

MATEMATIKA

Pražský orloj a stereografická projekce

MICHAL KRÍŽEK – JAKUB ŠOLC – ALENA ŠOLCOVÁ

Matematický ústav AV ČR, Praha – Stavební fakulta ČVUT, Praha

1. Úvod

Tento příspěvek je volným pokračováním článku [8]: *Jaká matematika se ukrývá v pražském orloji?* Vytvoření matematicko-mechanického modelu pražského orloje se připisuje Janu Šindelovi¹ kolem roku 1410. Na jeho počest jsme v práci [8] zavedli pojem šindelovské posloupnosti, s jejíž pomocí jsme pak ukázali, jak bicí stroj orloje souvisí s trojúhelníkovými čísly. V tomto příspěvku se budeme zabývat jistou speciální geometrickou transformací, která byla použita při konstrukci orloje.

Pražský orloj je umístěn v dolní části Staroměstské radniční věže vysoké přibližně 59 metrů.² Jeho astronomický ciferník (viz obr. 1) je astroláb³ poháněný hodinovým strojem. Znázorňuje geocentrický model vesmíru s nehybnou Zemí uprostřed, kolem níž obíhá Slunce, Měsíc a znamení zvěrokruhu nebeské sféry. Orloj tak vlastně představuje jeden z prvních analogových počítačů, neboť ukazuje pohyby nebeských těles.

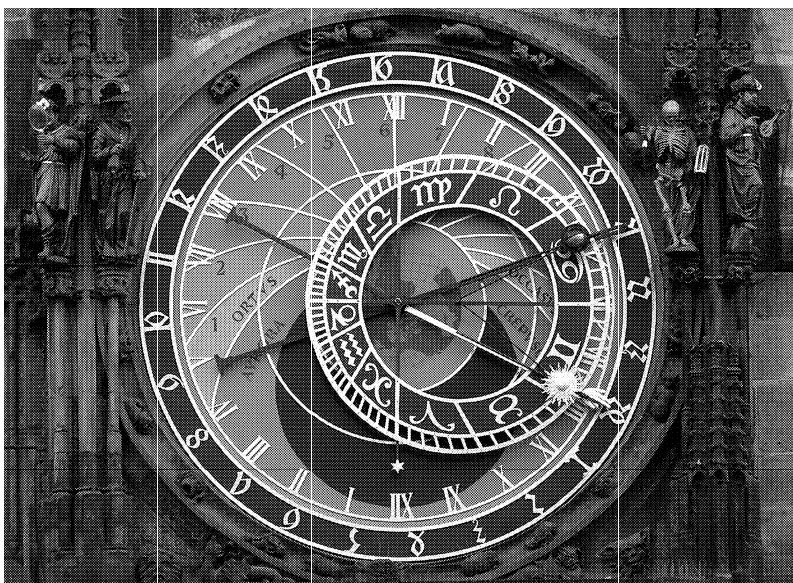
Při návrhu astronomického ciferníku byla použita stereografická projekce nebeské sféry na rovinu. V případě pražského orloje si nebeskou sféru představme jako kulovou plochu o poloměru cca 40 cm (viz obr. 2). Střed

¹Jan Ondřejův, zvaný Šindel (cca 1375 – cca 1457), roku 1399 se stal mistrem svobodných umění na pražské univerzitě a v roce 1410 zde byl zvolen rektorem, napsal několik matematických a astronomických pojednání – např. *Canones pro eclipsibus Solis et Lune*.

²Tato výška je rovna stu pražských loktů, což byla tehdejší jednotka míry. Některé prameny uvádějí nesprávnou výšku věže 70 metrů.

³Astroláb je starověký astronomický úhломěrný přístroj k určování poloh nebeských těles a místního času.

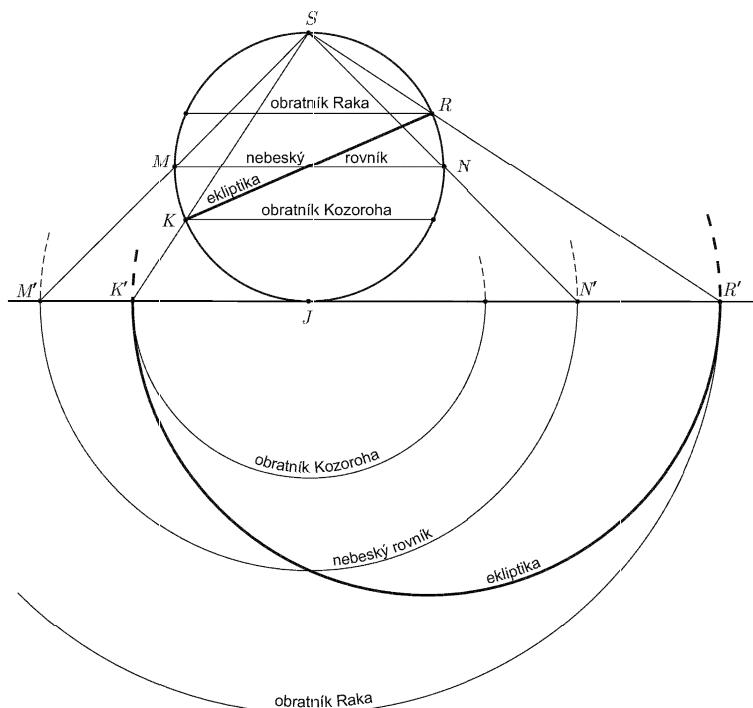
promítání S je umístěn v severním pólu kulové plochy a projekční rovina je k ní tečná s bodem dotyku v jižním pólu J . Střed astronomického ciferníku (viz obr. 1) tedy odpovídá jižnímu pólu nebeské sféry. Nejmenší vnitřní kružnice se středem v jižním pólu znázorňuje obratník Kozoroha na nebeské sféře, zatímco vnější soustředná kružnice obratník Raka. Mezi těmito kružnicemi je na ciferníku ještě umístěna další soustředná kružnice představující rovník nebeské sféry (viz obr. 1 a 2).



Obr. 1 Astronomický ciferník pražského orloje.

V době zimního slunovratu dne 21. prosince se sluneční ukazatel nachází na obratníku Kozoroha. Pak se od něj po spirále postupně vzdaluje, až o letním slunovratu 21. června dosáhne obratníku Raka. Dalšího půl roku se zase pomalu přibližuje k obratníku Kozoroha. Přitom v době jarní a podzimní rovnodennosti se sluneční ukazatel nachází na nebeském rovníku (srov. [12, s. 148]).

Důležitou vlastností stereografické projekce je, že každá kružnice, jež neprochází severním pólem, se opět zobrazí na kružnici (viz věta 2). Proto ekliptika, tj. dráha Slunce po nebeské sféře, zobrazuje na kružnici (viz obr. 2). Její střed ale není ve středu ciferníku, ale celá ekliptika se kolem



Obr. 2 Stereografická projekce obratníků Raka a Kozoroha, nebeského rovníku a ekliptiky (nahore bokorys, dole půdorys). Průměr $|JS|$ dané koule je roven poloměru $|JN'|$ stereografické projekce rovníku.

tohoto bodu excentricky otáčí (viz obr. 1). Ekliptika je na ciferníku orloje znázorněna zlatým prstencem. Po jeho vnitřní straně je na černém podkladu rozmístěno 12 znamení zvěrokruhu (tj. zodiaku nebo též zvířetníku). Na ekliptice lze pozorovat přibližnou polohu Slunce, Měsíce⁴ a jeho fází. Sluneční i měsíční ukazatel je posuvně uchycen na příslušné rafií hodinového stroje a je tenkou ojnicí spojen se středem ekliptiky, aby na ní stále zůstal. Astronomický ciferník orloje také umožňuje zjišťovat východy, kulminace a západy jednotlivých znamení zvěrokruhu. Shodou okolností střed naší Galaxie leží v souhvězdí Střelce, jehož znamení je na prstenci

⁴Dráha Měsíce neleží v rovině ekliptiky, ale je od ní skloněna přibližně o úhel $i = 5^\circ$, což se na astronomickém ciferníku pro jednoduchost zanedbává.

ekliptiky znázorněno zlatou šipkou (viz obr. 1). Z postavení prstence tedy můžeme také přibližně určit, kde se právě nachází střed Galaxie. Ekliptika se dotýká obou obratníků ve dvou protilehlých bodech K a R (viz obr. 1 a 2). Její střed leží ve středu spojnice těchto bodů.

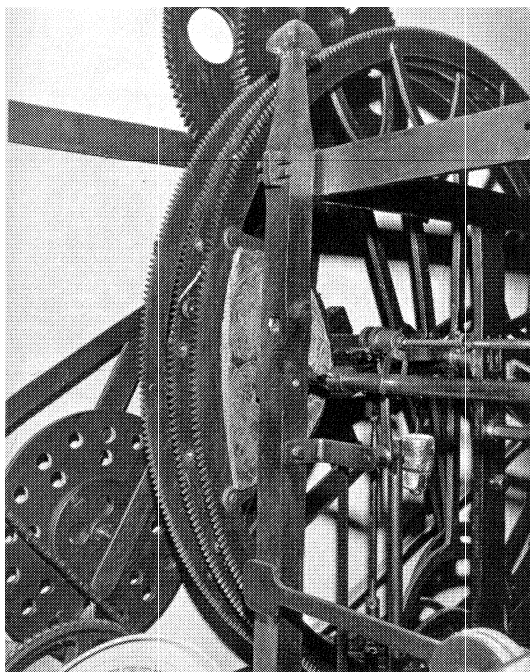
Rafie, na jejímž konci je uchycena pozlacená ruka, ukazuje *středoevropský čas* (SEČ) na stupnici s římskými číslicemi. Poznamenejme, že rozdíl mezi SEČ a původním pražským časem je jen 138 sekund, neboť Praha leží v blízkosti patnáctého poledníku.

Sluneční ukazatel, který je posuvně upevněn na těžé rafii, tak oběhne Zemi nakreslenou uprostřed ciferníku jednou za den. Zlaté arabské číslice na vnějším černém prstenci slouží k označení *staročeského času*, který se počítal od západu Slunce (viz [3, s. 50]). Tento prstenec se v průběhu roku pozvolna kývavě natáčí o $\pm 30^\circ$. Černé arabské číslice u zlatých kruhových oblouků označují planetní hodiny, pro něž je jedna hodina definována jako $1/12$ doby mezi východem a západem Slunce. Sluneční ukazatel pak určuje odpovídající *babylónský čas*, jenž se počítá od východu Slunce. Konečně ručička s malou šesticípou hvězdičkou (viz obr. 1), která je umístěna mezi znameními Berana a Ryb a pevně spojena s prstencem ekliptiky, ukazuje přibližně *hvězdný čas*.⁵ To je hodinový úhel *jarního bodu*, tj. bodu, v němž Slunce přechází nebeský rovník z jižní polokoule nebeské sféry na severní polokouli. V důsledku precese zemské osy se ale jarní bod posunuje po ekliptice o $50,26''$ za rok. Proto se poloha znamení zvěrokruhu na nebeské sféře mění, zatímco poloha zvířetníkových a dalších souhvězdí je v podstatě neměnná. Jarní bod se tak v současnosti nachází v souhvězdí Ryb.

Černě vybarvený kruh v dolní části ciferníku znázorňuje astronomickou noc, kdy je Slunce níže než 18° pod horizontem. Načervenalá oblast označená AVRORA odpovídá svítání a CREPVSCVLVM stmívání (soumraku). Východ Slunce je označen ORTVS a západ OCCASVS. Modře obarvená oblast znamená den.

Součástí hlavního hodinového stroje je stroj ukazovací, jenž obsahuje 3 stejně velká souosá ozubená kola o průměru 116 cm z počátku 15. století s ručně vysekanými a pak vypilovanými zuby (viz obr. 3). Země se za rok (tj. přibližně za 365 dní) otočí kolem své osy zhruba 366krát. Této skutečnosti jsou přizpůsobeny i počty zubů na prvních dvou kolech. První kolo má 365 zubů a otočí prstencem ekliptiky přibližně jednou za hvězdný den

⁵Hvězdný den začíná okamžikem, kdy jarní bod prochází místním poledníkem (vrcholí) – viz [10, s. 50].



Obr. 3 Ukazovací stroj orloje obsahuje tři ozubená souosá kola otáčející prstencem ekliptiky, slunečním a měsíčním ukazatelem. Na prvním kole, které otáčí excentricky umístěnou ekliptikou, je připevněna olověná protiváha.

(tj. za 23 hodin 56 minut a 4 sekundy) a 366krát za rok. Druhé kolo, které má 366 zubů, otočí sluneční ukazatel jednou za střední sluneční den (tj. za 24 hodin) a 365krát za rok. Sluneční ukazatel se tedy posune vzhledem ke zvěrokruhu o jeden zub denně. Třetí kolo má 379 zubů⁶ a rotuje v souladu se středním zdánlivým pohybem Měsíce, jak ukážeme níže. Protože oběh Měsíce kolem Země není nikterak synchronizován s rotací Země kolem vlastní osy ani s dobou oběhu Země kolem Slunce, zmíněné počty zubů

⁶Podle Gaussovy věty [7, s. 2] nelze pomocí kružítko a pravítka rozdělit kružnici na 379 stejně dlouhých dílů, protože prvočíslo 379 není tvaru $2^n + 1$. Jedna z možností, jak mohlo být rovnoměrně vypilováno po obvodu měsíčního kola 379 zubů, je vzít provázek stejně dlouhý jako obvod kola. Natažený provázek lze pomocí podobnosti rozdělit značkami na 379 stejně dlouhých dílků. Pak stačí provázek obtočit kolem kola a značky na kolo přenést.

365, 366 a 379 umožňují jen přibližně znázornit skutečné polohy těchto těles. Hlavní hodinový stroj od počátku otáčel prodlouženou hřídelí, na které byla pevně umístěna tři kolečka o 24 zubech, jež zabírala do tří velkých kol. Tím se dosáhlo toho, že se zvěrokruh, Slunce a Měsíc otáčejí kolem Země různými úhlovými rychlostmi.

Měsíc dorazí do téže polohy se Sluncem jednou za 29,53 dne, což je tzv. *synodická doba oběhu* (od novu k novu). Tomu jsou přizpůsobeny počty zubů na třetím kole. Měsíční ukazatel se opozdí za slunečním o $379 - 366 = 13$ zubů za den. To odpovídá úhlu $(1 - 366/379) \cdot 360^\circ = 12,348^\circ$, což poměrně dobře vystihuje skutečnost, že se Měsíc každý den⁷ posune po ekliptice od Slunce směrem na východ v průměru o $12,191^\circ = 360^\circ/29,53$. Snadno se můžete přesvědčit, že 378 nebo 380 zubů měsíčního kola by nevystihovalo tak dobře skutečný posun Měsíce. V roce 1865 začalo být měsíční kolo poháněno tzv. diferenčním (opravovacím) strojem, který pohyb měsíčního ukazatele ještě více zpřesnil (viz [10, s. 96]). Přesto se poloha tohoto ukazatele musí vícekrát ročně mírně upravovat, mj. také proto, že dráha Měsíce je eliptická.

Jelikož je i dráha Země mírně eliptická, Slunce se nepohybuje po ekliptice rovnoměrně. Z tohoto důvodu se v současnosti také natočení prstence ekliptiky dvakrát do roka přizpůsobuje skutečné poloze Slunce.

Kolo pohánějící ekliptiku má plnou osu. Sluneční kolo má dutou osu, která obklopuje osu prvního kola. Třetí měsíční kolo má rovněž dutou osu obklopující osy prvních dvou kol.

Měsíční ukazatel je dutá koule (viz obr. 1), jejíž jedna polovina je natřena černě. Uvnitř je skryt důmyslný mechanismus s ozubeným kolem a olověným závažíčkem, který otáčí Měsícem a ukazuje tak jeho fáze. Energie potřebná k jeho otáčení se získává z pohybu prstence ekliptiky.

Dolní ciferník orloje obsahující kopie 12 velkých a 12 malých kruhových Mánesových obrazů⁸ představuje kalendář. Otáčí se velice pomalu – jedna otočka trvá celý rok. Pozlacená střelka v horní části ciferníku ukazuje příslušný den v roce, informuje o svátcích aj. (viz [3, s. 58]).

⁷Za hodinu se Měsíc na ekliptice posune od Slunce zhruba o půl stupně a za minutu o $30''$. Za 40 sekund se tedy posune o úhel $20''$, který odpovídá sluneční aberaci světla (viz [6, s. 157–159]). Proto při úplném zatmění Slunce jsou Země, Měsíc a Slunce v přímce až 40 sekund po středu zatmění.

⁸Originál kalendářní desky je uložen v Městském muzeu v Praze. Kopii umístěnou na orloji v dnešní době zhotovil *Bohumír Číla*.

2. Vlastnosti stereografické projekce

Podobně jako v předchozí kapitole bude S střed promítání a J jeho protější bod na dané kulové ploše. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že její poloměr je 1. Nechť σ , resp. ρ je tečná rovina procházející bodem S , resp. J .

Na kulové ploše zvolme libovolný bod A různý od S a označme (x, z) jeho souřadnice v rovině AJS (tj. v rovině meridiánového řezu). Počátek souřadnic přitom umístíme do bodu $J = (0, 0)$, osa x bude vodorovná a osa z svislá (srov. obr. 2). Pomocí poměru $x' : 2 = x : (2 - z)$ se lze přesvědčit, že souřadnice (x', z') stereografické projekce A' bodu A v téže rovině jsou

$$A' = (x', 0) = \left(\frac{2x}{2-z}, 0 \right).$$

Protože A leží na kružnici $x^2 + (z-1)^2 = 1$, můžeme pro $x \geq 0$ vyjádřit první souřadnici bodu A' jen jako funkci jedné proměnné $z \in \langle 0; 2 \rangle$,

$$x' = \frac{2x}{2-z} = \frac{2\sqrt{1-(z-1)^2}}{2-z} = \frac{2\sqrt{2z-z^2}}{2-z} = 2\sqrt{\frac{z}{2-z}}$$

(případ $x < 0$ by se vyšetřoval analogicky). Funkce $f : \langle 0; 2 \rangle \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$ definovaná vztahem

$$f(z) = 2\sqrt{\frac{z}{2-z}} \quad (1)$$

je zřejmě rostoucí. Jestliže totiž pro $z_1, z_2 \in \langle 0, 2 \rangle$ platí $z_1 < z_2$, pak

$$\frac{z_1}{2-z_1} < \frac{z_2}{2-z_1} < \frac{z_2}{2-z_2}$$

a po odmocnění pravé a levé strany vidíme, že $f(z_1) < f(z_2)$.

Funkce f je navíc tzv. vzájemně jednoznačné zobrazení, protože pro dané $x' \in \langle 0; \infty \rangle$ platí $x' = f(z)$ pro $z = 2x'^2/(4 + x'^2)$. Její vlastnosti použijeme v důkazu věty 2.

Věta 1. Kružnice ležící na kulové ploše a procházející středem promítání se při stereografické projekci zobrazí na přímku.

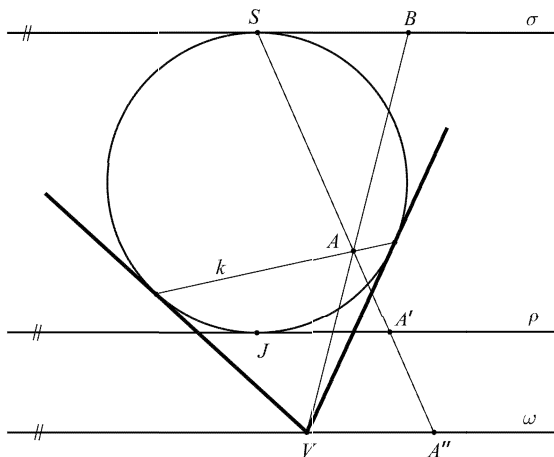
Důkaz. Nechť k je libovolná kružnice na kulové ploše procházející středem promítání S . Kružnice k určuje rovinu, ve které leží i střed promítání, a proto v této rovině musí ležet i stereografický průmět k . Zároveň ale musí

ležet v projekční rovině ρ . Protože tyto dvě roviny nejsou rovnoběžné, jejich průnikem je hledaná přímka. Každý její bod A' je stereografickým obrazem právě jednoho bodu A kružnice k (různého od S), tj. úsečka SA' protíná kružnici k v bodě A . Tím je důkaz ukončen.

Dále připomeňme, že *hlavní kružnice* na dané kulové ploše je taková kružnice, jejíž střed leží ve středu kulové plochy. Např. rovník či ekliptika jsou příklady hlavních kružnic na kulové ploše reprezentující nebeskou sféru (viz obr. 2). Následující věta ukazuje, že se ekliptika při stereografické projekci zobrazuje na kružnici. Proto je ekliptika na pražském orloji znázorněna vnějším okrajem kruhového prstence se zlatou obručí opatřenou stupnicí.

Věta 2. Kružnice ležící na kulové ploše a neprocházející středem promítání se při stereografické projekci zobrazí opět na kružnici.

Důkaz. Necht k je libovolná kružnice na kulové ploše neprocházející středem promítání S . Předpokládejme nejprve, že k není hlavní kružnicí, a uvažujme tečný kužel ke kulové ploše, který se jí dotýká právě v dané kružnici (viz obr. 4). Vrcholem V kužele vedme rovinu ω , která je rovnoběžná s projekční rovinou ρ . Dále budeme nejprve promítat na rovinu ω místo na ρ . Zvolme libovolně bod A na kružnici k a sestrojme jeho stereografický průmět $A'' \in \omega$.



Obr. 4 Stereografická projekce bodu A ležícího na kružnici k .

Protože roviny ρ a ω jsou rovnoběžné, bude stereografická projekce kružnice k do roviny ρ také kružnice o poloměru $c|A''V|$, kde $c = |A'S|/|A''S|$ je koeficient podobnosti a A' je stereografická projekce bodu A do roviny ρ . Koeficient c je přitom nezávislý na volbě A , neboť je roven poměru vzdáleností bodu S od rovin ρ a ω .

Z předchozí části důkazu víme, že c_n , resp. d_n se zobrazí opět na kružnici c'_n , resp. d'_n . Přitom d'_n bude zcela uvnitř c'_n , neboť kružnice c_n a d_n se nikde neprotínají a funkce (1) je rostoucí.

Stereografická projekce $A' \in \rho$ bodu $A \in k$ bude ležet uvnitř úsečky $C'_n D'_n$ pro všechna $n \geq n_0$. Vidíme, že $C_n \rightarrow A$ a $D_n \rightarrow A$ pro $n \rightarrow \infty$. Protože je funkce (1) spojitá, bude též $C'_n \rightarrow A'$ a $D'_n \rightarrow A'$ pro $n \rightarrow \infty$, tj. $|C'_n D'_n| \rightarrow 0$. Stereografický obraz k bude tedy také kružnice. Tím je důkaz ukončen.

V důkazu věty 2 je v řadě prací (viz např. [1, s. 363], [4, s. 341], [5, s. 533]) opomenut případ, kdy k je hlavní kružnice. Jiný důkaz opírající se o analytickou geometrii v trojrozměrném prostoru je podán v [2, s. 374–376] a [9, s. 23–27].

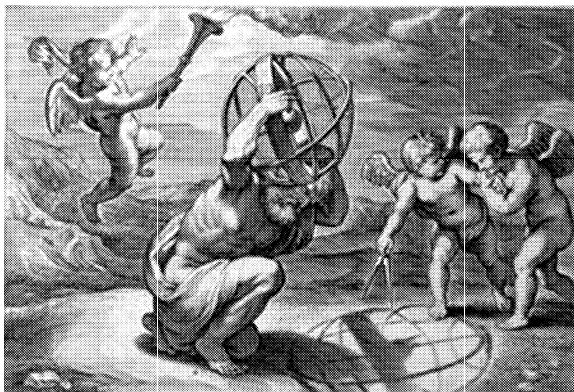
Další důležitá vlastnost stereografické projekce je, že se zachovávají úhly (viz [4, s. 342]). Úhel $23,5^\circ$, pod kterým se protíná ekliptika s nebeským rovníkem, se tedy v projekci nezmění (srov. obr. 1 a 2).

3. Závěrečné poznámky

Při rekonstrukci astronomického ciferníku orloje kolem roku 1865 restaurátoři omylem vyrobili prstenec ekliptiky stejně velký jako nebeský rovník a ekliptika se přitom nedotýkala žádného z obratníků. Na sféře reprezentující hvězdnou oblohu má sice ekliptika i nebeský rovník stejný průměr $|KR| = |MN|$ – viz obr. 2, ale pro stereografické průměty platí $|K'R'| > |M'N'|$. Až po zásahu matematika Františka J. Studničky a astronoma Karla Hornsteina (viz [12, s. 136]) byla k prstenci ekliptiky přinýtována větší zlatá obruč tak, že každé znamení zvěrokruhu je rozděleno na 6 dílků po pěti stupních, a to umožňuje přibližně stanovit i datum. I když se takto zvětšená ekliptika již začala dotýkat obou obratníků, poloha slunečního ukazatele dodnes zůstala na nesprávné kružnici (viz obr. 1). Přitom by stačilo prodloužit ojnice slunečního a měsíčního ukazatele jen o 7 cm.

Vlastnosti stereografické projekce, kterými jsme se zabývali v předchozí kapitole, popsal již řecký matematik a astronom *Klaudios Ptolemaios* (cca 90 – 160 n. l.) v dílech *Geographia* a *Planisphaerium* (viz [9, s. 38], [11, s. 84]). Termín „stereografická projekce“ zavedl roku 1613 vlámský matematik a fyzik *François d'Aguiilon* v díle *Šest knih o optice pro filosofy i matematiky*, kterou ilustroval slavný malíř *Peter Paul Rubens* (obr. 6).

Poznamenejme ještě, že většina astrolábů a orlojů, které vznikly po roce 1450, má střed promítání v jižním pólu nebeské sféry, aby bylo možno určovat polohy hvězd v okolí severního pólu. Konstrukci astrolábu se věnuje též komentovaný překlad [2] spisu Křišťana z Prachatic. Někteří historikové připisují konstrukci prvního astrolábu již Hipparchovi ve 2. stol. př. n. l.



Obr. 6

S astrolábem se setkáváme též na líci některých kovových dvacetikorun (vydaných v roce 2000).

Literatura

- [1] *G. Čeněk, V. Medek*: Deskriptivna geometria SVTL, Bratislava, 1959.
- [2] *A. Hadravová, P. Hadrava*: Křišťan z Prachatic: Stavba a užití astrolábu, Filosofia – nakl. Filosofického ústavu AV ČR, Praha, 2001.
- [3] *Z. Horský*: Pražský orloj, Panorama, Praha, 1988.
- [4] *F. Kadeřávek, J. Klíma, J. Kounovský*: Deskriptivní geometrie I, Nakl. Československé akademie věd, Praha, 1954; vydala též JČMF nákladem Přírodovědeckého nakl. v Praze 1950 (3. vydání).
- [5] *J. Kounovský, F. Vyčichlo*: Deskriptivní geometrie, Nakl. Československé akademie věd, Praha, 1959.
- [6] *M. Křížek*: Význam úhlových měření při poznávání vesmíru, Pokroky mat. fyz. astronom. **51** (2006), s. 147–162.
- [7] *M. Křížek, F. Luca, L. Somer*: 17 lectures on Fermat numbers: From number theory to geometry, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [8] *M. Křížek, L. Somer, A. Šolcová*: Jaká matematika se ukrývá v pražském orloji?, Matematika-fyzika-informatika, roč. 16, (2006/2007), s. 128–137.
- [9] *B. A. Rosenfeld, N. D. Sergeeva*: Stereographic projection, Mir Publishers, Moscow, 1977.
- [10] *V. Rosický*: Staroměstský orloj v Praze, nakl. J. Otto, Praha, 1923.
- [11] *G. Truffa*: Mapování nebe ve středověké Evropě, Astronomie ve středověké vzdělanosti (A. a P. Hadravovi eds.), AÚ a VCDV AV ČR, Praha, 2003, s. 83–89.
- [12] *V. Vojtíšek*: Radnice staroměstská v Praze, nakl. A. B. Černý, Praha, 1923.

O sedminové elipse a třináctinové hyperbole II

(Řešení úlohy s odkazem na [www stránky](#))

MILAN KOMAN

Pedagogická fakulta UK, Praha

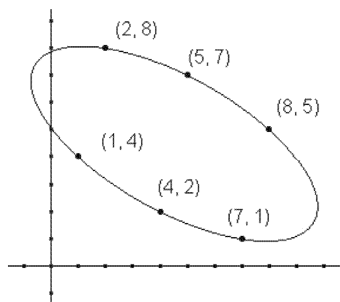
Připomeňme si nejdříve konstrukci sedminové elipsy, kterou jsme popsali v první části příspěvku [1]. Převédeme zlomek $\frac{1}{7}$ na nekonečný desetinný rozvoj:

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857$$

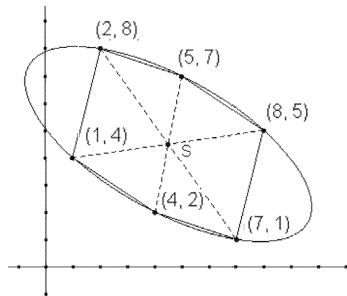
Pomocí periody 142857 vytvoříme souřadnice šesti bodů, které dostaneme jako cyklicky po sobě jdoucí dvojice číslic této periody

$$(1, 4), (4, 2), (2, 8), (8, 5), (5, 7), (7, 1).$$

Uvedli jsme, že těmito šesti body prochází jediná elipsa, kterou jsme nazvali sedminovou elipsou (obr. 1).



Obr. 1



Obr. 2

Tvrzení, že všech 6 uvažovaných bodů leží skutečně na jediné elipse, jsme však uvedli bez důkazu. Zároveň jsme vyzvali čtenáře, aby se sami pokusili toto tvrzení dokázat.

Řešení uvedeme nyní. Je až překvapivě jednoduché. Vůbec nemusíme používat analytickou geometrii. Stačí si uvědomit, že zobrazených šest bodů tvoří vrcholy středově souměrného šestiúhelníku. Jeho středem S je společný střed úseček spojujících dvojice bodů

$$(1, 4) \text{ a } (8, 5), \quad (4, 2) \text{ a } (5, 7), \quad (7, 1) \text{ a } (2, 8), \quad (*)$$

viz obr. 2.

Sestrojíme-li kuželosečku z kterýchkoliv pěti bodů, vždy je mezi nimi čtveřice, která tvoří vrcholy rovnoběžníka. Jeho střed S je tak středem sestrojené elipsy. Protože elipsa je středově souměrná křivka, musí i šestý bod, který jsme ke konstrukci nepoužili, ležet na této elipse.

Zbývá jen dodat, proč sestrojených šest bodů tvoří vrcholy středově souměrného šestiúhelníku. To však vyplývá z vlastnosti periody 142857 desetinného rozvoje čísla $\frac{1}{7}$. Platí totiž, že součet první a čtvrté číslice, druhé a páté číslice a také třetí a šesté číslice jsou stejné:

$$1 + 8 = 4 + 5 = 2 + 7 = 9.$$

Souřadnice středu S všech tří úseček spojujících body $(*)$ jsou proto rovny $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$.

Stejný důkaz platí i pro třináctinovou hyperbolu sestrojenou ze šesti bodů

$$(0, 7), (7, 6), (6, 9), (9, 2), (2, 3), (3, 0)$$

odvozených z periody 076923 desetinného rozvoje čísla

Uvedené body jsou i v tomto případě vrcholy středově souměrného šestiúhelníku.

Příklady sedminové elipsy a třináctinové hyperboly můžeme zobecnit na další „**zlomkové**“ kuželosečky. Ukážeme si to na „devětáctinové“ elipse, kterou dostaneme z periodického desetinného rozvoje zlomku

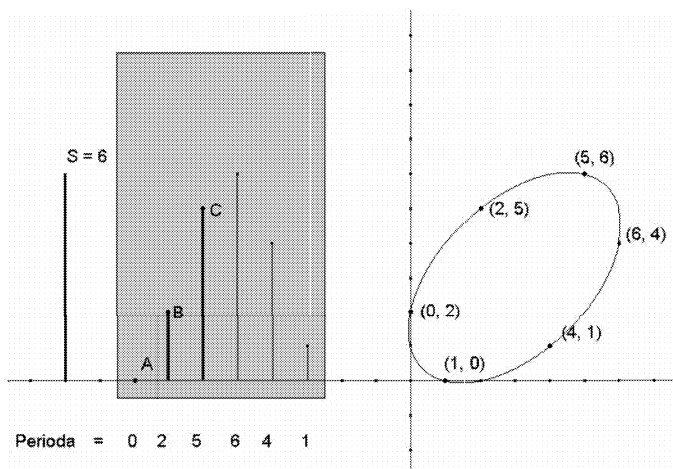
$$\frac{1}{13} = 0,076923\,076923\,076923 \dots$$

Tento desetinný rozvoj má tři potřebné vlastnosti:

- (i) jeho perioda má délku 6;
- (ii) v jeho periodě mají první a čtvrté číslice, druhé a páté číslice a také třetí a šesté číslice stejné součty. V našem případě dostaneme součet $S = 0 + 6 = 2 + 4 = 5 + 1 = 6$;

(iii) postupem, který jsme použili již pro sedminovou elipsu a třináctinovou hyperbolu dostaneme šest různých bodů. V našem případě dostaneme body

$$(0, 2), (2, 5), (5, 6), (6, 4), (4, 1), (1, 0).$$



Obr. 3

Devětatřicetinovou elipsu vidíte na pravé straně obrázku 3. Otevřete-li si webové stránky časopisu MFI [2], můžete si s tímto obrázkem pohrát a sestrojovat další zlomkové kuželosečky.

Jak pracovat s obrázkem 3 na webu

Zlomkové kuželosečky budeme měnit. Ukážeme si to na příkladu kuželosečky generované zlomkem

$$\frac{12}{13} = 0,923076\ 923076\ 923076\ \dots$$

Desetinný rozvoj zlomku má šesticifernou periodu 923076 (je splněna podmínka (i)). Všechny tři součty první a čtvrté číslice periody, druhé a páté číslice periody a také třetí a šesté číslice periody jsou stejné a rovnají se

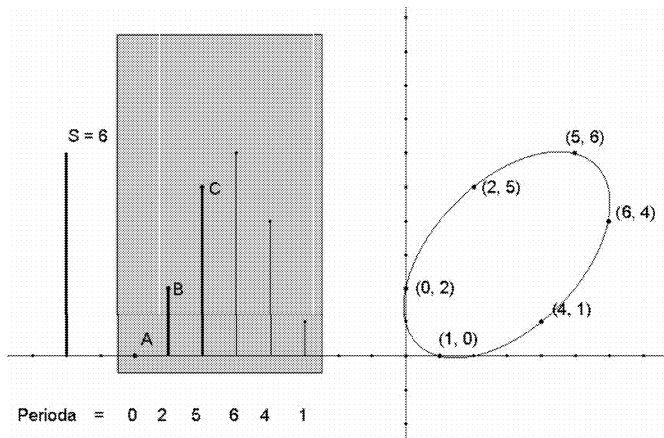
$S = 9 + 0 = 2 + 7 = 3 + 6 = 9$ (je splněna podmínka (ii)). Nyní kuželosečku sestrojíme. Na obrázku 3 najedeme kurzorem na bod „ $S = 6$ “ a tahem svisle nahoru ho přemístíme do polohy „ $S = 9$ “. Pak upravíme na obrázku číslice periody. Najedeme kurzorem na bod A a tahem svisle nahoru ho přesuneme do polohy „9“. Podobně přesuneme bod B do polohy 2 a bod C do polohy 3. Protože perioda 923076 splňuje podmínka (ii), na obrázku na diagramu automaticky „naskočí“ zbylé tři číslice této periody 0, 7, 6. Současně se v pravé polovině obrázku objeví hyperbola procházející šesti body

$$(9, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 7), (7, 6), (6, 9).$$

Protože jsou tyto body různé, je jimi hyperbola určena.

Pro čtenáře, kteří nemají přístup na webovou stránku [2], uvádíme aspoň výsledný obrázek 4.

Čtenáři, kteří mají možnost pracovat s webovou stránkou [2] doporučujeme prozkoumat všechny kuželosečky generované pravými zlomky se jmenovatelem 13. Na závěr ještě jednu poznámku. Může se stát, že ze šesti bodů, které generuje zvolený zlomek, leží některé v přímce. Potom je výsledná kuželosečka složena ze dvou přímek.



Obr. 4

Ještě několik otázek navíc:

- Zkuste přemýšlet, které jmenovatele je možno volit, chceme-li, aby desetinný rozvoj zlomku měl šesticifernou periodu.

- Jak vypadají kuželosečky, které generují dva zlomky, jejichž součet se rovná 1? Například kuželosečky generované zlomky $\frac{2}{7}$ a $\frac{5}{7}$ nebo $\frac{3}{13}$ a $\frac{10}{13}$.
- Můžeme kuželosečky generované zlomky „sčítat“? Například vezmeme kuželosečky generované zlomky $\frac{1}{7}$ a $\frac{1}{13}$. Generuje nějakou kuželosečku součet $\frac{1}{7} + \frac{1}{13} = \frac{20}{91}$? Jestliže ano, je součtem elipsa nebo hyperbola?
- Můžeme kuželosečky generované zlomky „násobit“? Například vezmeme kuželosečky generované zlomky $\frac{1}{7}$ a $\frac{1}{13}$. Generuje nějakou kuželosečku součin $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{91}$? Jestliže ano, je součinem elipsa nebo hyperbola?

Literatura

- [1] Koman, M.: O sedminové elipse a třináctinové hyperbole I. MFI, roč. 17 (2007/08), č. 2, s. 71.
- [2] <http://www.mfi.upol.cz/index.htm>

Jak řešit testy SCIO?

JIŘÍ MAZUREK,

Gymnázium a SOŠ, Orlová

Žáci základních a středních škol se už několik let potýkají při přijímacích zkouškách s testy firmy SCIO. Tyto testy zahrnují *verbální oddíl*, *analytický oddíl* a *kvantitativní oddíl*. První oddíl zkoumá znalost významu slov, druhý testuje žáky z řešení logických úloh typu „zebra“ a poslední ověřuje základní matematické dovednosti. Největší problém činí žákům druhá část, jejíž základy se obvykle na školách neučí. Tento článek se proto zabývá jen analytickým oddílem. Je pojat jako „kuchařka“, která má žákům usnadnit řešení problémů tohoto druhu.

Zebra je úloha, která obsahuje 2 nebo 3 množiny s několika prvky. Množinami mohou být jména lidí, zvířata, barvy, zaměstnání apod. Zadány jsou některé vztahy mezi prvky různých množin (např. že Procházekovi chovají rybičky) a úkolem je najít vztahy zbývající. Většinou je přiřazení

mezi množinami vzájemně jednoznačné. Každému prvku jedné množiny je přiřazen právě jeden prvek množiny druhé. Čtenáři MFI se setkali se zebrami již v článcích [1], [2].

Klíčem k úspěchu je zvládnutí „zeber“. Zebry se nejčastěji řeší *tabulkovou* nebo *spojnicovou metodou*, oba přístupy si ukážeme při řešení následující úlohy.

Úloha 1

V pěti domech (bílý, žlutý, zelený, modrý a červený) bydlí pět spolužáků (Aleš, Bohdan, Cyril, Dana a Eva). Víme, že:

- Aleš nebydlí v modrém ani zeleném domě.
- Ve žlutém domě nebydlí muž.
- V červeném domě bydlí Eva nebo Bohdan.
- Cyril ani Dana nebydlí v modrém domě.

Který z následujících výroků je určitě *nepravdivý*?

- Cyril bydlí v zeleném domě.
- Eva bydlí v červeném domě.
- V zeleném domě bydlí Bohdan.
- Bohdan bydlí v modrém domě.
- Ze zadání nelze jednoznačně rozhodnout.

Řešení úlohy tabulkovou metodou: Dané informace budeme postupně zapisovat do tabulky.

„Aleš nebydlí v modrém ani v zeleném domě.“ Přeškrtneme (označíme křížkem) odpovídající políčka:

	bílý	žlutý	zelený	modrý	červený
Aleš			X	X	
Bohdan					
Cyril					
Dana					
Eva					

„Ve žlutém domě nebydlí muž.“ – Přeškrtneme horní tři pole ve „žlutém“ sloupci:

	bílý	žlutý	zelený	modrý	červený
Aleš		X	X	X	
Bohdan		X			
Cyril		X			
Dana					
Eva					

„V červeném domě bydlí Eva nebo Bohdan.“ – škrtneme v „červeném“ sloupci Aleše, Cyrila a Danu:

	bílý	žlutý	zelený	modrý	červený
Aleš		X	X	X	X
Bohdan		X			
Cyril		X			X
Dana					X
Eva					

Všimneme si, že v řádku pro Aleše už zbyla jen jediná možnost: bílá. Tu zatrhne kolečkem a zbylé řádky v „bílém“ sloupci vyškrtneme:

	bílý	žlutý	zelený	modrý	červený
Aleš	O	X	X	X	X
Bohdan	X	X			
Cyril	X	X			X
Dana	X				X
Eva	X				

„Cyril ani Dana nebydlí v modrém domě.“ – škrtneme oba jmenované v „modrém sloupci“:

	bílý	žlutý	zelený	modrý	červený
Aleš	O	X	X	X	X
Bohdan	X	X			
Cyril	X	X		X	X
Dana	X			X	X
Eva	X				

Cyril tedy musí bydlet v zeleném domě

	bílý	žlutý	zelený	modrý	červený
Aleš	O	X	X	X	X
Bohdan	X	X	X		
Cyril	X	X	O	X	X
Dana	X		X	X	X
Eva	X		X		

a Dana bydlí tudíž ve žlutém domě.

	bílý	žlutý	zelený	modrý	červený
Aleš	O	X	X	X	X
Bohdan	X	X	X		
Cyril	X	X	O	X	X
Dana	X	O	X	X	X
Eva	X	X	X		

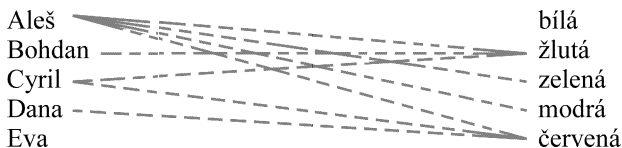
Více informací už k dispozici nemáme, zůstala nám tedy poslední „nejistota“ v určení domu, v němž bydlí Eva (Bohdan).

Zadání testů SCIO málokdy vede k úplnému vyřešení úlohy (k úplnému vyplnění tabulky), přesto lze dané otázky zodpovědět. V našem případě je správná možnost C). K textu bývají většinou 3 nebo 4 otázky – na jednu otázku tak připadá čas zhruba jedné minuty.

Rychlejší než vyplňování tabulky je spojování prvků jednotlivých množin, tedy *metoda spojnicová*. Pokud se v textu uvádí, že dané pojmy k sobě

patří, spojme je *plnou čarou* (ještě lepší je použít např. zelený fix), pokud k sobě dva pojmy *nepatří*, spojme je *přerušovanou spojnicí* (resp. červený fix).

Řešení úlohy spojnicovou metodou: První tři informace úlohy 1 se pak zobrazí takto:



Usoudíme, že Aleš bydlí v bílém domě, spojíme *Aleš* a *bílá* plnou čarou a další postup je stejný jako při užití tabulky.

Řešení zebry se třemi množinami je analogické. Představme si, že k úloze 1 ještě přidáme třetí množinu: čísla popisná jednotlivých domů (od 1 do 5), a následující informace:

- Aleš bydlí v domě č. 4.
- Cyril ani Dana nebydlí v domě č. 2.

Nyní můžeme nakreslit všechny tři potřebné tabulky: *jméno – barva domu*, *jméno – číslo domu* a *barva domu – číslo domu*, ale to je příliš pracné a časově náročné (nezapomínejme, že na řešení máme pouze jen několik minut!).

Lepší je načrtnout si pouze tabulky *dvě*, třetí z nich už jednoznačně vyplyne. Někdy si však vystačíme s tabulkou jedinou:

	4 bílý	žlutý	zelený	modrý	červený
4 Aleš	O	X	X	X	X
Bohdan	X	X	X		
2x Cyril	X	X	O	X	X
2x Dana	X	O	X	X	X
Eva	X	X	X		

Čísla domů připsíme ke jménům nebo barvám, křížek u Cyrila a Dany znamená *popření* vztahu s domem číslo 2. (Dodatečné dvě informace o číslech popisných samozřejmě nestačí k nalezení všech vztahů. Tabulka pouze ukazuje, jak si tyto informace znázornit!)

Při užití „čárové metody“ se prvky jednotlivých množin zapíše do stran trojúhelníka a další postup je totožný s předešlým.

Poněkud jiným způsobem lze řešit úlohy, v nichž záleží na pořadí nebo se v nich vyskytuje „sousednost“.

Úloha 2

Mistrovství republiky v běhu na 100 metrů se zúčastnilo 6 sprinterů A, B, C, D, E, F. Je známo, že

- i) Sprinter F doběhl o jedno místo před sprinterem C.
- ii) Sprinter B obsadil sudé místo v první polovině výsledkové listiny.
- iii) A získal medaili.
- iv) C nebyl poslední.
- v) D obsadil liché místo a skončil bez medaile.

Které z uvedených tvrzení je určitě pravdivé?

- A) Sprinter F v závodě zvítězil.
- B) Sprinter C skončil bez medaile.
- C) Sprinter A doběhl třetí.
- D) Poslední skončil sprinter E.
- E) Nelze jednoznačně rozhodnout.

Řešení. Přestože lze řešit tuto úlohu tabulkou (každému sprinterovi se přiřadí právě jedno místo), je lepší si vytvořit „bodové“ schéma:

1	2	3	4	5	6
o	o	o	o	o	o

„Sprinter F doběhl o jedno místo před sprinterem C“ – poznačíme si „F–C“.

„Sprinter B obsadil sudé místo v první polovině výsledkové listiny“ – po chvilce přemýšlení usoudíme, že B skončil druhý:

1	2	3	4	5	6
o	o	o	o	o	o
	B				

„A získal medaili“ – A je první nebo třetí. Máme tedy dvě možnosti:

1	2	3	4	5	6
o	o	o	o	o	o
A	B				
	B	A			

„C nebyl poslední“ – říká jen tolik, že C obsadil 1., 3., 4. nebo 5. místo.

„D obsadil liché místo a skončil bez medaile.“ – D musí být pátý!

1	2	3	4	5	6
o	o	o	o	o	o
A	B			D	
	B	A		D	

Z bodu i) ovšem plyne, že druhá možnost (čtvrtý řádek předešlé tabulky) je vyloučena, protože nikde nemáme dvě „volná místa“ za sebou pro běžce F a C. Proto nám zůstává jen ta první (třetí řádek téže tabulky):

1	2	3	4	5	6
o	o	o	o	o	o
A	B			D	

Pak ale běžec F doběhl třetí a běžec C čtvrtý, poslední je tedy E:

1	2	3	4	5	6
o	o	o	o	o	o
A	B	F	C	D	E

Vrátíme se k testové otázce 2: poslední skončil běžec E, správně je možnost D).

Úloha 3

Do tenisového oddílu chodí 6 chlapců. Víme, že Jiří je starší než Tomáš, Honza je starší než Ivo, Honza je mladší než Libor, Petr je mladší než Jiří.

Určete, který výrok je určitě *pravdivý*.

- A) Jiří je starší než Honza.
- B) Tomáš je stejně starý jako Petr.
- C) Ivo je mladší než Libor.

D) Honza je starší než Petr.

E) Ivo je mladší než Tomáš.

Informaci, že „Jiří je starší než Tomáš“, zapíšeme: $J \rightarrow T$. Lepší a názornější pro žáky je přepsat tento vztah do sloupce, kde vyšší jméno znamená „starší“, jako je tomu v rodokmenech. Podobně si znázorníme i další tři věty a dostaneme tyto řetězce:

$$J \rightarrow T, \quad H \rightarrow I, \quad L \rightarrow H, \quad J \rightarrow P$$

Dále si všimneme, že druhý a třetí řetězec je možné spojit do jednoho:

$$J \rightarrow T, \quad L \rightarrow H \rightarrow I, \quad J \rightarrow P$$

Nakonec pravidlo, pomocí něhož úlohu vyřešíme: Můžeme porovnávat jen osoby v rámci jediného řetězce! Nemůžeme tedy říct nic o vztahu mezi Tomášem a Pavlem (1. a 3. řetězec) nebo o vztahu Jiřího s Liborem, Honzou a Ivem, kteří jsou ve druhém řetězci. Projdeme-li nabízené odpovědi, jediná správná je odpověď C).

Výše uvedené úlohy patří spíše mezi ty jednodušší. Jsou pouze „odrazovým můstkem“ k řešení úloh složitějších a jejich smyslem je uvést postupy vedoucí k cíli. Ty lze v hodinách matematiky velmi dobře nacvičit. Jejich zvládnutí pak může v konečném důsledku přispět i ke zdárnému složení přijímacích zkoušek na střední, resp. vysokou školu. A o to jde řadě žáků ZŠ a SŠ především.

Literatura

- [1] *Trávníček, S.*: O řešení některých logických úloh. MFI, roč. 9 (1999/2000), č. 8, str. 488 – 494 a č. 9, str. 555 – 561.
- [2] *Uhlířová, M.*: Logické úlohy známé – neznámé. MFI, roč. 14 (2004/2005), č. 2, str. 78 – 82.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení zašlete nejpozději do 10. 1. 2008 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 143

Určitý obnos menší než 1000 Kč je rozdělen do deseti číslovaných hromádek (v celých korunách), přičemž platí:

- Když z 1. hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji ke 2. hromádce,
- pak ze 2. takto zvětšené hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji ke 3. hromádce,
- ...
- pak z 9. takto zvětšené hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji k 10. hromádce,
- až nakonec z takto zvětšené 10. hromádky odebereme desetinu příslušné částky a přidáme ji k 1. hromádce,

pak bude ve všech hromádkách též obnos.

Kolik Kč bylo v jednotlivých hromádkách původně a kolik nakonec?

Stanislav Trávníček

Úloha 144

Obdélník $ABCD$ o rozměrech $m \times n$ je rozdělen na mn jednotkových čtverců. Uvažujme libovolný systém přímek, v jejichž sjednocení leží všechny vrcholy zmíněných jednotkových čtverců s výjimkou bodu A . Dokažte, že každý takový systém obsahuje alespoň $m + n$ přímek.

Jaromír Šimša