatúra

- [1] *Belz, H. – Siegriest, M.*: Klíčové kompetence a jejich rozvíjení. Portál, Praha 2001.
- [2] *Čirjak, M.*: Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (Tvorivosť v matematike). Essox, Prešov 2000.
- [3] *Česenek, J. a kol.*: Zbierka úloh z matematiky. SPN, Bratislava 1995.
- [4] *Fischer, R. – Malle, G.*: Človek a matematika. SPN, Bratislava 1992.
- [5] *Turek, I.*: Klíčové kompetencie. Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave, Bratislava 2003.
- [6] *Šedivý, O. a kol.*: Matematika pre 9. ročník základných škôl 1. časť. SPN, Bratislava 2003.

Konvergentní geometrická řada názorně

JAN HOUSKA

Výzkumný ústav pedagogický, Praha

V tomto příspěvku najdete některé příklady, které jsou převzaty ze známé publikace *Rogera B. Nelsena*: „Důkazy beze slov“ (viz [1]) s podtitulem „Cvičení v názorném myšlení“. Kniha uvádí řadu grafických „důkazů“ – spíše demonstrací či ilustrací – vztahů ze středoškolské matematiky. Autor uvádí, že tato sbírka důkazů má dlouhou historii a jednotlivé příklady jsou vybrány z mnoha zdrojů. Ve zmíněné publikaci jsou u jednotlivých příkladů připojena jména autorů.

Jedna z částí knihy je věnována ilustracím součtu nekonečné geometrické řady. Jak je vidět z přiložených obrázků, součet nekonečné geometrické řady (s kladným kvocientem menším než jedna) lze snadno určit z grafického znázornění pomocí podobnosti nebo stejnolehlosti. Pro dva stejnohlé obrazce určíme s žáky střed jejich stejnolehlosti a její koeficient. Dále ukážeme, že znázornění grafické nekonečné geometrické řady odpovídá součtu obsahů jistých rovinných útvarů nebo (příklady 3 a 4) délek jistých úseček, že každý člen dané nekonečné řady je na příslušném obrázku obsažen a že taková geometrická řada má konečný součet, který lze určit jednoduchou geometrickou úvahou. Výsledek vždy ověříme podle známého vzorce. Uvedené příklady se týkají některých speciálních případů součtu geometrické řady nebo obecného případu pro kladný kvocient. Navíc je zde demonstrováno sčítání tzv. *hypergeometrické řady* (příklady 5 a 6). Jednotlivé obrázky jsou uvedeny popř. doplněny stručným komentářem, který se snaží zachytit hlavní ideu příkladu.

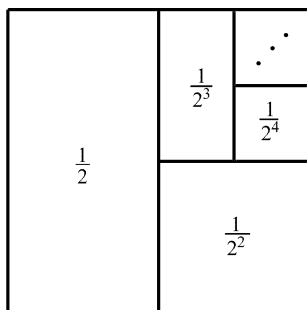
Předložené náměty mohou sloužit jako vhodná propedeutika nebo znázornění limitního procesu ve výuce matematiky na střední škole a především jako názorná ukázka souladu geometrického pohledu na algebraickou formuli pro součet konvergentní geometrické řady.

Příklad 1

Na obr. 1a – 1d jsou znázorněny jednotkové čtverce, které jsou úsečkami rovnoběžnými s jeho stranami rozděleny na menší pravoúhelníky, popř.

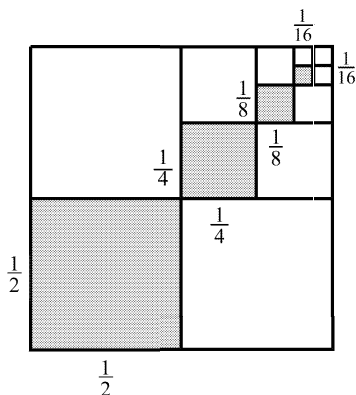
na útvary složené z několika čtverců s vyznačenými obsahy nebo délkami stran. Jednotlivé obrázky pak bez jakéhokoliv komentáře demonstrují následující rovnosti.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1,$$



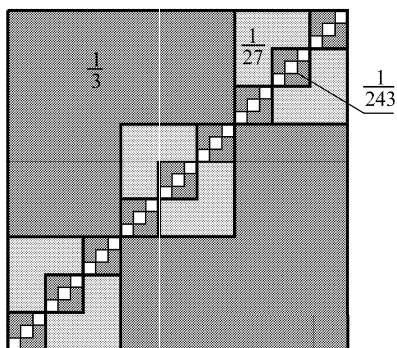
Obr. 1a

$$3 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) = 1, \quad \text{neboli} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3},$$



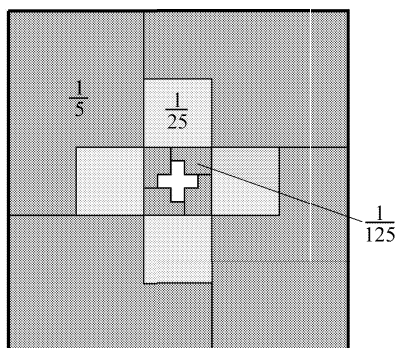
Obr. 1b

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{27} + 9 \cdot \frac{1}{243} + \dots \right) = 1, \quad \text{neboli} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2},$$



Obr. 1c

$$4 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots \right) = 1, \quad \text{neboli} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{4},$$



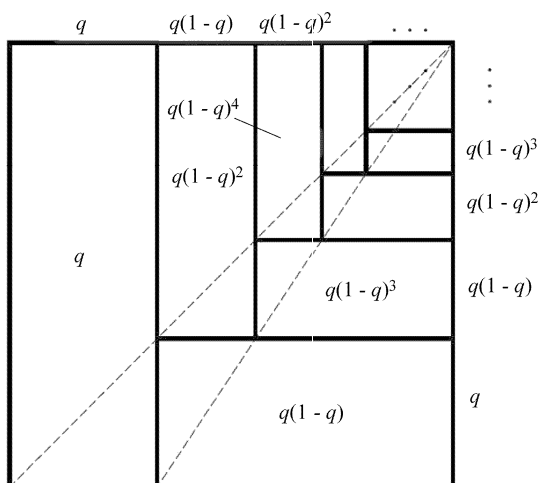
Obr. 1d

Ve všech dalších příkladech budeme **předpokládat**, že pro kvocient q uvažované nekonečné geometrické řady platí $0 < q < 1$.

Příklad 2

Na obr. 2 vidíme názornou ilustraci rovnosti

$$q + q(1 - q) + q(1 - q)^2 + \dots + q(1 - q)^n + \dots = 1$$



Obr. 2

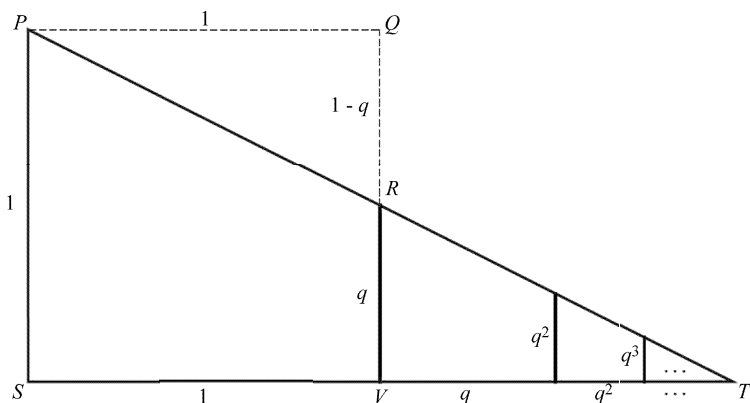
Příklad 3

Na obr. 3 vidíme názornou geometrickou interpretaci rovnosti

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

Z podobnosti trojúhelníků TSP a PQR (uu), totiž vyplývá

$$|TS| = |PS| \cdot \frac{|PQ|}{|RQ|}.$$



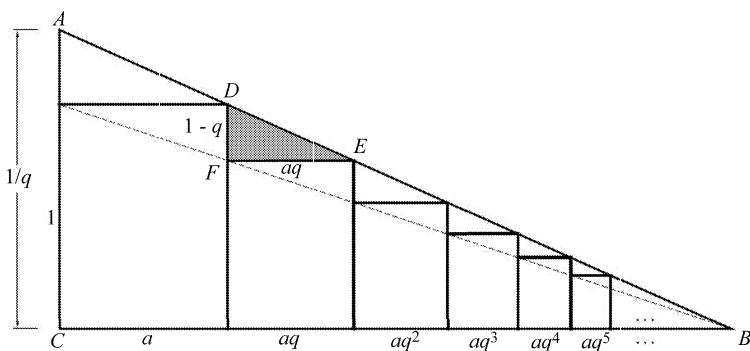
Obr. 3

Příklad 4

Na obr. 4 si můžete prohlédnout názornou geometrickou interpretaci rovnosti

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q},$$

kde a je kladné reálné číslo.



Obr. 4

Trojúhelníky ABC a DEF jsou podobné (uu), proto platí

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|DF|}, \quad \text{neboli} \quad \frac{s}{\frac{1}{q}} = \frac{aq}{1-q},$$

tudíž

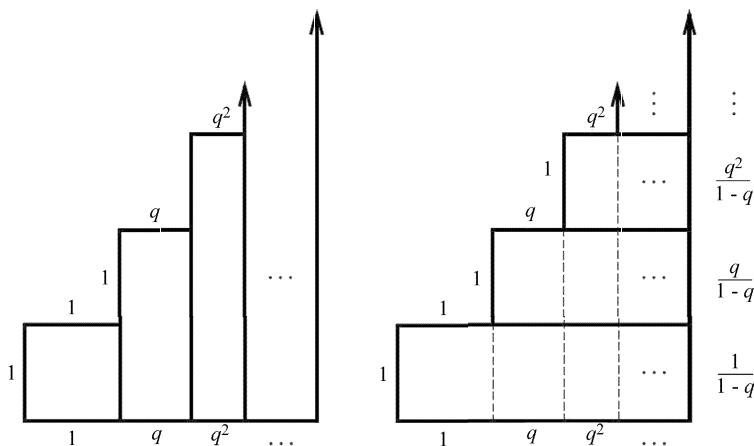
$$s = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Poslední dva příklady demonstrují součet tzv. *hypergeometrické řady*.

Příklad 5

Na obr. 5 vidíme názornou geometrickou interpretaci rovnosti

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots + kq^{k-1} + \dots = \frac{1}{(1-q)^2} \quad (1)$$



Obr. 5

Obr. 5 naznačuje, že hypergeometrickou řadu lze sčítat jako nekonečnou řadu konvergentních geometrických řad (tzv. Gabrielova schodiště), obrázek ukazuje dva způsoby sčítání. Podle součtového schématu

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} q^{i-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

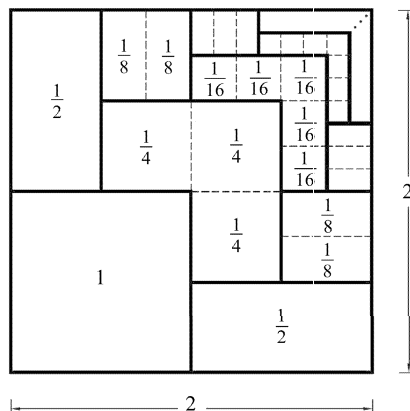
Součet řady ve vztahu (1) dostaneme také jiným způsobem. Stačí si povšimnout, že řadu na levé straně (1) dostaneme derivováním řady $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ člen po členu a že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^k = \frac{d}{dq} \sum_{k=1}^{\infty} q^k.$$

Příklad 6

Obr. 6 geometricky interpretuje předchozí rovnost (1) pro $q = \frac{1}{2}$. Platí

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + k \frac{1}{2^{k-1}} + \dots = 4 \quad (2)$$



Obr. 6

Celou situaci na obr. 6 lze zobecnit, podobně jako příklad 2 je zobecněním případu odpovídajícímu obr. 1a z příkladu 1.

Literatura

- [1] *Nelsen, R. B.*: Proofs Without Words, Exercises in Visual Thinking, Classroom Resource Materials Number 1, The Mathematical Association of America, 1993, vii + 151 pp., 118–125.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 3. 2008 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 145

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = (x + 3)(2y + 4).$$

Pavel Calábek

Úloha 146

V rovnostranném trojúhelníku ABD se stranou délky 2 označme C střed strany BD . Tento trojúhelník rozstříhneme na polovinu podél přímky AC . Trojúhelník ABC zůstane pevně na místě a trojúhelník ACD se kolem něj otočí takto: Nejprve se otočí kolem bodu A do polohy $AC'B$, pak se otočí kolem bodu B do polohy $A'CB$ a nakonec se otočí kolem bodu C do původní polohy ACD . Určete obsah rovinného útvaru, který pokryje při tomto pohybu trojúhelník ACD .

Jaroslav Zhouf

Dále uvádíme bilanci za uplynulý (14.) ročník této rubriky, který je zároveň čtvrtým ročníkem dalšího cyklu dlouhodobé soutěže. Redakce obdržela celkem 103 úplných nebo částečných řešení od 32 jednotlivců (alespoň jednu vyřešenou úlohu druhého cyklu přitom zaslalo 85 řešitelů). Za úplně vyřešenou úlohu řešitel obdržel 6 bodů, za částečně vyřešenou 3 body; k -násobným laureátem soutěže se stane řešitel, který získá od 11. ročníku alespoň k -násobek čísla 93 (rubrika byla založena v roce 1993).

Pořadí řešitelů po čtvrtém ročníku druhého cyklu dlouhodobé soutěže:

1. *Anton Hnáth* z Moravan (189 b.),
2. *Miroslav Hübsch* z Prahy 5 (138 b.),
3. *Karol Gajdoš* z Trnavy (120 b.),
4. *Vladimír Pavel* z Blovic (117 b.),
5. *Jozef Mészáros* z Jelky (114 b.)
6. *Jaroslav Hančl* z GMK Bílovec (102 b.),
7. *Marek Pechal* z G Zlín, Lesní čtvrť a *Jan Uhlík* z G Brno, tř. Kpt. Jaroše, (oba 78 b.).

Dvojnásobným laureátem druhého cyklu se po roce stává *Anton Hnáth*, laureáty se stávají *Karol Gajdoš*, *Vladimír Pavel* a *Jozef Mészáros*. Srdečně jim blahopřejeme a posíláme knihy z nakladatelství Prometheus.