

MATEMATIKA

O jistých složených iracionalitách

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Při řešení některých matematických úloh můžeme dostat složené iracionality, tedy výrazy, v nichž pod odmocninou jsou opět výrazy s odmocninami. My se budeme zabývat výrazy typu $\sqrt{A \pm C\sqrt{B}}$ (kde A, B, C jsou kladná čísla a B není úplný čtverec), které lze nazvat surdické (vzhledem k tomu že historické pojmenování čísel typu $7 + \sqrt{13}$, tj. součtu složeného z čísla racionálního a iracionálního, je *čísla surdická* (viz [2]). Každý takový surdický výraz lze samozřejmě upravit na tvar, kde $C = 1$, neboť $A \pm C\sqrt{B} = A \pm \sqrt{C^2 B}$. Dále budeme předpokládat, že platí $A^2 > C^2 B$; smysl této podmínky uvidíme dále.

Příklad 1

Vypočtěte $\sin 15^\circ$.

Řešení. Použijeme vzorec $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ pro $\alpha = 30^\circ$. Ježto $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, máme $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Zde $A = 2, B = 3, C = 1$.

V učebnici [1] je v historické poznámce v části 6.5 uveden vzorec, který asi před 1000 lety objevili arabští matematikové:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}, \quad (1)$$

kde $a > 0, b > 0, a^2 > b$.

Proveďme si jeho důkaz:

Označme

$$x = \sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}}.$$

Pak

$$x^2 = a + \sqrt{b} + a - \sqrt{b} + 2\sqrt{a^2 - b} = 4\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2},$$

$$x = 2\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Označíme-li

$$y = \sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}},$$

dostaneme stejným postupem

$$y = 2\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Ze zřejmých rovností $x+y = 2\sqrt{a+\sqrt{b}}$, $x-y = 2\sqrt{a-\sqrt{b}}$ pak dostáváme (po dosazení za x, y) dokazovaný vzorec. (Budeme jej zde dále používat jen pro přirozená čísla a, b .)

Na první pohled v (1) z jednoho výrazu dostáváme součet nebo rozdíl dvou výrazů složitějších. Jestliže je však $a^2 - b$ úplný čtverec, věc vypadá jinak. Zabývejme se dále jen těmito případy; nejprve navážeme na příklad 1.

Příklad 2

Zjednodušte výraz $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ a vyjádřete znovu $\sin 15^\circ$. (Výzvu „zjednodušte“ si zde vyložíme jako „převedte na výraz bez složené iracionality“.)

Řešení. Podle vzorce (1) je

$$\begin{aligned}\sqrt{2 - \sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{4-3}}{2}} - \sqrt{\frac{2 - \sqrt{4-3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{3} - 1) = \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{6} - \sqrt{2}), \text{ tj.} \\ \sin 15^\circ &= \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Použití vzorce (1) se v úlohách, kde se vyskytují složené iracionality, uplatní často. Uvedme si některé z nich (zadání jsou čerpána z různých zahraničních sbírek úloh ze středoškolské matematiky, ale jak dále uvidíme, není těžké takové úlohy sestavit).

Příklad 3

Zjednodušte výraz $V = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$.

Řešení. Výraz upravujeme zevnitř.

$$\begin{aligned}\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} &= \sqrt{9 + \sqrt{32}} = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{81 - 32}}{2}} + \sqrt{\frac{9 - \sqrt{81 - 32}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{9 + 7}{2}} + \sqrt{\frac{9 - 7}{2}} = \sqrt{8} + 1,\end{aligned}$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{8} + 1} = \sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{3 - 1}{2}} = \sqrt{2} + 1,$$

$$\begin{aligned}V &= \sqrt{13 + 30(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{43 + \sqrt{1800}} = \\ &= \sqrt{\frac{43 + \sqrt{1479 - 1800}}{2}} + \sqrt{\frac{43 - \sqrt{1479 - 1800}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{43 + 7}{2}} + \sqrt{\frac{43 - 7}{2}} = 5 + 3\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Poznámka. Tento příklad by bylo možno vyřešit i bez použití vzorce (1), ale museli bychom postupně přijít na to, že

$$9 + 4\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{8})^2 + 2\sqrt{8} + 1 = (\sqrt{8} + 1)^2,$$

$$3 + \sqrt{8} = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2,$$

$$43 + \sqrt{1800} = 43 + 30\sqrt{2} = 25 + 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2} + 9 \cdot 2 = (5 + 3\sqrt{2})^2.$$

I když první dva rozklady bychom bystrému řešiteli přiznali, třetí rozklad by mohl být už problémem pro každého. Vidíme, že použití vzorce 1 je pohodlnější.

Vzorec (1) však nepoužívejme mechanicky bez rozmyslu. V následujícím příkladu uvidíme, že se někdy můžeme bez něj docela dobře obejít.

Příklad 4

Zjednodušte výraz

$$V = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{4 - (2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}})} = \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{4 - (2 + \sqrt{3})} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{4 - 3} = 1. \end{aligned}$$

Někdy lze více druhů úprav spolu kombinovat.

Příklad 5

Dokažte, že platí:

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Řešení. Kdyby byla zadána jen úprava výrazu na levé straně, postupovali bychom patrně podle vzorce (1). Zde si však můžeme možná práci ulehčit (posuďte sami), když dokazovanou rovnost nejprve umocníme dvěma:

$$\begin{aligned} 8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 8 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{64 - 4(10 + 2\sqrt{5})} &= 2(5 + 1 + 2\sqrt{5}), \\ 16 + 2\sqrt{4(16 - 10 - 2\sqrt{5})} &= 4(3 + \sqrt{5}) \\ \sqrt{6 - \sqrt{20}} &= \sqrt{5} - 1. \end{aligned}$$

Na závěr můžeme použít vzorec (1):

$$L = \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6 + 4}{2}} - \sqrt{\frac{6 - 4}{2}} = \sqrt{5} - 1 = P.$$

Na těchto úlohách je překvapující, že poměrně složité zadání dává pak někdy docela jednoduchý výsledek. Pokud by si chtěl čtenář vyzkoušet použití vzorce 1 ještě na jiných příkladech, uveďme dvě cvičení, kde výsledkem jsou jistá přirozená čísla.

Cvičení: Zjednodušte:

$$V_1 = \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{2}),$$

$$V_2 = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} \right)^2.$$

Obrácená úloha

Čtenář si může snadno vytvořit i sám vhodné příklady. Zvolíme-li si předem výsledek $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ nebo $\sqrt{p} - \sqrt{q}$, kde $p > q$ a kde alespoň jedno z kladných čísel p, q není druhou mocninou, je

$$p = \frac{A^2 + \sqrt{A - C^2 B}}{2}, \quad q = \frac{A^2 - \sqrt{A - C^2 B}}{2}, \text{ takže}$$

$$A = p + q. \quad (2)$$

Dále je $p - q = \sqrt{A^2 - C^2 B}$, tedy $(p - q)^2 = A^2 - C^2 B$, takže

$$C^2 B = A^2 - (p - q)^2, \quad (3)$$

odkud určíme B a C . Znaménko mezi výrazy pod odmocninou ve vypočteném „zadání“ bude pak shodné se znaménkem v zadaném výsledku.

Příklad 6

Sestavte úlohu, jejíž výsledkem bude číslo $\sqrt{7} - 2$.

Řešení. Platí $\sqrt{7} - 2 = \sqrt{7} - \sqrt{4}$, takže $p = 7$, $q = 4$. Podle (2), (3) je $A = 7 + 4 = 11$, $C^2 B = 121 - (7 - 4)^2 = 112 = 16 \cdot 7$, odkud $B = 7$, $C = 4$, znaménko mezi výrazy pod odmocninou bude záporné.

Výsledná úloha: Zjednodušte výraz $V = \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

Tento postup od výsledku k zadání nám umožňuje vhodně zkombinovat výsledky a postupně tak sestavit zadání i složitějších úloh.

Pro výrazy $\sqrt{A \pm C\sqrt{B}}$ jsou na pravé straně vzorce (1) výrazy

$$\sqrt{\frac{A \pm \sqrt{A^2 - C^2 B}}{2}}$$

a předpokládáme, že $A^2 - C^2 B$ je úplný čtverec. Podívejme se, kdy dostaneme výsledek bez zlomků. K tomu je třeba, aby čitatel $A \pm \sqrt{A^2 - C^2 B}$ byl sudý, což nastává, když $B \vee C$ je sudé. V příkladu 2 tomu tak nebylo, zde $A = 2$, $B = 3$, $C = 1$ (B i C je liché), v příkladu vznikly zlomky v důsledku lichého čitatele a dvojky ve jmenovateli zlomku pod odmocninou.

V této souvislosti upozorníme ještě na jednu vlastnost trojic (A, B, C) : Výsledek příslušný k trojici (kA, B, kC) je $\sqrt{k}$ -násobkem výsledku příslušného k (A, B, C) . Tak např. k trojici $(2, 3, 1)$, tj. k $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, přísluší podle příkladu 2 výsledek:

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1).$$

Uvažujeme-li k trojici $(2, 3, 1)$ pro $k = 2$ trojici $(4, 3, 2)$, dostaneme

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1.$$

Zde jsou A i BC sudé, takže ve výsledku už zlomek není. Podobně zvolme nyní např. $k = 3$; dostaneme

$$\sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = 3 - \sqrt{3}.$$

I takto lze tedy vytvářet nové příklady.

Literatura

- [1] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia (Funkce). Prometheus, Praha 2002.
- [2] *Hrubý, D.*: Surdické výrazy. Učitel matematiky, roč. 7 (1998 – 99), č. 1.

O sedminové elipse a třináctinové hyperbole I

MILAN KOMAN

Pedagogická fakulta Praha UK, Praha

Ptáte se, co je *sedminová elipsa* a co *třináctinová hyperbola*? Co může mít elipsa společného se zlomkem $\frac{1}{7}$ a co hyperbola se zlomkem $\frac{1}{13}$? Čtěte dále a uvidíte.

Všimneme si nejdříve sedminové elipsy (viz [1]). Vezmeme zlomek $\frac{1}{7}$ a napíšme jeho desetinný rozvoj:

$$\frac{1}{7} = 0,142857\,142857\,142857\ldots$$

Dostaneme nekonečný desetinný rozvoj s periodou 142857. Číslice této periody se v rozvoji cyklicky opakují. Za číslicí „7“ následuje v rozvoji opět číslice „1“. Z dvojic číslic, které v rozvoji po sobě bezprostředně následují, vytvoříme tak kartézské souřadnice šesti bodů:

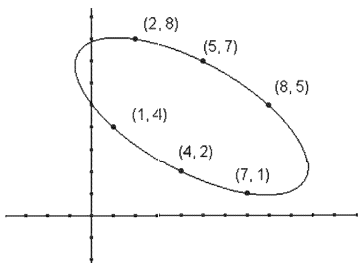
$$(1, 4), (4, 2), (2, 8), (8, 5), (5, 7), (7, 1).$$

Body znázorníme (nejlépe pomocí Cabri-geometrie) v soustavě souřadnic (obr. 1). Vybereme z nich některých 5 bodů a pomocí Cabri-konstrukce „Kuželosečka“ sestrojíme kuželosečku, která zvolenými body prochází. Dostaneme elipsu, která k našemu překvapení prochází i zbylým šestým bodem, bez ohledu na to, ze kterých pěti bodů vyjdeme. Přitom je známo, že kuželosečka, a tedy i naše elipsa, je určena pouze pěti body, z nichž žádné tři neleží v přímce.^{*)} Proč i šestý bod na této elipse leží, je (zatím) otázka.

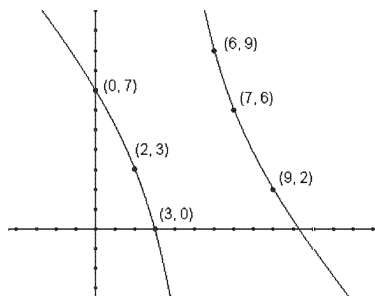
^{*)} Jak známo, rovnice kuželosečky má v kartézské soustavě souřadnic tvar

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Jeden koeficient můžeme zvolit (např. f) a zbývá určit pět koeficientů. Proto potřebujeme znát pět bodů, kterými kuželosečka prochází. Z jejich souřadnic určíme neznámé koeficienty, a tedy rovnici dané kuželosečky.



Obr. 1



Obr. 2

Podobně je tomu se třináctinovou hyperbolou. Napišeme opět periodický desetinný rozvoj jedné třináctiny:

$$\frac{1}{13} = 0,076923\,076923\,076923\ldots$$

Pomocí periody 076923 určíme podobně jako v předešlém případě šest bodů

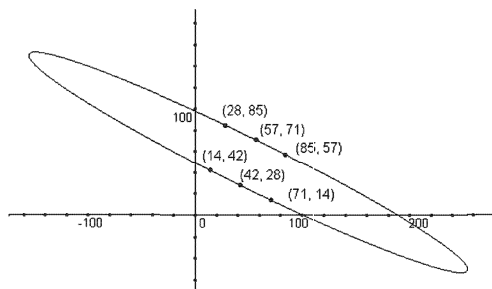
$$(0, 7), (7, 6), (6, 9), (9, 2), (2, 3), (3, 0).$$

Snadno se přesvědčíme, že těmito šesti body prochází opět jediná kuželosečka, tentokrát hyperbola (obr. 2).

Ale to ještě není vše. Z period obou čísel můžeme dostat další kuželosečky. Ukážeme si to pro jednu sedminu. Tentokrát budeme souřadnice bodů sestavovat z po sobě následujících dvojic číslic periody 142857:

$$(14, 42), (42, 28), (28, 85), (85, 57), (57, 71), (71, 14).$$

Pomocí Cabri geometrie se můžeme opět snadno přesvědčit, že tyto body leží na jediné elipse (obr. 3).



Obr. 3

Podobně můžeme najít z periody jedné třináctiny další hyperbolu. To už ale přenecháme našim čtenářům.

Úkol pro čtenáře

Zkuste se zamyslet nad tím, proč sestrojenými šesticemi bodů je vždy určena právě jedna kuželosečka – to je v případě jedné sedminy elipsa a v případě jedné třináctiny hyperbola.

Než vyjde další číslo našeho časopisu máte čas na rozmyšlenou. V něm vám:

- ukážeme řešení našeho úkolu,
- a zároveň vám dáme možnost pohrát si na [www stránkách](http://www.mathworld.wolfram.com/One-SeventhEllipse.html) našeho časopisu s problémem n -tinových kuželoseček pomocí Cabri Java apletu, a to i v případě, že nepracujete s Cabri geometrii.

Literatura

- [1] *Weisstein, E.:* One seventh ellipse. In Wolfram Mathworld
<http://mathworld.wolfram.com/One-SeventhEllipse.html>

Invarianty a poloinvarianty ve školské matematice

RADEK HORENSKÝ

Střední škola elektrotechnická, Lipník nad Bečvou

V úlohách školské matematiky, zejména při práci s matematicky talentovanými žáky na středních školách, se můžeme setkat s úlohami, jejichž řešení jsou založena na využití tzv. *metody invariantů a poloinvariantů*. Invariantem přitom rozumíme vlastnost nebo měřitelnou veličinu, která se při jisté transformaci, resp. při opakování nějakého postupu nemění. Poloinvariantem pak rozumíme veličinu, která se při daných procesech nezvětšuje, resp. nezmenšuje. Je známo, že každé přirozené číslo dává při

dělení devíti stejný zbytek jako součet všech jeho číslic. Tento zbytek je proto možno považovat za invariant. Poloinvariantem je naproti tomu zbytek, který postupně získáváme při výpočtu největšího společného dělitele (za použití Eukleidova algoritmu).

Hledání invariantů je ve své podstatě experiment, v němž se snažíme uplatnit potřebné znalosti a zkušenosti. Při řešení dané úlohy zkoumáme, jakým způsobem na sobě veličiny závisí. Mnohdy se stane, že invariant, který objevíme, nám k vyřešení problému přímo nepomůže, jindy nalezneme vhodných invariantů hned několik.

Invarianty a poloinvarianty se vyskytují ve všech vědních oborech kolem nás, tedy nejenom v matematice. Pro ilustraci uvedme nyní několik matematických invariantů:

- Přičteme-li ke každému členu dané aritmetické posloupnosti reálných čísel libovolnou reálnou konstantu, dostaneme opět posloupnost aritmetickou, dokonce se stejnou diferencí. Invariantem může být jak zachování skutečnosti, že posloupnost bude opět aritmetická, tak hodnota difference těchto posloupností.
- Vynásobíme-li každý člen dané aritmetické posloupnosti reálných čísel libovolnou reálnou konstantou, dostaneme znovu aritmetickou posloupnost. V tomto případě je invariantem zachování aritmetické posloupnosti, poloinvariantem je pak hodnota difference uvažovaných posloupností.
- Vynásobíme-li každý člen dané geometrické posloupnosti reálných čísel libovolnou reálnou konstantou, dostaneme opět geometrickou posloupnost, dokonce se stejným kvocientem. Invariantem je jak zachování skutečnosti, že posloupnost bude opět geometrická, tak hodnota kvocientu těchto posloupností.
- Umocníme-li každý člen dané geometrické posloupnosti reálných čísel libovolnou kladnou reálnou konstantou, dostaneme znovu geometrickou posloupnost. V tomto případě je invariantem zachování geometrické posloupnosti, poloinvariantem je pak hodnota kvocientu uvažovaných posloupností.
- Vynásobíme-li délky všech stran daného trojúhelníku kladným reálným číslem, získáme opět délky stran nějakého trojúhelníku. Invariantem je zde splnění trojúhelníkové nerovnosti. Současně jsou zachovány i velikosti odpovídajících vnitřních úhlů trojúhelníku. (O tom se snadno můžeme přesvědčit např. z kosinové věty. Jedná se evidentně o podobné trojúhelníky.)

- Užitím libovolného shodného zobrazení v rovině zůstanou zachovány délky všech stran i velikosti úhlů. Jsou to tedy invarianty daného zobrazení.
- Pro všechna reálná čísla c platí, že hodnota diskriminantu kvadratické funkce $y = (x - c)^2 - 1$ je rovna číslu 4. Jedná se o funkce, které vzniknou posunutím paraboly $y = x^2 - 1$ ve směru osy x . Invariantem je tedy hodnota diskriminantu. Dalším invariantem je hodnota rozdílu kořenů kvadratické rovnice, který je stále roven dvěma, neboť kořeny dané rovnice jsou čísla $c - 1$ a $c + 1$.
- Zvětšíme-li ve statistickém souboru všechny hodnoty o kladnou reálnou konstantu c , zvětší se o tuto konstantu i hodnota aritmetického průměru. Vzhledem k definici některých charakteristik polohy či variability je v důsledku této transformace hodnota střední absolutní odchylky či rozptylu daného souboru dat stále stejná, je to tedy rovněž invariant.

Metoda invariantů, stejně jako užití Dirichletova principu, patří k metodám, které nevyžadují obsáhlý matematický aparát. Při řešení konkrétních úloh je nejobtížnější nalézt vhodný invariant, který nám umožní úlohu vyřešit.

Při řešení následujících úloh ukážeme konkrétní využití dané metody.

Příklad 1

Na tabuli jsou napsána všechna přirozená čísla od 1 do 100. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla a místo nich napíšeme na tabuli jejich součet. Tuto operaci opakujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstanou poslední tři čísla. Můžeme tímto způsobem nakonec získat na tabuli tři po sobě jdoucí čísla?

Řešení. Ukážeme, že taková situace nenastane. Jestliže na tabuli smažeme libovolná dvě čísla a nahradíme je jejich součtem, zůstane součet všech čísel napsaných na tabuli zachován. Tento součet je konstantní a je roven

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (1 + 100) = 5\,050.$$

Součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel $c - 1$, c a $c + 1$ je však roven číslu $3c$, tj. je to násobek čísla 3. Číslo 5 050 však násobkem čísla 3 není.

Poznámka. K vyřešení této úlohy jsme využili faktu, že součet všech čísel napsaných na tabuli zůstává nezměněn. Je proto invariantem dané operace. Současně je invariantem i zbytek, který získáme při dělení daného součtu číslem 3.

Příklad 2

Na tabuli jsou napsána všechna celá nezáporná čísla od 0 do 1 234. Uvažujme následující operaci: Smažeme libovolná dvě čísla a místo nich napíšeme na tabuli jejich rozdíl (od většího čísla odečteme menší). Tuto operaci opakujeme tak dlouho, dokud na tabuli nezůstane poslední číslo. Můžeme tímto způsobem nakonec získat na tabuli číslo 2?

Řešení. Ukážeme, že taková situace nastat nemůže. Jestliže na tabuli smažeme libovolná dvě čísla a nahradíme je jejich rozdílem, zůstane zachována parita součtu všech čísel na tabuli. Jestliže smažeme dvě lichá čísla, nahradíme je číslem sudým, smažeme-li dvě sudá čísla, opět je nahradíme číslem sudým. Při smazání sudého a lichého čísla zapíšeme na tabuli číslo liché. Ve všech třech případech se ale nezmění parita součtu všech čísel napsaných na tabuli. Součet všech čísel napsaných na tabuli je roven

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 1\,234 = \frac{1}{2} \cdot 1\,235 \cdot (0 + 1\,234) = 761\,995.$$

Součtem je liché číslo, proto i poslední číslo napsané na tabuli musí být liché. Číslo 2 však tuto vlastnost nespĺňuje.

Poznámka. K vyřešení této úlohy jsme využili faktu, že rozdílem dvou sudých nebo dvou lichých čísel je číslo sudé, ale rozdílem čísel s různou paritou je číslo liché. Počet lichých čísel napsaných na tabuli je buď stále lichý nebo stále sudý. Invariantem je tedy zbytek, který dostaneme při dělení součtu všech čísel napsaných na tabuli číslem 2. Současně vidíme, že počet lichých čísel napsaných na tabuli je poloinvariantem, neboť se při dané operaci tento počet nezvyšuje, buď zůstává nezměněn, nebo počet lichých čísel klesne o dvě. Na začátku bylo na tabuli 617 lichých čísel, proto i poslední číslo napsané na tabuli musí být nutně liché.

Příklad 3

Rozhodněte, zda lze daný konvexní patnáctiúhelník rozřezat na 12 trojúhelníků tak, že všechny vrcholy takto získaných trojúhelníků leží na hranici daného patnáctiúhelníku.

Řešení. Ukažme, že takové rozřezání není možné. Leží-li všechny vrcholy na hranici daného patnáctiúhelníku, lze vybrat tři sousední body tak, aby byly vrcholy některého z uvažovaných trojúhelníků. Odřízneme-li tímto způsobem z patnáctiúhelníku trojúhelník, zůstane nám mnohoúhelník s minimálně čtrnácti úhly. Nejmenší útvar, který tak můžeme po odřezání 11 trojúhelníků získat, je čtyřúhelník. Není tedy možné získat dvanáct trojúhelníků. Budeme-li sledovat součet vnitřních úhlů ve všech rozřezaných částech, zjistíme, že při odřezání trojúhelníku, jehož vrcholy jsou tři sousední vrcholy daného mnohoúhelníku, se součet vnitřních úhlů nezmění. Bude-li mít odřezávaný trojúhelník vrchol v některém vnitřním bodě nějaké strany mnohoúhelníku, součet všech vnitřních úhlů vzroste s každým takovým bodem o 180° . Součty velikostí všech vnitřních úhlů tvoří neklesající posloupnost. Součet vnitřních úhlů každého konvexního patnáctiúhelníku je

$$(15 - 2) \cdot 180^\circ = 2\,340^\circ,$$

ale součet vnitřních úhlů dvanácti trojúhelníků je pouze $2\,160^\circ$. Celkový součet velikostí všech vnitřních úhlů je tedy poloinvariantem, resp. minimální hodnota součtu je tedy invariantem. Úlohu je možno zobecnit pro libovolné přímé řezy vedené patnáctiúhelníkem, v tomto případě s každým průsečíkem úseček uvnitř útvaru vzroste celkový součet úhlů o 360° .

Příklad 4

Rozhodněte, zda lze čísla $1, 2, \dots, 33$ rozdělit do 11 skupin po třech číslech tak, že největší číslo v každé skupině je rovno součtu zbývajících dvou?

Řešení. Ukážeme, že to nelze. V každé skupině se vyskytují buď všechna tři čísla sudá nebo jedno číslo sudé a dvě lichá. To ale znamená, že lichých čísel musí být celkově sudý počet. To je ale v rozporu se zadáním, protože mezi čísly 1 až 33 je právě 17 lichých čísel a 16 sudých. Invariantem je v tomto případě parita součtu všech čísel. V každé uvažované skupině musí být součet sudý, kdežto celkový součet čísel od 1 do 33 je roven 561, tedy číslu lichému.

Poznámka. Invariant, který jsme odvodili, je pro řešení úlohy nutnou podmínkou. Pokud bychom danou úlohu chtěli zobecnit pro čísla od 1 do $3k$,

zjistíme, že pro některá přirozená k úloha řešitelná být může. Pro posouzení, zda se však jedná také o podmínku postačitelnou, bychom museli nalézt vhodný algoritmus pro sestavení daných trojic.

Příklad 5

V klobouku je 15 bílých a 18 černých kuliček. Náhodně vybereme dvě kuličky. Jsou-li různé barvy, vhodíme nazpět bílou kuličku. Jsou-li stejné barvy, hodíme místo nich do klobouku černou kuličku z předem připravené krabičky, v níž máme dostatečný počet černých kuliček. Postup opakujeme tak dlouho, dokud v klobouku nezůstane jediná kulička. Jakou bude mít barvu?

Řešení. Pokud vytáhneme dvě kuličky různé barvy, tj. jednu bílou a jednu černou, vrátíme zpět do klobouku bílou kuličku, proto se počet bílých kuliček nemění, stejně tak jako v případě vytažení dvou černých kuliček. Vytáhneme-li však dvě kuličky bílé, nahradíme je kuličkou černou, počet bílých kuliček se tedy zmenší o 2. Vidíme tedy, že při každém vytažení zůstane lichý počet bílých kuliček. Jedná se o vlastnost, která zůstává stále zachována, je to tedy invariant. Na konci tedy musí v klobouku zůstat 1 bílá kulička.

Příklad 6

V kartézské soustavě souřadnic jsou obarveny jistou barvou mřížové body podle následujících pravidel: Je-li obarven bod o souřadnicích $[a; b]$, můžeme obarvit i bod o souřadnicích $[a + 1; b + 1]$. Jsou-li obě souřadnice bodu $[a; b]$ sudá čísla, můžeme obarvit i bod $[\frac{1}{2}a; \frac{1}{2}b]$. Jsou-li obarveny body $[a; b]$ a $[b; c]$, lze obarvit i bod o souřadnicích $[a; c]$. Na počátku je obarven bod $[36; 64]$. Rozhodněte, zda může být daným způsobem obarven bod o souřadnicích $[49; 81]$.

Řešení. Sledujme, jak se mění rozdíl daných souřadnic při jednotlivých transformacích. Počáteční rozdíl $b - a$ je 28. Přičteme-li k oběma souřadnicím číslo 1, zůstane rozdíl zachován. Ukažme, že rozdíl zůstává násobkem čísla 7. Je-li $b - a$ rozdílem dvou sudých čísel a současně násobkem sedmi, je vzhledem k nesoudělitelnosti čísel 2 a 7 dělitelný sedmi i rozdíl polovičních hodnot. Stejně tak z dělitelnosti číslem 7 pro rozdíly $b - a$ a $c - b$ plyne dělitelnost i pro rozdíl $c - a$. Všechny obarvené body tedy mají rozdíl souřadnic roven násobku sedmi. Dělitelnost daného rozdílu číslem 7

zůstává při všech popsaných transformacích zachována, je tedy invariantem. Vzhledem k tomu, že $81 - 49 = 32$ není násobkem sedmi, nemůžeme proto bod o souřadnicích $[49; 81]$ daným způsobem obarvit.

Poznámka. Dělitelnost rozdílu číslem 7 však není jediným invariantem. Jiným invariantem, který zde k řešení nevyužijeme, je například uspořádání souřadnic, první souřadnice bude vždy menší než souřadnice druhá.

Příklad 7

Na každém z vrcholů daného dvanáctiúhelníku je položena mince. Na jeho obvodu zvolíme libovolně dvě mince a přemístíme je na sousední vrcholy, a to tak, že jednu minci přesuneme po obvodu ve směru chodu hodinových ručiček a druhou proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda lze všech dvanáct mincí přemístit tímto způsobem společně na jediný vrchol.

Řešení. Označme pro jednoduchost vrcholy daného dvanáctiúhelníku postupně čísla 1 až 12, podobně jako hodiny na ciferníku. Přemístíme-li dvě mince na sousední pole, potom se součet čísel pod oběma mincemi nezmění (pokud ani jedna z mincí neprochází mezi poli 1 a 12) nebo se zvětší či zmenší daný součet právě o 12. Pokud by bylo možno přemístit všechny mince na jedinou hromádku, byl by celkový součet čísel pod všemi mincemi násobkem dvanácti. Ale jejich součet je

$$1 + 2 + 3 + \dots + 12 = 78,$$

není tedy násobkem dvanácti, při dělení dvanácti dává zbytek 6. Invariantem je tedy celkový zbytek při dělení 12. Dané mince nelze proto přemístit do jediného vrcholu.

Příklad 8 (56. ročník MO, A-III-1)

Na některé pole čtvercové šachovnice $n \times n$, ($n \geq 2$) postavíme figurku a pak s ní táhneme střídavě „šikmo“ a „přímo“. „Šikmo“ znamená na pole, které má s předchozím společný právě jeden bod. „Přímo“ znamená na sousední pole, které má s předchozím společnou stranu. Určete všechna n , pro něž existuje výchozí pole a posloupnost tahů začínající „šikmo“ tak, že figurka projde celou šachovnicí a na každém poli se octne právě jednou.

Řešení. Pro sudá n je daná úloha řešitelná, protože lze nalézt cestu vycházející z rohového pole tak, že postupně projdeme celou šachovnici po sousedních blocích typu $2 \times n$. Ukažme, že pro lichá $n \geq 3$ taková cesta neexistuje. Uvažujme šachovnici s černým polem v rohu. Každý tah „šikmo“ spojí dvě pole stejné barvy ze sousedních řad šachovnice. Pro lichá n je však počet černých polí v libovolných dvou sousedních řadách odlišný. Proto minimálně jedno pole v první řadě a jedno pole v poslední řadě není možno spojit „šikmo“ s jiným polem šachovnice. Vzhledem k tomu, že obě pole nemohou být koncovým polem cesty (cesta může končit takem „přímo“, který spojuje dvě sousední pole různé barvy, ale takové pole může být jen jedno), není možné danou šachovnici předepsaným způsobem projít.

Poznámka. Invariant, který lze při řešení této úlohy použít, je dán rozdílem počtu černých polí na lichých řádcích a počtu černých polí na sudých řádcích šachovnice $n \times n$. Tento rozdíl je v případě lichého n roven číslu n . Při dodržení všech podmínek ze zadání (každé černé pole ze sudé řady je spojeno s nějakým černým polem z liché řady) však může tento rozdíl být roven maximálně číslu 1.

L i t e r a t u r a

- [1] *Engel, A.*: Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag, New York, Inc. 1998.
- [2] *Kanel-Belov, A. J. – Kovaldži, A. K.*: Kak rešajut nestandartnyje zadači (rusky). MCMNO, Moskva 1997.
- [3] *Makrides, G. a kol.*: Objevování, motivace a podpora matematických talentů na evropských školách. MATH.EU Projekt, 2006.
- [4] <http://www.animath.fr/cours/invariants.html>

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 137 a 138, jejichž zadání byla zveřejněna v sedmém čísle loňského (16.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 137

V oboru nezáporných reálných čísel určete všechna řešení soustavy rovnic

$$2x_1 + x_2^2 = x_3^3,$$

$$2x_2 + x_3^2 = x_1^3,$$

$$2x_3 + x_1^2 = x_2^3.$$

Pavel Calábek

Řešení:

Nejprve předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že např. $x_1 = 0$. Z druhé rovnice dané soustavy plyne $x_2 = x_3 = 0$. Zkouškou snadno ověříme, že trojice $(0; 0; 0)$ je řešením dané soustavy rovnic.

Nyní hledejme řešení dané soustavy rovnic v oboru kladných reálných čísel. Označme $m = \min\{x_1, x_2, x_3\} > 0$ a $M = \max\{x_1, x_2, x_3\} > 0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 = m$. Z druhé rovnice dané soustavy vyplývá

$$m^3 = x_1^3 = 2x_2 + x_3^2 \geq 2m + m^2,$$

tedy

$$m^3 - m^2 - 2m = m(m+1)(m-2) \geq 0.$$

Protože m je kladné číslo, plyne odtud $m \in \langle 2; +\infty \rangle$.

Podobně zjistíme, že

$$M^3 \leq 2M + M^2.$$

Odtud $M \in (0; 2)$.

Vzhledem k tomu, že $m \leq M$, plyne z obou předcházejících vztahů

$$m = M = 2.$$

Pokud tedy existuje řešení dané soustavy v oboru kladných reálných čísel, musí nutně platit $x_1 = x_2 = x_3 = 2$. Zkouškou snadno ověříme, že trojice $(2; 2; 2)$ je také řešením dané soustavy.

Daná soustava má dvě řešení v oboru nezáporných čísel. Jsou jimi trojice $(0; 0; 0)$ a $(2; 2; 2)$.

Poznámka. Jelikož je daná soustava cyklická, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že jedna ze složek řešení je například největší, nelze však předpokládat, že složky řešení jsou uspořádány v jistém pořadí. Toto si bohužel neuvědomili autoři některých neúplných řešení.

Správné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Miloslav Hübsch* z Prahy 5.

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Vladimír Pavel* z Blovic.

Úloha 138

Do daného čtverce $ABCD$ vepište obdélník $KLMN$ tak, aby jeho vrcholy K, L, M, N ležely po řadě na stranách AB, BC, CD, DA uvažovaného čtverce a přitom aby pětiúhelníku $KLCMN$ bylo možno vepsat kružnici (tj. aby byl tečnový).

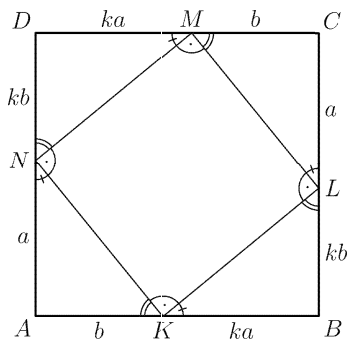
Jaroslav Švrček

Řešení:

Nechť vrcholy K, L, M, N obdélníku $KLMN$ leží po řadě na stranách AB, BC, CD, DA čtverce $ABCD$. Potom jsou zřejmě trojúhelníky (viz obr. 1) NAK a LCM resp. KBL a MDN shodné, přitom trojúhelníky NAK a KBL jsou podobné s koeficientem k . Označme a, b po řadě velikosti odvěsen NA a AK pravoúhlého trojúhelníku NAK . Potom pro velikosti stran AB a BC čtverce $ABCD$ platí

$$|AB| = |AK| + |KB| = b + ka,$$

$$|BC| = |BL| + |LC| = kb + a.$$



Obr. 1

Ze shodnosti stran AB a BC plyne

$$b + ka = kb + a,$$

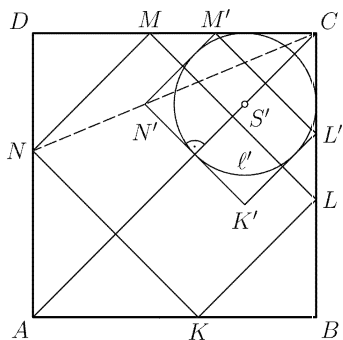
což upravíme na tvar

$$(b - a)(1 - k) = 0.$$

Z rovnosti $k = 1$ plyne, že $KLMN$ je čtverec, což odporuje zadání. Nutně tedy platí $a = b$, odtud již dostaneme, že úsečky MN a LK jsou osově souměrné podle úhlopříčky AC , resp. úsečky LM a KN jsou osově souměrné podle úhlopříčky BD .

Označme ℓ kružnici vepsanou pětiúhelníku $KLCMN$. Kružnice ℓ se dotýká stran BC , CD čtverce $ABCD$, její střed S tedy leží na ose úhlu BCD , což je úhlopříčka AC čtverce $ABCD$.

Obdélník $KLMN$ sestrojíme pomocí stejnolehlosti. Necht' ℓ' je libovolná kružnice se středem S' , která se dotýká polopřímek CB a CD . Sestrojíme obdélník $K'L'M'N'$ takový, že $K'N'$ je tečna ke kružnici ℓ' kolmá na polopřímku CA , $K'L'$ resp. $M'N'$ jsou tečny ke kružnici ℓ' rovnoběžné s přímkou AC a body L' , M' leží po řadě na polopřímkách CB , CD (viz obr. 2). Takový obdélník $K'L'M'N'$ můžeme sestavit právě jedním způsobem. Označme N průsečík polopřímky CN' s úsečkou DA a uvažujme stejnolehlost h se středem C , která převádí obdélník $K'L'M'N'$ v obdélník $KLMN$, který je vepsán požadovaným způsobem do čtverce $ABCD$. Obrazem kružnice ℓ' je pak kružnice ℓ vepsaná pětiúhelníku $KLCMN$. Tím je (jednoznačně) určen obdélník $KLMN$ daných vlastností.



Obr. 2

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5. *Jozef Mészáros* z Jelky a *Vladimír Pavel* z Blovic.