

MATEMATIKA

Studenti opravují písemku

STANISLAV TRÁVNÍČEK – VÁCLAV MATYÁŠ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc – Purkyňovo gymnázium, Strážnice

Sledovali jste někdy malé děti, když si hrají na školu? Ty nejaktivnější si zpravidla vybojují roli učitele, protože je fascinují – jak se to jeví v jejich očích – vnější vůdcovská privilegia: „učitel“ může podle nich přikázat, aby „žáci“ poslušně seděli a může je podle libosti napomínat a zkoušet. Někteří z „učitelů“ přitom intuitivně poznají i základní pravidlo učitelského povolání, že učitel může učit a zkoušet jen to, co sám dobře umí. Větší děti si už pak na školu nehrají a prožívají svou školní životní etapu v trvalém postavení žáků, vše posuzují z hlediska žáka a jen při výjimečných příležitostech si položí otázku, jak by si počínali na místě učitele.

Naproti tomu dobrý učitel se při své práci často vžívá do myšlení svých studentů či žáků, chce-li, aby jeho výuka byla srozumitelná a přiměřená jejich věku a znalostem. Toto vmýšlení se do situace „druhé strany“ se však i jindy než ve škole může ukázat docela užitečné a může přinést větší vzájemné pochopení i pozitivní výsledky.

V bohatém a věčném tématu dělání a hodnocení chyb nás zajímalo, jak se studenti budou dívat na žákovské chyby, když je budou posuzovat z pozice učitele. Proto jsme po předběžném vyzkoušení postupu v jedné třídě strážnického gymnázia udělali v jiné třídě (s 20 studenty) pokus, při němž jsme těmto studentům svěřili na chvíli funkci učitele. Tématem pokusu byla *oprava a hodnocení matematické písemky*. Záměrem bylo, aby si studenti si při opravě cizích chyb uvědomovali, jakých chyb se sami dopouštějí, a toto poznání doplněné analýzou písemek a jejich oprav se projevilo jako přínos k rozpoznání a napravení vlastních chyb a k jejich prevenci. Chtěli jsme si nejprve ověřit *problém*, jak úspěšně budou studenti rozpoznávat chyby.

Příprava pokusu

Formulovali jsme *podmínky 1. části pokusu*:

- opravovaná písemka bude simulována a bude se týkat dvou žáků (tedy bude mít verze A a B) z toho důvodu, aby byla zaručena samostatnost studentů při opravě;
- tématem bude poslední matematické učivo ve vybrané třídě již běžně procvičené, studenti budou mít k dispozici správné řešení a dostatek času;
- studentům nebudou poskytnuty žádné rady a pokyny, jen výzva: *opravte písemku tak, jak nejlépe to dovedete*;
- hodnocení výkonu studentů při opravě písemky bude případně započteno do klasifikace, ale jen tomu, kdo si to bude přát;
- pokus analyzujeme a s výsledkem analýzy seznámíme studenty.

Formulovali jsme dále *předběžné hypotézy*:

- studenti přijmou pokus kladně, tato nová role učitele je bude bavit;
- studenti nemají zkušenosti s opravami, takže po formální stránce budou napodobovat své učitele. V první fázi asi nebudou příliš úspěšní.

Zadané písemky

Postupem dle [1] byla připravena dvoupříkladová písemka: skupina A (*Petr Vítek*) a B (*Zdeňka Suchá*) z tematického celku Komplexní čísla.

A

1. Pro které hodnoty reálného parametru c má rovnice $(2c - 1)x^2 + 4cx + 2c + 2 = 0$ imaginární kořeny? Řešte rovnici pro $c = 3$.
2. Užitím Moivreovy věty odvoďte vzorec $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$. Odvozený vzorec ověřte pro $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$ a 60° .

B

1. Pro které hodnoty reálného parametru c má rovnice $(2c + 1)x^2 - 4cx + 2c - 2 = 0$ imaginární kořeny? Řešte rovnici pro $c = -3$.
2. Užitím Moivreovy věty odvoďte vzorec $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$. Odvozený vzorec ověřte pro $\alpha = 30^\circ, 45^\circ$ a 60° .

Na obr. 1 a, 1 b je zobrazen 1. příklad písemky (skupina A resp. B), na obr. 2a, 2b je zobrazen 2. příklad z těchto skupin. Které (připravené) chyby by měl učitel matematiky opravit, tj. s jakými chybami byly písemky předloženy studentům k opravě:

A Bela Váček

1. Pro které hodnoty reálného parametru c má rovnice $(2c-1)x^2 + 4cx + 2c+2 = 0$ imaginární kořeny. Řešte rovnici pro $c=3$.

$$(2c-1)x^2 + 4cx + 2c+2 = 0$$

$$D = (4c)^2 - 4(2c-1)(2c+2) = 16c^2 - 8 \underbrace{(2c-1)(c+1)}_{c^2 - c + 2c - 1}$$

$$= 16c^2 - 16c^2 + c - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c < 1}}$$

$$c=3 \Rightarrow 7x^2 - 12x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 7 \cdot 8}}{14} = \frac{-12 \pm i\sqrt{80}}{14} = \underline{\underline{-\frac{6}{7} \pm i\frac{2\sqrt{5}}{7}}}$$

Obr. 1a

B Zdeněk Šuchá

1. Pro které hodnoty reálného parametru c má rovnice $(2c+1)x^2 - 4cx + 2c-2 = 0$ imaginární kořeny? Řešte rovnici pro $c=-3$.

Řešení:

$$(2c+1)x^2 - 4cx + 2c-2 = 0, D < 0$$

$$D = 16c^2 - 4(2c+1)(2c-2) = 16c^2 - 16c^2 + 4c + 2c - 2 = -2c - 2 < 0$$

$$-2c - 2 < 0$$

$$2c + 2 > 0$$

$$c + 1 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{c > -1}}$$

$$\underline{c=-3} \quad -5x^2 + 12x - 8 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 160}}{10} = \underline{\underline{\frac{6}{5} \pm \frac{2}{5}i}}$$

Obr. 1b

1. příklad:

Chybí v zadání

- PV má „reálný“ místo „reálný“ a chybí mu otazník v tázací větě;
- ZS chybí označení parametru „c“ a písmeno po „p“ je defektní.

Formální chyby

- PV chybí pokračovací znaky rovnosti, má krátkou odmocninu a krátkou zlomkovou čáru;
- ZS má výrazně chybně umístěnu zlomkovou čáru za rovníkem.

Věcné chyby

- při výpočtu prvního diskriminantu měli oba žáci potíže s násobením koeficientem „ -8 “, takže jim vyšel chybně diskriminant i hledaná podmínka, aby rovnice měla imaginární kořeny;
- pro řešení kvadratické rovnice se záporným diskriminantem použili oba žáci při výpočtu kořenů chybný vzorec, tj. vzorec pro kladný diskriminant;
- PV při dosazování $c = 3$ přehlédl znaménko při výpočtu koeficientu v kvadratickém členu, takže mu vyšel koeficient 7 místo správného 5 a v lineárním členu má chybné znaménko; dostal tak jinou rovnici, než měl dostat; pak se ve vzorci pro kořeny kvadratické rovnice opět spletl, takže dostal správné znaménko;
- u ZS je ještě malý problém, zda skutečně uvědoměle změnila znaménko u výsledné kvadratické rovnice a výpočty zvládla z paměti.

2. příklad

Chyby v zadání

- žáci by měli umět správně napsat „Moivreova“, u PV je to nečitelné a u ZS je „Moivrova“;
- u PV ve dvou případech chybí označení stupňů;
- ZS napsala „odvoďte“.

Formální chyby

- oběma žákům chybí pokračovací znaky rovnosti;
- PV nemá uveden použitý tvar Moivreovy věty a navíc si pletl $\cos 3\alpha$ a $\cos^3 \alpha$; u 180 chybí označení stupňů;
- u ZS chybí ve dvou případech označení stupňů.

Věcné chyby

- oba zapomněli nebo neuměli svůj vzorec upravit na požadovaný konečný tvar. Při ověřování „svého“ vzorce si však další práci nezjednodušili, proto se jim toto ověřování, pokud je jeho část správná, může započítat;

2. Některým Moivreovým vzorcem odvoďte vzorec $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$. Odvoďte vzorec pro $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

$$\begin{aligned} (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 &= \cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha i\sin\alpha + 3i^2\cos\alpha\sin^2\alpha + (i\sin\alpha)^3 \\ &= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha + i\sin^3\alpha \\ &= \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha \end{aligned}$$

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha \quad \text{Dosaďme}$$

$$30^\circ: L = \cos 90^\circ = 0, P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$45^\circ: L = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$60^\circ: L = \cos 180^\circ = -1, P = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -1$$

$$\underline{\underline{L = P}}$$



Obr. 2a

2. Některým Moivreovým vzorcem odvoďte vzorec $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. Odvoďte vzorec pro $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Řešení:} \quad \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 \\ &= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha + 3i^2\cos\alpha\sin^2\alpha + i^3\sin^3\alpha \\ &= \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha + 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha \\ \sin 3\alpha &= 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha \end{aligned}$$



$$L(30^\circ) = \sin 90^\circ = 1, P(30^\circ) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$L(45^\circ) = \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, P(45^\circ) = 3\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{6-1}{8}\sqrt{2} = \frac{5}{8}\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} L(60^\circ) &= \sin 180^\circ = 0, P(60^\circ) = 3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{3}{8}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{2}{8}\sqrt{3} = \frac{1}{4}\sqrt{3} \Rightarrow L = P \end{aligned}$$

Obr. 2b

- v požadovaném odvození mají oba žáci podobnou chybu, když se při umocňování čísla „i“ spletli jednou ve znaménku – každý jinak, což však náhodou neovlivnilo jejich správný dílčí výsledek;
- PV při ověřování určil v prvních dvou případech pravé strany chybně hodnotu funkce sinus; píše však správné výsledky, protože ví, že má být $L = P$, i když ve všech třech případech hodnotu pravé strany zcela zjevně nemohl dostat výpočtem. Nenazývejme to podvod, ale chytráčení. Výsledky ověřování mu proto samozřejmě nelze uznat;
- ZS nezvládla výpočet pravé strany v 1. vztahu; nejprve dosadila za $\cos 30^\circ$ opačnou hodnotu a pak krátila třemi ve výrazu $3 \cdot \frac{3}{4}$.

Průběh pokusu:

Studenti nejprve napsali „normální“ písemku se stejným zadáním, jako je v opravované písemce (psali ji po probrání daného tematického celku; tuto písemku později vyučující opravil, oznámkoval a započítal do klasifikace). Tím se myšlenkově dostali do tématu.

Po odevzdání těchto napsaných písemek dostal pak každý student kopii písemky Petra Vítka nebo Zdeňky Suché (stejnou skupinu, jakou psal předtím) a vzorové vyřešení zadaných úloh (tím se všichni – i ti méně úspěšní v předchozí písemce – seznámili se správným řešením). Pak každý červenou tužkou písemku opravil, oklasifikoval a odevzdal. Přitom byly dodrženy všechny stanovené podmínky pokusu.

Ve druhé části pokusu jsme výsledky opravy písemky jsme analyzovali a získali jsme tyto *poznatky*:

- a) Formálních chyb si studenti téměř nevšíмали. Chyby v zadání nebyly opravovány vůbec, z dalších výše uvedených formálních chyb byl jednou doplněn chybějící znak rovnosti a dvakrát prodloužen příliš krátký symbol odmocniny a třikrát nejasně napsané 3α .
- b) Věcné chyby objevili a opravili téměř všichni, ovšem některé málokdo, jiné nikdo. Např. nikdo neopravil použití vadného vzorce při výpočtu imaginárních kořenů kvadratické rovnice. Jen jedna studentka vyznačila jako chybu, že ve 2. příkladu nebyl odvozen požadovaný vzorec, tj. že odvození nebylo dotaženo až do konce. Některé zásahy studentů byly chybné.
- c) Studenti měli i technické problémy, jak zacházet s červenou tužkou – co a jak zapsat, kde udělat „fajfku“, co vysvětlit a co škrtnout. Někdy byli bezradní, jak při opravě postupovat (např. při ověřování vzorců ve 2. příkladu). Studentské opravy byly pak málo sdělné a v mnoha pří-

padech by PV ani ZS z „učitelské“ opravy nepochopili, kde mají jakou chybu. Opravy byly prováděny do určité míry jen formálně, projevoval se sklon k pouhému škrtání. Asi jen v polovině případů se studenti u chybného místa pokoušeli naznačit, v čem je chyba nebo jak to mělo být, a asi v polovině případů vadné místo jen škrtnli.

- d) Klasifikace byla většinou přiměřená (PV 3-4, ZS 2-3) jen s malými odchylkami, i když byly známky zřejmě odhadovány jen citem. Studenti zřejmě nehodnotili znalosti PV a ZS, ale sledovali, kolik mají chyb.
- e) Ukázalo se, že oprava této písemky byl pro studenty úkol spíše těžký.

S odstupem několika týdnů se studenti seznámili s *analýzou* svých oprav – zejména jsme s nimi prošli chyby v písemkách PV a ZS a nedostatky ve studentských opravách (opravené písemky měli přitom před sebou). Možná, že bezprostředně po opravě někteří studenti získali na chvíli pocit, že oprava písemky je záležitost snadná, ale po seznámení s analýzou jim došlo, že *správná oprava písemky* je náročná práce a že opravující musí dobře znát, co, jak a proč opravit a samozřejmě hlavně musí znát matematiku (což zřetelně koresponduje se základním pravidlem učitelského povolání, které jsme zmínili v 1. odstavci).

Ve 3. části našeho pokusu se zopakovala jeho 1. i 2. část, samozřejmě se zadáním z aktuální látky o limitě, spojitosti a derivacích (viz obr. 3a, 3b). Studenti opět napsali normální písemku, byli seznámeni se správným řešením a pak opravovali dodanou žákovskou písemku, jejich oprava byla vyhodnocena, s vyhodnocením byli studenti seznámeni a měli možnost porovnat svou opravu s opravou správně provedenou.

I když byly tyto nové simulované písemky na opravu spíše nesnadné, byli studenti při jejich opravě již o poznání úspěšnější než v předchozích částech pokusu. Ukázalo se, že se studenti poučili z první opravy a zatímco u 1. části bylo možno hodnotit úspěšnost opravy zhruba na 40 %, ve druhé části to bylo i při přísném posouzení už k 60 %, přičemž někteří studenti dosáhli ještě lepšího výsledku. Samozřejmě jejich opravy nedosahovaly kvality opravy písemky dobrým učitelem, ale účelem pokusu nebylo „nadělat z nich učitele matematiky“. Studenti, kteří opravu provedli relativně dobře, byli opět odměněni „plusem“ do klasifikace.

Při opravě měli studenti k dispozici správné zadání i řešení. Ukázalo se, že vidí spíše věcné chyby, které byly při opravách z velké části podchyceny, ale objevení či rozpoznání jiných chyb, i když závažných, dělalo většinu z nich problémy; k formálním chybám byli studenti poměrně tole-

rantní, i když oproti 1. části pokusu došlo i zde ke zlepšení. Při klasifikaci byli studenti přiměřeně přísní. K hromadnějším nedostatkům při opravě patřilo:

- Při řešení příkladu 1b měli žáci upozornit, že vzhledem ke spojitosti funkce v zadaném bodě je limita rovna funkční hodnotě; nebylo opraveno.
- Při řešení příkladu 1c měli žáci naznačit krácení; opravili 3 studenti.
- Při výpočtu derivace funkce v bodě měli žáci oddělit výpočet derivace jako funkce a výpočet derivace v bodě; opravila jen třetina studentů.

A

CERNÝ
Karol Cerný 4.A

① Je daná funkce $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{3x^2 + 5x - 2}$. Máte ji? Kdy nepojistili. Dále vypočíte b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

$$a) 3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} < \frac{1}{3} \quad \text{nepojistil o } \frac{1}{3} - 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0 - 6}{3 + 5 - 2} = \underline{\underline{-1}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2})}{x^2(3 + \frac{5x}{x^2} - \frac{2}{x^2})} = \frac{1}{3}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} < 3$$

$$d) x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3), \quad 3x^2 + 5x - 2 = (x - \frac{1}{3})(x+2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{(x - \frac{1}{3})(x+2)} = \frac{-5}{-2\frac{1}{3}} = \underline{\underline{\frac{15}{2}}}$$

$$\textcircled{2} \text{ Vypočítejte } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos^2 x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)}{x^2 \sin x} =$$

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} = \underline{\underline{1}}$$

$$\textcircled{3} \text{ Vypočítejte derivaci funkce } y = \frac{2x-1}{x^2+2} \text{ v bodě } x_0 = -1.$$

$$y' = \frac{2(x^2+2) - (2x-1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^2 + 4 + 4x^2 - 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{6x^2 - 2x + 4}{x^4 + 4x^2 + 4} = \frac{6 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 4}{1 + 4 + 4} = \frac{12}{9} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Obr. 3a

B

Barla Bila' 4.1

- ① Je daná funkce $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{3x^2 + 7x - 6}$. Určete její body nespojitosti. Další vypočítejte $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

Řešení:

$$a) 3x^2 + 7x - 6: D = 49 + 72 = 121, \sqrt{D} = 11, x_{2,1} = \frac{-7 \pm 11}{6} = \frac{2}{3} \left. \begin{matrix} -3 \end{matrix} \right\} \text{tam je nespojitost}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + 0 - 6}{0 + 0 - 6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1 + \frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2})}{x^2(3 + \frac{7}{x} - \frac{6}{x^2})} = \frac{1 + 0 - 0}{3 + 0 - 0} = \frac{1}{3}$$

$$d) x^2 + x - 6 \dots (-2; 3) = (x-2)(x+3), 3x^2 + 7x - 6 = 3(x+3)(x+\frac{2}{3})$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2(1 + \frac{x}{x^2} - \frac{6}{x^2})}{3(x+3)(x+\frac{2}{3})} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-2)(x+3)}{3(x+3)(x+\frac{2}{3})} = \frac{x-2}{3(x+\frac{2}{3})} = \frac{-3-2}{3(-3+\frac{2}{3})} = \frac{-5}{-9+2} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$$

- ② Vypočítejte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos^2 x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos^2 x)}{x \cdot x \sin x} = \frac{x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \sin x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x} = 1 \cdot 1 = 1$$

- ③ Vypočítejte derivaci funkce $y = \frac{2x-3}{x^2-1}$ v bodě $x_0 = 2$.

$$y' = \frac{2(x^2-1) - (2x-3) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2-4x^2+6x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2+6x-2}{(x^2-1)^2} = \frac{-8+12-2}{9} = \frac{-2}{9}$$

Obr. 3b

- Chybějící pokračovací rovnítko ve 2. příkladu studentům nechybělo.
- Chyby v textu opravila méně než polovina studentů, chybné vyjádření „Je daná funkce ...“ a chybné slovo „nespojnost“ zaregistrovala jediná studentka.
- Jen několika studentům vadily špatně umístěné nebo krátké zlomkové čáry.

Přes tento výčet lze říci, že většina studentů postupovala při opravě zodpovědně a snažila se tuto výměnu rolí (stát se na chvíli učitelem) podle

svých sil zvládnout a z tohoto hlediska lze považovat jejich výsledky za uspokojivé.

Po seznámení studentů se správnou opravou a s hodnocením svých oprav („své“ opravy měli přitom k dispozici) se konala závěrečná beseda. Zde studenti společně s vyučujícím zhodnotili provedený pokus a konstatovali, že je naučil lépe poznat i „druhou stranu“. Na závěr uvedme některé z jejich názorů a poznatků:

1. Věcné chyby musí samozřejmě učitel opravit. Pak studenti diskutovali o formálních chybách (chyby jazykové, chybná úprava, narušení dohodnutých pravidel matematického zápisu, ...) a nakonec došli k tomu, že i formální chyby by měly být opraveny, i když neovlivní klasifikaci. Uznali, že v opačném případě se zvyšuje možnost případů, kdy by se řešení stalo nesrozumitelným nebo kdy by tyto formální chyby „přerostly“ ve věcné (přeškrtavání přeškrtnutého, dvojí nepodtržené řešení, z nichž jedno je chybné a učitel nechť si vybere, nedbalé kreslení grafů, atd.).
2. Všichni studenti byli pro, aby se v případě, kdy většina studentů při písemce nevyřeší nějakou úlohu správně, provedl při opravě písemky správný výpočet na tabuli a to i přesto, že jim tato znalost už k lepší klasifikaci nepomůže (probírá se další nové učivo). Hlavním motivem tohoto přístupu však nebyla idea kompletace znalostí, ale v podstatě pochopitelný praktický úsudek, že v budoucnu (maturita, zkoušky na VŠ a studium na VŠ) se s podobným typem úloh ještě mohou znovu setkat a znalost jejich řešení se jim může hodit.
3. Při příležitosti této diskuse byli též studenti vyzváni, aby se vyjádřili k postoji učitele, pokud zjistí opisování, jak by hypotetické opisování žáka při písemné práci měl podle jejich názoru učitel hodnotit, tedy zda: a) se jedná o neznalost, kterou je třeba klasifikovat nedostatečnou, b) jedná se o kázeňský přestupek za který žák může získat některé z výchovných opatření podle vyhlášky MŠMT, ale měl by být znovu přezkoušen, c) učitel by se raději měl tvářit, jako by nic neviděl. Při hlasování bylo necelých 20 % pro postup dle a), ostatní pro to, aby bylo opisování hodnoceno jako kázeňský přestupek a aby byl žák znovu přezkoušen. Nikdo nesouhlasil s tím, aby učitel opisování mlčky toleroval.
4. Nakonec se studenti se shodli na tom, že pokus byl pro ně přínosem, neboť lépe poznali, že rozhodování učitele při opravách písemných prací někdy není snadné. Shodli se též na názoru, že řešení matematických úloh v písemkách není správné převést výhradně na testy, kde si žák

vybere ze dvou (nebo více) možných odpovědí. I když pro učitele jsou opravy takových testů podstatně snazší, ztrácí se hodnocení toho, jak žák úlohu řešil, což je v případě přírodních věd vůbec někdy důležitější než samotný výsledek řešené úlohy.

Závěr: Pro vyučujícího byl tento pokus inspirací (co ještě u studentů sledovat a ovlivňovat) a pro studenty podnětem k prevenci chyb a k tomu, aby se s větším porozuměním dívali na práci učitele a dovedli rozpoznat a zhodnotit své chyby i formální opomenutí.

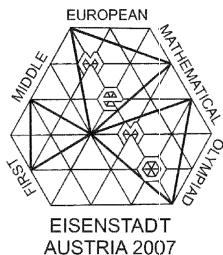
Literatura

- [1] *Trávníček, S.:* Oprava písemek z matematiky. UP Olomouc, 2006.

Středoevropská matematická olympiáda

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc



Z podnětu organizačního výboru rakouské matematické olympiády (ÖMO) byly v průběhu 47. Mezinárodní matematické olympiády (MMO) ve Slovinsku (v roce 2006) delegace středoevropských zemí (Švýcarska, Rakouska, Německa, Slovinska, Chorvatska, České republiky, Slovenska, Polska a Maďarska) seznámeny s návrhem vytvořit pro matematicky talentované středoškoláky

uvedených zemí novou soutěž. Snahou iniciátorů vzniku soutěže bylo umožnit dalším studentům zemí střední Evropy porovnání svých znalostí z matematiky v mezinárodním měřítku. Na tomto jednání byly předběžně sta-

noveny také cíle a pravidla nové mezinárodní matematické soutěže, nazvané Středoevropská matematická olympiáda. Iniciátoři jejího vzniku přitom vycházeli z pravidel dvojstranné mezinárodní matematické soutěže středoškoláků „Polsko – Rakousko“, která existovala až do roku 2006 plných 29 let. Na světě, a speciálně také v Evropě, existuje celá řada podobných regionálních matematických soutěží (Balkánská MO, Baltic Way, Mediterranean MO, Iberoamerická MO atd.), jichž se každoročně účastní soutěžící ze zemí spádových regionů Evropy. Naši žáci takovou možnost dosud neměli, proto jsme uvítali nabídku rakouských kolegů, která umožní postupné zapojení dalších matematicky nadaných středoškoláků do nové mezinárodní matematické soutěže.

První ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO – Middle European Mathematical Olympiad) se uskutečnil v termínu 20. – 26. září 2007 v rakouském Eisenstadtu – hlavním městě spolkové země Burgenland. Soutěže se v jejím prvním ročníku zúčastnilo pouze sedm (z devíti) středoevropských zemí (Německo a Maďarsko se hodlají zapojit do soutěže až od jejího 2. ročníku).

Každou zemi mělo právo reprezentovat 6 soutěžících, kteří se nezúčastnili uplynulému MMO ve Vietnamu (viz [2]) a ve školním roce 2007/08 jsou ještě studenty středních škol. Úvodního ročníku soutěže se nakonec zúčastnilo 40 jednotlivců ze 7 zemí střední Evropy (slovinské družstvo přicestovalo do Eisenstadtu pouze se čtyřmi účastníky).

Ústřední komise české MO vybrala pro 1. Středoevropskou matematickou olympiádu šestici středoškoláků sestavenou z vítězů, resp. úspěšných řešitelů ústředního kola 56. ročníku MO v kategorii A (viz [1]), kteří se nezúčastnili 48. MMO v červenci 2007 ve Vietnamu a v uplynulém školním roce 2006/07 ještě nematurovali. České reprezentační družstvo tak v abecedním pořadí tvořili tito soutěžící: *Jan Máca* (G Třebíč), *Matěj Peterka* (G v Praze 6, Nad Alejí), *Alena Peterová* (G Dobruška), *Samuel Říha* (G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Tomáš Toufar* (GMK v Bílovci) a *Jan Vaňhara* (GLJ Holešov). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* z Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *Mgr. Martin Panák, Ph.D.* z brněnského oddělení Matematického ústavu AV ČR.

Vlastní soutěž se konala ve dvou soutěžních dnech, a to v sobotu 22. září, kdy proběhla soutěž jednotlivců, a v neděli 23. září pak soutěž družstev. Po oba soutěžní dny řešili jednotlivci, resp. reprezentační družstva v rámci

soutěže družstev po 4 soutěžních úlohách, na jejichž vypracování byl každý ze soutěžních dnů vyhrazen čas 5 hodin. Každá úloha byla přitom hodnocena (podle předem schváleného systému hodnocení každé úlohy) celočíselným počtem bodů v rozpětí 0 – 8.

Podobně jako na MMO měly jednotlivé země možnost s jistým časovým předstihem zaslat organizačnímu výboru návrhy svých úloh pro soutěž. Z nich pak mezinárodní jury vybrala dvě čtveřice úloh, jednu pro soutěž jednotlivců a druhou pro soutěž družstev. Je potěšitelné, že mezi osmi vybranými úlohami byly také dvě úlohy české. Jedna z nich byla použita v soutěži jednotlivců (autorem byl *Marek Pechal*) a druhá v soutěži družstev (autorem úlohy byl *doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.*).

Náročnost úloh byla srovnatelná s úlohami z podobných mezinárodních soutěží (včetně MMO). Soutěžící jednotlivých zemí tak měli možnost získat potřebné mezinárodní zkušenosti, které mohou zúročit již na příští (49.) MMO v roce 2008. Pro lepší posouzení jejich obtížnosti (a také trendu při tvorbě nových matematických úloh) vám nejprve předkládáme zadání obou sad soutěžních úloh. V závorce za úlohou je vždy uvedena země, která ji do soutěže navrhla.

Soutěž jednotlivců

(22. září 2007)

1. Nechtě a, b, c, d jsou kladná reálná čísla splňující rovnost $a + b + c + d = 4$. Dokažte, že

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4.$$

(Švýcarsko)

2. Je dáno k (k je celé číslo větší než 1) sad míčů. Každá sada obsahuje n míčů, které jsou označeny čísly $1, 2, \dots, n$. Každý míč obarvíme jednou ze dvou barev (bílou nebo černou) tak, že
 - a) míče označené stejným číslem mají stejnou barvu,
 - b) každá $(k + 1)$ -prvková množina míčů, které jsou označeny (ne nutně různými) čísly $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ tak, že platí $a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_{k+1}$, není jednobarevná.

V závislosti na k určete největší možné číslo n , pro něž existuje takové obarvení míčů.

(Slovensko)

3. Necht k je daná kružnice a k_1, k_2, k_3 a k_4 jsou čtyři menší kružnice, jejichž středy po řadě O_1, O_2, O_3 a O_4 leží na kružnici k . Pro $i = 1, 2, 3, 4$ se kružnice k_i a k_{i+1} ($k_5 = k_1$) protínají ve dvou bodech A_i a B_i , přičemž body A_i leží na kružnici k . Předpokládejme že body $O_1, A_1, O_2, A_2, O_3, A_3, O_4, A_4$ jsou navzájem různé a leží v tomto pořadí na kružnici k . Dokažte, že $B_1B_2B_3B_4$ je pravoúhelník.

(Švýcarsko)

4. Určete všechny dvojice (x, y) kladných celých čísel, které vyhovují rovnici

$$x! + y! = x^y.$$

(Česká republika)

Soutěž družstev

(23. září 2007)

1. Necht a, b, c, d jsou libovolná reálná čísla z uzavřeného intervalu $\langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$, která vyhovují podmínce $abcd = 1$. Určete největší možnou hodnotu výrazu

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{d}\right) \left(d + \frac{1}{a}\right).$$

(Česká republika)

2. Pro libovolnou množinu P pěti bodů v rovině (v obecné poloze) označme $a(P)$ počet všech ostroúhlých trojúhelníků s vrcholy v množině P . Určete největší možnou hodnotu $a(P)$. (Pět bodů v rovině je v obecné poloze, jestliže žádné tři z nich neleží na téže přímce.)

(Švýcarsko)

3. Označme $s(T)$ součet délek všech hran čtyřštěnu T . Uvažujme všechny čtyřštěny, jejichž délky hran jsou navzájem různá kladná celá čísla, přičemž jedno z nich je 2 a jedno 3. Takové čtyřštěny budeme nazývat MEMO-čtyřštěny.

- Určete všechna kladná celá čísla n , pro něž existuje MEMO-čtyřštěn T s vlastností $s(T) = n$.
- Určete počet navzájem *různých* MEMO-čtyřštěnů T , pro něž platí $s(T) = 2007$.

Dva čtyřlístky považujeme za *různé*, jestliže jeden z nich nelze převést na druhý pomocí složení souměrností podle roviny, posunutí nebo otočení.

(Není třeba dokazovat, že čtyřlístky nejsou degenerované, tj. mají kladný objem.)

(*Rakousko*)

4. Určete všechna kladná celá čísla k s vlastností: existuje celé číslo a takové, že $(a + k)^3 - a^3$ je násobkem čísla 2 007.

(*Rakousko*)

Texty úloh byly soutěžícím předloženy (v obou soutěžích) v jejich mateřských jazycích. Řešení jednotlivých úloh mohli soutěžící odevzdávat rovněž v mateřském jazyku. Každý ze soutěžních dnů měli soutěžící po dobu úvodních 45 minut klást písemně případné dotazy, na něž, stejně jako na MMO (se souhlasem mezinárodní jury), odpověděl vždy vedoucí příslušné delegace.

Následující dva dny (23. a 24. 9.) byly vyhrazeny na koordinace žákovských řešení. To probíhalo stejným způsobem jako na MMO. Jednání při koordinaci úloh byla vedena v angličtině a němčině. Na závěrečném jednání jury byly také stanoveny hranice pro udělení zlatých, stříbrných a bronzových medailí. Dále bylo potvrzeno definitivní pořadí zemí v soutěži družstev.

O tom, že úlohy v 1. ročníku soutěže byly poměrně náročné svědčí i poměrně nízké hranice pro udělení medailí v soutěži jednotlivců. Pro zlatou medaili bylo stanoveno bodové rozpětí 23 – 32 bodů, pro stříbrnou 13 – 22 bodů a pro bronzovou medaili 8 – 12 bodů. Nejlepšího výsledku v soutěži jednotlivců přitom dosáhla *Joanna Bogdanowicz* z Polska, která získala 26 bodů. Celkově byly uděleny 2 zlaté, 8 stříbrných a 10 bronzových medailí. Nejlepšího výsledku v soutěži jednotlivců dosáhli z českého družstva *Samuel Říha* (10 b.) a *Tomáš Toufar* (9 b.), kteří obdrželi bronzové medaile.

O něco lépe si vedli naši soutěžící v soutěži družstev. Díky dobře zorganizované strategii řešení všech čtyř úloh obsadili po zásluze velice pěkně 3. místo a domů si tak všichni přivezli cennou bronzovou medaili v soutěži družstev. Před námi skončilo Polsko s celkovým ziskem 31 bodů (ze 32 možných) a Chorvatsko se ziskem 25 bodů. Družstva na 3.–5. místě dosáhla shodně zisku 21 bodů, ale české družstvo (jako jediné z nich) vyřešilo bezchybně – bez ztráty bodu – dvě soutěžní úlohy (2. a 3.), proto

v konečném pořadí obsadilo 3. příčku před Slovenskem a Rakouskem. Na šestém místě skončilo Švýcarsko (19 b.) a sedmí byli Slovinci (18 b.).

Pro soutěžící a ostatní účastníky 1. Středoevropské MO připravili pořadatelé na poslední dva dny jednodenní výlety, a to k Neziderskému jezeru (Neusiedler See) a do Vídně, kde si účastníci soutěže měli možnost prohlédnout pamětihodnosti hlavního města Rakouska.

Slavnostní ukončení soutěže se konalo za přítomnosti zástupců politického života země Burgenland a ministerstva školství Rakouska v kongresovém sále hotelu Ohr v Eisenstadtu. Předseda organizačního výboru 1. Středoevropské olympiády *Univ. Prof. Dr. Gerd Baron* předal všem oceněným medaile a rovněž poděkoval *Mag. Thomasi Mühlgassnerovi*, řediteli BRG v Eisenstadtu, který byl odpovědný za průběh a organizaci 1. Středoevropské MO. Podmínky pro vlastní soutěž v místě konání byly poprávu označeny vedoucími všech delegací za nadstandardní.

Vedoucí českého družstva pozval na tomto jednání všechny delegace k účasti na 2. ročníku Středoevropské matematické olympiády, která se bude konat počátkem září 2008 v České republice, a to pod záštitou *prof. RNDr. Lubomíra Dvořáka, CSc.*, rektora UP v Olomouci, na půdě olomoucké univerzity.

Pro zájemce o řešení úloh olympiádního typu uvádíme závěrem dvě odlišná řešení 1. úlohy ze soutěže jednotlivců. Dlužno podotknout, že tato úloha se ukázala v soutěži jednotlivců jako nejobtížnější.

Řešení 1. úlohy – soutěž jednotlivců. Nechť $p \geq q \geq r \geq s$ je uspořádání prvků uvažované množiny $\{a, b, c, d\}$ kladných reálných čísel, vyhovujících podmínce ze zadání úlohy $a + b + c + d = 4$. Užitím permutační nerovnosti pak dostaneme

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab = a \cdot abc + b \cdot bcd + c \cdot cda + d \cdot dab \leq$$

$$\leq p \cdot pqr + q \cdot pqs + r \cdot prs + s \cdot qrs = (pq + rs)(pr + qs).$$

Dvojím užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro kladná reálná čísla p, q, r, s dále obdržíme

$$(pq + rs)(pr + qs) \leq \left(\frac{pq + rs + pr + qs}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left((p + s)(q + r) \right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \left(\frac{(p+s) + (q+r)}{2} \right)^4 = \frac{1}{64} (a+b+c+d)^4 = 4.$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Vzhledem k tomu, že se nerovnost nezmění pro každou cyklickou permutaci uspořádané čtveřice (a, b, c, d) , můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \geq c$. Podobně lze předpokládat, že $b \geq d$. Pokud by totiž platilo $b \leq d$, dostaneme cyklickou záměnou uspořádané čtveřice (a, b, c, d) čtveřici (d, a, b, c) , v níž $d \geq b$ a současně $a \geq c$. Pak platí

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab = ac(ab + cd) + bd(bc + ad). \quad (1)$$

Pro $a \geq c$ a $b \geq d$ platí $(a-c)(b-d) \geq 0$. Tato nerovnost je tedy ekvivalentní s nerovností

$$ab + cd \geq bc + ad. \quad (2)$$

Využitím nerovnosti (2) a užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro dvojici kladných reálných čísel odhadneme pravou stranu rovnosti (1) následujícím způsobem

$$\begin{aligned} ac(ab + cd) + bd(bc + ad) &\leq ac(ab + cd) + bd(ab + cd) = (ab + cd)(ac + bd) \leq \\ &\leq \left(\frac{(ab + cd) + (ac + bd)}{2} \right)^2 = \left(\frac{(a+d)(b+c)}{2} \right)^2 \leq \\ &\leq \left(\frac{\frac{1}{4}(a+b+c+d)^2}{2} \right)^2 = 4, \end{aligned}$$

což dokazuje dané tvrzení.

Literatura

- [1] Švrček, J.: Ústřední kolo 56. ročníku MO. MFI, roč. 17, 2007/08, č. 1.
- [2] Švrček, J.: 48. Mezinárodní matematická olympiáda. MFI, roč. 17, 2007/08, č. 3.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 139 a 140, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (16.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 139

Určete všechny dvojice a, b přirozených čísel, pro něž jsou hodnoty odmocnin $\sqrt{a^2 - 8b}$ a $\sqrt{b^2 - 8a}$ celá čísla.

Jaromír Šimša

Řešení:

Předpokládejme, že $m = \sqrt{a^2 - 8b}$ a $n = \sqrt{b^2 - 8a}$ jsou celá nezáporná čísla. Bez újmy na obecnosti, s ohledem na symetrii výrazů, předpokládejme, že $a \geq b$. Z této nerovnosti a z nerovnosti $a^2 - 8b \geq 0$ plyne $a^2 \geq 8b \geq 8a$. Podle podmínek úlohy je číslo a přirozené, tedy $a \geq 8$. Odtud a z nerovnosti $b^2 - 8a \geq 0$ plyne $b \geq 8$. Tedy a, b jsou přirozená čísla, pro která platí

$$a \geq b \geq 8. \quad (1)$$

V dalších úpravách užijeme vztah (1) a dostaneme

$$a^2 > a^2 - 8b \geq a^2 - 8a + 8(8 - a) = (a - 8)^2, \quad (2)$$

proto

$$a > m = \sqrt{a^2 - 8b} \geq a - 8.$$

Protože číslo $8b$ je sudé, mají čísla a a m stejnou paritu a podle předchozího vztahu platí

$$m \in \{a - 8, a - 6, a - 4, a - 2\}.$$

Každou z těchto možností vyšetříme zvlášť.

Nechť $m = a - 8$, potom v (2) nastane rovnost, tedy platí $a = b$ a $a = 8$. Snadno ověříme, že čísla $a = 8$ a $b = 8$ vyhovují podmínkám úlohy.

Nechť $m = a - 6$. Potom z definice čísla m plyne

$$8b = a^2 - m^2 = 12a - 36, \quad \text{tedy} \quad b = \frac{3a - 9}{2}$$

a platí

$$n^2 = b^2 - 8a = \frac{9a^2 - 86a + 81}{4} = \frac{\left(3a - \frac{43}{3}\right)^2 - \frac{1120}{9}}{4}.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$1120 = 9 \left(3a - \frac{43}{3}\right)^2 - 36n^2 = (9a - 43 + 6n)(9a - 43 - 6n).$$

Z nerovnosti $9a \geq 9 \cdot 8 > 43$ vidíme, že oba činitele na pravé straně předchozí rovnosti jsou přirozená čísla. Tato čísla navíc při dělení třemi dávají zbytek 2 a číslo $9a - 43 + 6n$ je větší než $9a - 43 - 6n$. Všechny rozklady čísla 1120 na součin přirozených čísel, která při dělení číslem 3 dávají zbytek 2, jsou vyšetřeny v následující tabulce:

$9a - 43 - 6n$	2	5	8	14	20	32
$9a - 43 + 6n$	560	224	140	80	56	35
n	$\frac{93}{2}$	$\frac{73}{4}$	11	$\frac{11}{2}$	3	$\frac{1}{4}$
a	36	$\frac{35}{2}$	13	10	9	$\frac{17}{2}$
$b = \frac{3a-9}{2}$			15		9	

Dvojice $a = 13$, $b = 15$ nevyhovuje předpokladu $a \geq b$, tedy v případě $m = a - 6$ vyhovuje úloze jediná dvojice čísel (a, b) , a to dvojice $(9; 9)$.

Nechť $m = a - 4$. Potom z definice čísla m plyne

$$8b = a^2 - m^2 = 8a - 16, \quad \text{tedy} \quad b = a - 2$$

a platí

$$n^2 = b^2 - 8a = a^2 - 12a + 4 = (a - 6)^2 - 32.$$

Tento vztah dále upravíme

$$32 = (a - 6)^2 - n^2 = (a - 6 - n)(a - 6 + n).$$

Z nerovnosti $a \geq 8$ vidíme, že oba činitele na pravé straně předchozí rovnosti jsou přirozená čísla. Vzhledem k tomu, že rozdíl činitelů na pravé straně je $2n$, mají oba činitele stejnou paritu, přitom $a - 6 - n < a - 6 + n$. Všechny rozklady čísla 32 na součin přirozených čísel, která mají stejnou paritu, jsou vyšetřeny v následující tabulce:

$a - 6 - n$	2	4
$a - 6 + n$	16	8
n	7	2
a	15	12
$b = a - 2$	13	10

V případě $m = a - 4$ vyhovují úloze dvě dvojice čísel (a, b) , a to dvojice $(15; 13)$ a $(12; 10)$.

Nechť $m = a - 2$. Potom z definice čísla m plyne

$$8b = a^2 - m^2 = 4a - 4, \quad \text{tedy} \quad a = 2b + 1$$

a platí

$$n^2 = b^2 - 8a = b^2 - 16b - 8 = (b - 8)^2 - 72.$$

Tento vztah dále upravíme

$$72 = (b - 8)^2 - n^2 = (b - 8 - n)(b - 8 + n).$$

Z nerovnosti $b \geq 8$ vidíme, že oba činitele na pravé straně předchozí rovnosti jsou přirozená čísla. Vzhledem k tomu, že rozdíl činitelů na pravé straně je $2n$, mají oba činitele stejnou paritu, přitom $b - 8 - n < b - 8 + n$. Všechny rozklady čísla 72 na součin přirozených čísel, která mají stejnou paritu, jsou vyšetřeny v následující tabulce:

$b - 8 - n$	2	4	6
$b - 8 + n$	36	18	12
n	17	7	3
b	27	19	17
$a = 2b + 1$	55	39	35

V případě $m = a - 2$ vyhovují úloze tři dvojice čísel (a, b) , a to dvojice $(55; 27)$, $(39; 19)$ a $(35; 17)$.

Je-li (a, b) dvojice přirozených čísel, která řeší úlohu, pro kterou platí $a \geq b$, potom i dvojice (b, a) řeší úlohu. Všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž jsou hodnoty odmocnin $\sqrt{a^2 - 8b}$ a $\sqrt{b^2 - 8a}$ celá čísla, jsou z množiny

$$\{(8; 8), (9; 9), (12; 10), (15; 13), (35; 17), (39; 19), (55; 27), \\ (10; 12), (13; 15), (17; 35), (19; 39), (27; 55)\}$$

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Miroslav Klimoš* z GMK v Bílovci a *Samuel Říha* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše.

Neúplné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Le Duc Khanh Chuong* z GChD v Praze.

Úloha 140

Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníku ABC a ϱ poloměr kružnice jemu vepsané. Pak platí nerovnost

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4\varrho^2}.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastává rovnost.

Jaroslav Švrček

Řešení:

Nejprve dokážeme tvrzení: Nechť α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku. Potom platí

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1. \quad (3)$$

Důkaz: Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° , platí tedy $\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Vyjádříme $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ pomocí zbývajících úhlů.

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = \operatorname{cotg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}.$$

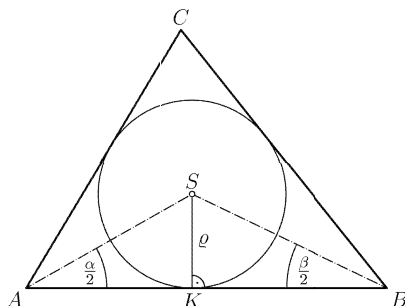
Odtud již plyne

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 1, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Nyní přistupme k řešení dané úlohy. Velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A , B , C trojúhelníku ABC označme α , β , γ . Označme dále S střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a K její dotykový bod se stranou AB . Bod S je průsečíkem os úhlů CAB a CBA , velikosti úhlů SAK a SBK jsou po řadě $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ (viz obr.). Máme

$$\begin{aligned} c = |AB| &= |AK| + |KB| = |SK| \cotg \frac{\alpha}{2} + |SK| \cotg \frac{\beta}{2} = \\ &= \varrho \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \right). \end{aligned}$$



Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem čísel $\cotg \frac{\alpha}{2}$ a $\cotg \frac{\beta}{2}$ platí

$$\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \geq 2\sqrt{\cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2}},$$

příčemž rovnost nastane, právě když $\alpha = \beta$. Odtud získáme

$$c = \varrho \left(\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \frac{\beta}{2} \right) \geq 2\varrho \sqrt{\cotg \frac{\alpha}{2} \cotg \frac{\beta}{2}},$$

což upravíme na tvar

$$\frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4\varrho^2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

Cyklickou záměnou dále dostaneme

$$\frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4\varrho^2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{4\varrho^2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Sečtením těchto vztahů a užitím identity (3) získáme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4\varrho^2} \left(\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right) = \frac{1}{4\varrho^2},$$

což jsme chtěli dokázat. Rovnost zde nastane, právě když $\alpha = \beta = \gamma$, tedy pro rovnostranný trojúhelník.

Jiné řešení:

Pro obsah P trojúhelníku ABC platí $P = s\varrho$, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Podle Heronova vzorce obsah trojúhelníku vypočteme

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Tedy platí $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = s\varrho$, odkud plyne

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\varrho^2} &= \frac{s}{4(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{4(s-a)(s-b)(s-c)} = \\ &= \frac{1}{4(s-b)(s-c)} + \frac{1}{4(s-a)(s-c)} + \frac{1}{4(s-a)(s-b)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro kladná (podle trojúhelníkové nerovnosti) čísla $s-a$ a $s-b$ platí

$$c = (s-a) + (s-b) \geq 2\sqrt{(s-a)(s-b)},$$

přičemž rovnost nastává, právě když $a = b$. Tuto nerovnost upravíme na tvar

$$\frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4(s-a)(s-b)}.$$

Cyklickou záměnou dostaneme

$$\frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{4(s-b)(s-c)}, \quad \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4(s-a)(s-c)}.$$

Sečtení těchto tří nerovností s využitím (4) dostaneme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4(s-b)(s-c)} + \frac{1}{4(s-a)(s-c)} + \frac{1}{4(s-a)(s-b)} = \frac{1}{4\varrho^2},$$

což jsme chtěli dokázat. Rovnost nastává, právě když $a = b = c$, tedy právě když je daný trojúhelník rovnostranný.

Jiné řešení (podle Karola Gajdoše):

Podle vztahu (4) platí

$$\frac{1}{4\varrho^2} = \frac{s}{4(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{a+b+c}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

a daná nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$\begin{aligned} \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{4\varrho^2} = \frac{a+b+c}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Uvědomme si, že platí

$$\begin{aligned} b^2c^2(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) &= \\ &= b^2c^2(-a+b+c)(a^2 - (b-c)^2) = \\ &= b^2c^2(-a+b+c)a^2 - b^2c^2(-a+b+c)(b-c)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Vynásobíme obě strany nerovnosti (5) jmenovateli výrazů na obou stranách této nerovnosti, výrazy na levé straně upravíme podle (6) a po úpravě dostaneme nerovnost ekvivalentní s (5) ve tvaru

$$\begin{aligned}
& -b^2c^2(-a+b+c)(b-c)^2 - c^2a^2(a-b+c)(c-a)^2 - \\
& -a^2b^2(a+b-c)(a-b)^2 + \\
& + a^2b^2c^2(-a+b+c) + a^2b^2c^2(a-b+c) + a^2b^2c^2(a+b-c) \leq \\
& \leq a^2b^2c^2(a+b+c).
\end{aligned}$$

Tato nerovnost je ovšem ekvivalentní s nerovností

$$0 \leq b^2c^2(-a+b+c)(b-c)^2 + c^2a^2(a-b+c)(c-a)^2 + a^2b^2(a+b-c)(a-b)^2,$$

která zřejmě platí, jelikož výrazy na pravé straně jsou podle trojúhelníkové nerovnosti vesměs nezáporná čísla. Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když $a = b = c$.

Poznámka. Lze ukázat, že identita (3) platí i v obrácené podobě. Necht' x , y , z jsou kladná reálná čísla taková, že platí

$$xy + yz + zx = 1,$$

potom existuje trojúhelník s vnitřními úhly α , β , γ takový, že platí

$$x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jan Čapek* z G v Duchcově, *Martin Michálek* z GJKT v Hradci Králové a *Josef Ondřej* z G v Rožnově p. Radhoštěm.

Neúplné řešení zaslali *Vladimír Pavel* z Blovic a *Le Duc Khanh Chuong* z GChD v Praze.

Cestou do redakce našeho časopisu se zatoulala správná řešení úloh **135** a **136** *Karola Gajdoše* z Trnavy, čímž se mu omlouváme a zařazujeme ho mezi úspěšné řešitele těchto úloh.