

Ramseyova čísla a jejich uplatnění v geometrii

JAROMÍR ŠIMŠA

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

K oblíbeným a přitom jednoduchým příkladům z oblasti rekreační matematiky patří bezesporu úloha dokázat, že *v každé skupině šesti lidí se najdou tři osoby, které se navzájem znají, nebo tři osoby, které se navzájem neznají*.¹ Podobná problematika se objevila mj. také v 57. ročníku matematické olympiády, a to v kategorii C. Méně už je známo, že tato logická hříčka má dalekosáhlá zobecnění, jež vytvářejí významnou kombinatorickou metodu, které se mezi odborníky říká *Ramseyova teorie*.² Poté, co vyložíme její základy, popíšeme v tomto článku dvě (poněkud překvapivá) řešení jednoho obtížného geometrického problému o konvexních mnohoúhelnících.

Zmíněné tvrzení o dvojicích známých a neznámých ve skupině šesti lidech je možné zobecnit v několika etapách. První z nich vede k následujícímu výsledku.

Věta 1

Pro libovolná přirozená čísla a , b (obě větší než 1) existuje přirozené číslo N s vlastností: V jakékoliv skupině N osob se vždy najde a lidí, kteří se navzájem znají, nebo b lidí, kteří se navzájem neznají.

¹ Předpokládáme, že vztah „znát se“ je *symetrický*, tj. A zná B , právě když B zná A .

² *Frank Plumpton Ramsey* (1903–1930), anglický matematik a filosof, předčasně zesnulý autor nepočtených, přesto velice významných prací z matematické logiky, kombinatoriky, pravděpodobnosti a matematické ekonomie.

Než přikročíme k důkazu této věty, uveďme, že nejmenší vyhovující hodnotu N z věty 1 (závislou na parametrech a, b) nazýváme *Ramseyovým číslem* $R(a, b)$. Tak podle úvodního příkladu o jakémkoliv šestici lidí platí nerovnost $R(3, 3) \leq 6$. Protože však skupina pěti lidí požadovanou vlastnost mít nemusí (jsou-li např. v pěti osob A, B, C, D, E dvojice známých $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, D\}$, $\{D, E\}$, $\{E, A\}$ a žádné jiné), platí ve skutečnosti rovnost $R(3, 3) = 6$.

Důkaz věty 1. Nejprve vyšetříme případ, kdy $\min\{a, b\} = 2$. Tehdy plyne tvrzení a upřesňující rovnosti $R(a, 2) = a$, $R(2, b) = b$ z následujícího triviálního poznatku: Pokud se ve skupině N osob nenajde žádná dvojice neznámých (resp. známých), pak se každé dvě osoby znají (resp. neznají).

Zbýlé případy věty 1 nyní dokážeme užitím principu matematické indukce vzhledem k součtu $a+b$. První indukční krok už vlastně máme hotov, druhý indukční krok založíme na úvaze, ze které v případě $\min\{a, b\} \geq 3$ vyplyne rovnou odhad Ramseyových čísel ve tvaru

$$R(a, b) \leq R(a-1, b) + R(a, b-1). \quad (1)$$

Mějme tedy skupinu S složenou z N osob. Zvolme libovolnou osobu $A \in S$ a zbylé osoby rozdělme do dvou tříd T_z a T_n , které se s A znají, resp. neznají. *Předpokládejme*, že v celé skupině S se nenajde ani a lidí, kteří se navzájem znají, ani b lidí, kteří se navzájem neznají. Pak se ve třídě T_z nenajde ani $a-1$ lidí, kteří se navzájem znají, a pochopitelně ani b lidí, kteří se navzájem neznají, takže je v ní nejvýše $R(a-1, b)-1$ osob. Podobně se zdůvodní, že ve třídě T_n je nejvýše $R(a, b-1)-1$ osob. Proto pro počet N osob v celé skupině S platí nerovnost

$$N \leq 1 + (R(a-1, b)-1) + (R(a, b-1)-1) = R(a-1, b) + R(a, b-1) - 1,$$

(jednička za znakem „ $\leq$ “ značí započítání osoby A). Vzpomeneme-li na *předpoklad*, z něhož jsme nerovnost odvodili, vidíme, že pro každé celé $N \geq R(a-1, b) + R(a, b-1)$ je vlastnost z věty 1 již zaručena, a nejmenší vyhovující $N = R(a, b)$ tudíž splňuje nerovnost (1).

K ukončenému důkazu věty 1 dodejme, že nerovnosti (1) poskytují pouze hrubé odhady Ramseyových čísel, jejich upřesňování je však obtížné natolik, že v případě $\min\{a, b\} \geq 3$ je dosud známo jen několik hodnot $R(a, b)$. Dokonce je nyní všechny vypíšeme. S ohledem na zřejmé rovnosti

$R(a, b) = R(b, a)$, které plynou ze symetrie vztahů „znát se“ a „neznat se“ v definici Ramseyových čísel, uvedeme známá čísla $R(a, b)$ jen pro dvojice (a, b) splňující nerovnosti $a \geq b \geq 3$:

$R(3,3) = 6$	$R(4,3) = 9$	$R(5,3) = 14$
$R(6,3) = 18$	$R(7,3) = 23$	$R(8,3) = 28$
$R(9,3) = 36$	$R(4,4) = 18$	$R(5,4) = 25$

Pohlédneme na větu 1 abstraktněji. Měli jsme v ní zadánu N -prvkovou množinu (stručněji „ N -množinu“) a jakékoliv rozdělení všech jejích dvojprvkových podmnožin do dvou tříd (dvojic známých a dvojic neznámých lidí). V dalším zobecnění budou do dvou tříd rozděleny všechny p -prvkové podmnožiny (stručněji „ p -podmnožiny“) dané N -množiny s pevně zvoleným $p \leq N$, takže volbou $p = 2$ dostaneme původní větu 1.

Věta 2

Pro libovolná přirozená čísla p, a, b , kde $a \geq p$ a $b \geq p$, existuje přirozené číslo N s touto vlastností: Rozdělíme-li všechny p -podmnožiny dané N -množiny S libovolně do dvou tříd T_1 a T_2 (jedna z nich může být i prázdná), pak existuje a -množina $X_1 \subseteq S$, jejíž p -podmnožiny jsou všechny ve třídě T_1 , nebo existuje b -množina $X_2 \subseteq S$, jejíž p -podmnožiny jsou všechny ve třídě T_2 .

Nejmenší N z věty 2 nazýváme Ramseyovým číslem $R_p(a, b)$. Rozmyslete sami, proč obecně platí

$$R_p(a, b) = R_p(b, a), \quad R_p(a, p) = a, \quad R_1(a, b) = a + b - 1.$$

Důkaz věty 2 lze založit na analogické úvaze jako důkaz věty 1. Za předpokladu $\min\{a, b\} \geq p + 1$ zvolíme v dané N -množině S pevný prvek x a v $(N - 1)$ -množině $S' = S \setminus \{x\}$ rozdělíme všechny $(p - 1)$ -podmnožiny do dvou vhodných tříd T'_1 a T'_2 . Sami promyslete jak a dokončete celou úvahu, která tentokrát vede k nerovnostem

$$R_p(a, b) \leq R_{p-1}(a', b') + 1, \quad \text{kde } a' = R_p(a - 1, b) \quad \text{a} \quad b' = R_p(a, b - 1).$$

Je až neuvěřitelné, že v případě $p \geq 3$ je dosud známa jediná netriviální hodnota $R_p(a, b)$, totiž $R_3(4, 4) = 13$.

Nyní uvedeme nejobecnější variantu Ramseyovy věty, ve které všechny p -podmnožiny dané množiny rozdělujeme ne do dvou, ale jakéhokoliv daného počtu tříd, který označíme s (takže volbou $s = 2$ dostaneme větu 2).

Při následných geometrických úvahách ovšem vystačíme s větou 2, proto o důkazu věty 3, který je navíc obdobný předchozím důkazům, nebudeme uvádět žádné podrobnosti.

Věta 3

Pro libovolných $s + 1$ přirozených čísel $p, a_1, a_2, \dots, a_s$, kde $a_i \geq p$ pro každé $i = 1, \dots, s$, existuje přirozené číslo N s vlastností: Rozdělíme-li všechny p -podmnožiny dané N -množiny S libovolně do s tříd $T_1, T_2, \dots, T_s$ (některé z nich mohou být i prázdné), pak pro některé $i = 1, \dots, s$ se najde a_i -množina $X_i \subseteq S$, jejíž p -podmnožiny jsou všechny ve třídě T_i .

Nejmenší takové N nazýváme Ramseyovým číslem $R_p(a_1, a_2, \dots, a_s)$.

Větu 3 můžeme ilustrovat alespoň jednou ukázkou. Například číslo $R_2(3, 5, 8)$ je nejmenší N , při kterém platí: Obarvíme-li každou stranu i každou úhlopříčku daného N -úhelníku jednou z barev červená, modrá a zelená, pak vždy některé obarvené úsečky vytvoří červený trojúhelník, modrý pětiúhelník nebo zelený osmiúhelník (za jednobarevný považujeme mnohoúhelník, který má všechny strany i úhlopříčky obarveny stejnou barvou). Čemu se rovná Ramseyovo číslo $R_2(3, 5, 8)$, patrně nikdy nezjistíme. V případě $\min\{a, b, c\} \geq 3$ známe jediné číslo $R_2(a, b, c)$, totiž $R_2(3, 3, 3) = 17$. Uvědomte si, jaký význam toto číslo v podané interpretaci má, a dokažte sami nerovnost $R_2(3, 3, 3) \leq 17$, zadanou na 6. Mezinárodní matematické olympiádě v roce 1964. (Najít příklad, který by potvrdzoval nerovnost $R_2(3, 3, 3) > 16$, však raději nezkoušejte, i když je časopisecky publikováno, jak takový příklad poměrně nenahodile sestrojil.)

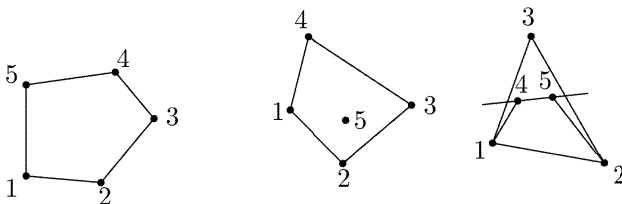
Čtenáři si patrně uvědomili, že tematika obarvování stran a úhlopříček mnohoúhelníků popsaná v předchozím odstavci není až tolik *geometrickou*, jako spíše *grafovou* problematikou (hledání úplných monochromatických podgrafů v úplných konečných grafech s obarvenými hranami). Podstatně více geometrie v sobě nese výsledek, kterým se budeme od této chvíle až do konce článku zabývat a který v roce 1935 poprvé dokázali *Paul Erdős* (1913–1996) a *George Szekeres* (1911–2005).

Věta 4

Pro každé přirozené číslo $k \geq 3$ existuje celé číslo N s vlastností: Zvolíme-li v rovině N bodů tak, aby žádné tři z nich neležely v přímce, pak vždy některých k zvolených bodů vytvoří vrcholy konvexního k -úhelníku.

S uvedeným tvrzením jako zajímavou hypotézou přišla v roce 1933 mezi své přátele – tehdejší budapeštské vysokoškoláky – studentka *Esther Kleinová*³ (1911–2005), která sama nejdříve vymyslela a dokázala tvrzení o výběru čtveřice bodů tvořících vrcholy konvexního čtyřúhelníku, tedy případ věty 4 pro nejmenší netriviální $k = 4$.⁴ Ukážeme jako Kleinová, že tehdy vyhovuje hodnota $N = 5$.

Mějme tedy v rovině dānu libovolnou pětici bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Rozlišíme tři možné případy podle toho, zda konvexním obalem takové pětice bodů je pětiúhelník, čtyřúhelník, nebo trojúhelník (obr. 1).



Obr. 1

V prvním případě každé čtyři z daných bodů tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníku, ve druhém případě jsou to čtyři vrcholy konvexního obalu. Ve třetím případě můžeme dané body označit čísla 1 až 5 tak, aby body 4 a 5 ležely uvnitř trojúhelníku 123. Přímka 45 vždy protne právě dvě z jeho stran, tudíž jeho vrcholy můžeme očíslovat tak, aby neprotnutou zůstala strana 12. Pak body 1, 2, 4, 5 jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku. Tím je důkaz věty 4 pro $k = 4$ hotov. Zároveň je jasné, že uvažovaná hodnota $N = 5$ je nejmenší možná, neboť některé čtveřice bodů (neobsahující trojici kolineárních bodů) nejsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku; dostaneme je, když trojici vrcholů jakéhokoliv trojúhelníku doplníme do čtveřice jeho libovolným vnitřním bodem.

Čtenář se sám může pokusit o důkaz věty 4 pro další hodnotu $k = 5$. Nezbytné diskuse o možných vzájemných polohách N bodů se pro každé

³Díky svatbě Szekereše a Kleinové v roce 1937 Erdős později začal tematiku věty 3 označovat jako *Happy End Problem*. Toto pojmenování se všeobecně ujalo, jak můžete ověřit „googlováním“ na internetu.

⁴Pro $k = 3$ je věta 4 triviální, neboť každý trojúhelník je konvexní, takže požadovanou vlastnost má již nejmenší v úvahu přicházející $N = 3$.

další $N = 6, 7, 8, \dots$ neúměrně prodlužují. Přesto lze s tužkou v ruce dospět k závěru, že pro $k = 5$ je nejmenší N rovno 9. Nalezení nejmenšího N pro $k = 6$ je ovšem i nad možností současných počítačů; známo je pouze, že hledané N splňuje nerovnosti $17 \leq N \leq 37$. Všeobecně se věří, že to bude uvedená krajní hodnota $N = 17$, která je ve shodě s tzv. Erdšovou hypotézou, jež patří k nejatraktivnějším nerozřešeným problémům kombinatorické geometrie. Podle ní pro každé k má nejmenší N vyhovující větě 4 vyjádření $N = 2^{k-2} + 1$.⁵

Věnujme se však samotné *existenční* větě 4. K oběma jejím odlišným důkazům, které uvedeme, budeme potřebovat následující užitečné kritérium toho, kdy daných k bodů tvoří vrcholy konvexního k -úhelníku. Jeho formulace tak trochu napovídá, že pro důkaz věty 4 by mohla dobře posloužit právě Ramseyova teorie.

Lemma 1

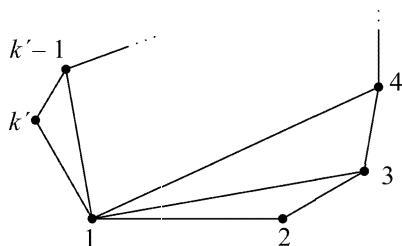
Daných k bodů roviny, z nichž žádné tři neleží v přímce, tvoří vrcholy konvexního k -úhelníku, právě když v žádném trojúhelníku s vrcholy ve třech daných bodech neleží žádný z ostatních $k - 3$ daných bodů, tedy, právě když každé čtyři z daných bodů jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku.

Důkaz lemmatu 1, který nyní podáme, není obtížný ani nijak trikový. Předně je jasné, že vrcholy konvexního k -úhelníku popsanou vlastnost mají: Žádný z těchto k bodů neleží v konvexním obalu ostatních $k - 1$ bodů, a tedy ani v žádném trojúhelníku, které tyto body určují.

Předpokládejme nyní naopak, že daných k bodů netvoří vrcholy konvexního k -úhelníku, takže jejich obalem je konvexní k' -úhelník M , kde $k' < k$. Pak některý z daných bodů (kterýkoliv z těch, které jsou různé od vrcholů M) musí ležet uvnitř M , tedy uvnitř jednoho z $k' - 2$ trojúhelníků 123, 134, $1(k' - 1)k'$, na které lze celý k' -úhelník M rozdělit (obr. 2).

Protože všechny vrcholy těchto trojúhelníků (tedy vrcholy M) jistě patří k původním k daným bodům, je důkaz lemmatu 1 hotov.

⁵Víme pouze, že tato Erdšova hypotéza platí pro $k \in \{3, 4, 5\}$; vzhledem ke kráse jejího vzorce by bylo docela smutné (i když v zájmu vědeckého poznání), kdyby ji někdo nějakým protipříkladem vyvrátil.



Obr. 2

Nyní již máme vše připraveno k tomu, abychom dokázali větu 4 stejným způsobem, jako to udělali Erdős a Szekeres, totiž s pomocí Ramseyovy teorie. Uvažujme tedy libovolnou rovinnou množinu S tvořenou N body, z nichž žádné tři neleží v přímce. Všechny čtveřice bodů z S rozdělme do dvou tříd T_k a T_n takto: Do třídy T_k zařadíme čtveřice tvořící vrcholy konvexních čtyřúhelníků, do třídy T_n ostatní čtveřice. Využijeme nyní větu 2 pro $a = k$ a $b = 5$. Bude-li v S alespoň $R_4(k, 5)$ bodů, bude vždy možný aspoň jeden z výběrů, které teď pro přehlednost popíšeme a okomentujeme odděleně.

- (i) Výběr k bodů z S s vlastností: Každá čtveřice vybraných bodů leží v T_k . Podle lemmatu 1 všech k vybraných bodů pak vytvoří vrcholy konvexního k -úhelníku.
- (ii) Výběr pěti bodů z S s vlastností: každá čtveřice vybraných bodů leží v T_n , tj. žádné čtyři z vybraných pěti bodů nejsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku. Jak jsme již dokázali, taková situace je však vyloučena (prvotní výsledek Kleinové).

Proto musí existovat výběr (i) a věta 4 s obecným k je tak dokázána. Pro každé k vyhovuje libovolné $N \geq R_4(k, 5)$.

Přejdeme nyní k druhému důkazu věty 4, který je kuriózní tím, že ho objevil až v roce 1975 v USA univerzitní student *Tarsy*, když skládal zkoušku z kombinatoriky. Po metodické stránce je zajímavé srovnání jeho postupu s prvním důkazem věty 4 z roku 1935, který byl, jak jsme viděli, postaven na rozdělení do dvou tříd všech *čtveřic* bodů vybraných z dané množiny S . Tarsyův důkaz je založen na zcela odlišném rozdělení do dvou tříd všech *trojic* bodů z S , tedy všech trojúhelníků s vrcholy v S . Toto rozdělení nyní popíšeme.

Nechť tedy S je opět libovolná množina tvořená N body v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Tyto body označíme čísly $1, 2, 3, \dots, N$ a pak

všechny trojúhelníky ijk ($1 \leq i < j < k \leq N$) rozdělíme do dvou tříd T_k , T_z následujícím způsobem: Třída T_k bude obsahovat ty trojúhelníky ijk , které jsou popsány v kladném směru (obr. 3 vlevo), trojúhelníky ijk popsané v záporném směru (obr. 3 vpravo) vytvoří třídu T_z .



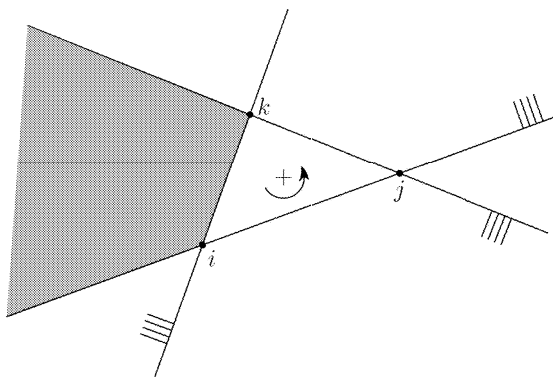
Obr. 3

Čím může přispět taková klasifikace trojúhelníků k důkazu věty 4? Odpověď poskytuje následující tvrzení.

Lemma 2

Jsou-li trojúhelníky ijk , ijl , ikl , jkl popsány ve stejném směru, tvoří body i , j , k , l vrcholy konvexního čtyřúhelníku.

Důkaz provedeme pomocí obr. 4 s trojúhelníkem ijk popsaným v kladném směru (pro záporný směr popisu čtyř uvažovaných trojúhelníků je celý důkaz stejný).



Obr. 4

Posuďme nyní, kde může ležet čtvrtý bod l , když trojúhelníky ijl , ikl , jkl jsou rovněž popsány v kladném směru. Srovnáme-li jejich popisy s popisem trojúhelníku ijk , zjistíme, že bod l leží ve třech polorovinách, a to

v polorovině ijk , v polorovině opačné k polorovině ikj a v polorovině jki . Tyto tři poloroviny jsou na obrázku vyznačeny čárkováním u hraničních přímk, jejich průnikem je neomezená oblast, která je vybarvena. Je vidět, že každý bod této oblasti (a tedy i bod l) tvoří s body i, j, k vrcholy konvexního čtyřúhelníku. Tím je důkaz lemmatu 2 ukončen.

Nyní již snadno dokončíme Tarsyův důkaz věty 4. Má-li uvažovaná množina S alespoň $R_3(k, k)$ bodů, pak podle věty 2 lze z S vybrat k bodů tak, že (při zvoleném očíslování všech bodů z S) všechny trojúhelníky s vrcholy ve vybraných bodech leží ve třídě T_k nebo ve třídě T_z , jsou tedy všechny popsány ve stejném směru. Proto podle lemmatu 2 tvoří každé čtyři z vybraných bodů vrcholy konvexního čtyřúhelníku. To však podle lemmatu 1 znamená, že všech k vybraných bodů jsou vrcholy konvexního k -úhelníku a druhý důkaz věty 4 je hotov.

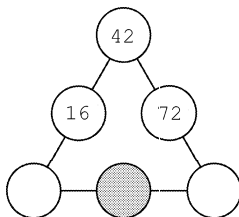
58. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z9

Z9–I–1

Do tří prázdných polí na obrázku patří taková přirozená čísla, aby součin tří čísel na každé straně trojúhelníku byl stejný.



Jaké nejmenší a jaké největší číslo může být za této podmínky vepsané v šedě vybarveném poli?

Libor Šimůnek

Z9–I–2

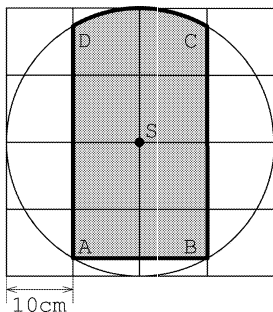
Alena, Bára, Čeněk a David si společně koupili tandem — jízdní kolo pro dva. Na projížďku vyrážejí vždy ve dvojici. Každý jel s každým už alespoň jednou a nikdo jiný se na tandemu ještě nevezl. Alena byla na projížďce jedenáctkrát, Bára dvacetkrát, Čeněk jen čtyřikrát.

Určete, kolikrát minimálně a kolikrát maximálně mohl být na projížďce David.

Libor Šimůnek

Z9–I–3

Ve čtvercové síti, jejíž čtverce mají stranu délky 10 cm, je narysována kružnice se středem S ve vyznačeném mřížovém bodě a poloměrem 20 cm. Body A , B , C a D jsou průsečíky kružnice se sítovými přímkami.

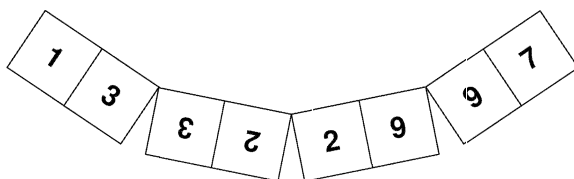


Určete obsah vybarvené plochy $ABCD$.

Libor Šimůnek

Z9–I–4

Dominik si vyrobil „prvočíselné domino“ — každá kostka odpovídala jednomu dvojmístnému prvočíslu tak, že na každé polovině kostky byla jedna číslice tohoto prvočísla. Žádné dvojmístné prvočíslu v dominu nechybělo a žádné prvočíslu nebylo na dvou kostkách.

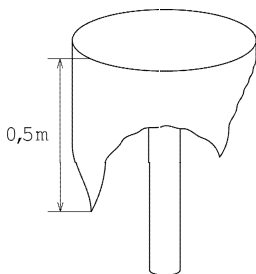


Dominik se rozhodl, že všechny kostky uspořádá do kružnice tak, aby kostky ležící vedle sebe sousedily stejnou číslicí, viz obrázek. Jeho kamarád Bořek mu řekl, že to nelze provést. Měl Bořek pravdu?

Michaela Petrová

Z9–I–5

Na stole s kruhovou deskou o průměru 0,6 m je „nakřivo“ položený čtvercový ubrus se stranou 1 m. Jeden cíp ubrusu přechází přes hranu desky stolu 0,5 m, sousední cíp 0,3 m.



Určete délku přesahu zbylých dvou cípů.

Světlana Bednářová

Z9–I–6

Čtyři tatínkové chtěli dětem sponzorovat lyžařský zájezd.

První slíbil: „Dám 11 500 Kč,“

druhý slíbil: „Dám třetinu toho, co vy ostatní dohromady,“

třetí slíbil: „Já dám čtvrtinu toho, co vy ostatní dohromady,“

čtvrtý slíbil: „A já dám pětinu toho, co vy ostatní dohromady.“

Kolik korun slíbil druhý, třetí a čtvrtý tatínek?

Marta Volfová

KATEGORIE Z8

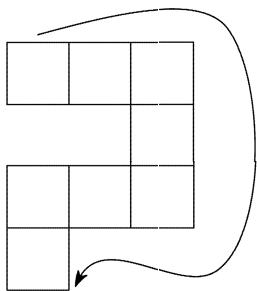
Z8–I–1

Myslím si nezáporné číslo ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem 12. Když je napíšeš ve tvaru desetinného čísla, bude mít před i za desetinnou čárkou po jedné číslici, obě tyto číslice budou nenulové. Čísel, která mají obě uvedené vlastnosti, je více. Pokud je však seřadím od nejmenšího po největší, bude to „moje“ předposlední.

Jaké číslo si myslím?

Světlana Bednářová

Z8–I–2



Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.

Kterým svým číslem se kostka plánu nedotkla, jestliže součet všech napsaných čísel byl 86?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Monika Dillingerová

Z8–I–3

Grafik v redakci novin dostal dva obrázky, aby je umístil k článku. První originál byl 13 cm široký a 9 cm vysoký, druhý měřil na šířku 14 cm a na výšku 12 cm. Grafik se rozhodl umístit obrázky na stránku vedle sebe tak, aby se dotýkaly a aby oba měly stejnou výšku. Po vytištění měly obrázky dohromady zaujímat šířku 18,8 cm. Obrázky tedy vhodně zmenšil, aniž by je jakkoli ořezával.

Jaká bude výška vytištěných obrázků?

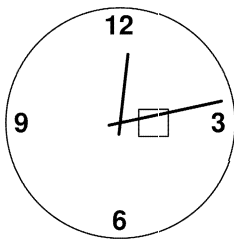
Libor Šimůnek

Z8–I–4

Máme dány tři navzájem různé nenulové číslice. Na tabuli napíšeme všechna trojciferná čísla, která lze složit z těchto číslic, přičemž pro každé číslo použijeme všechny tři číslice. Součet napsaných čísel je 1776.

Se kterými třemi číslicemi jsme pracovali? Určete všechna řešení.

Libor Šimůnek

Z8–I–5

Na věži radnice jsou hodiny, které mají blízko středu ciferníku dvířka používaná při údržbě. Dvířka se však otevírají ven, což je nepraktické — například přesně v 12:09 zakryje velká ručička dvířka, která pak nejdou otevřít po dobu, jež končí přesně v 12:21.

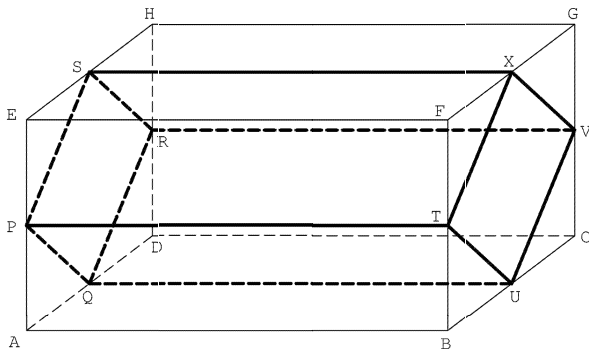
Kolik minut denně dvířka nelze otevřít?

(Nezapomeňte, že dvířka může zakrýt i malá ručička; celá dvířka leží v kruhu, který tato ručička opisuje.)

Libor Šimůnek

Z8–I–6

V kvádru $ABCDEFGH$ je umístěno těleso $PQRSTUVX$, jehož vrcholy jsou středy hran kvádru, viz obrázek.

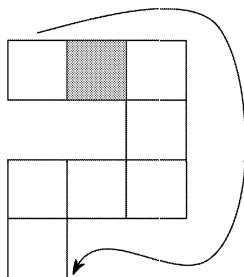


Vypočítejte objem a povrch hranolu, je-li: $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|BF| = 4$ cm.

Marie Krejčová

KATEGORIE Z7

Z7–I–1



Na každou stěnu hrací kostky jsme napsali jiné prvočíslo menší než 20 tak, aby součty dvou čísel na protilehlých stěnách byly vždy stejné. Kostku jsme položili na první políčko plánu na obrázku největším číslem dolů. Potom jsme kostku převraceli naznačeným směrem po plánu. Při každém dotyku kostky s plánem jsme na odpovídající políčko napsali číslo, kterým se ho kostka dotkla.

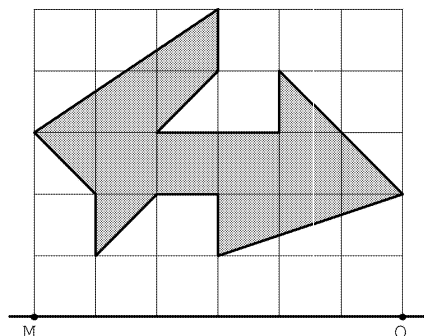
Kterým číslem se kostka dotkla zbarveného políčka, jestliže součet všech napsaných čísel byl největší možný?

(Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.)

Monika Dillingerová

Z7–I–2

Na obrázku je čtvercová síť, jejíž čtverce mají stranu délky 1 cm. V síti je zakreslen obrazec vybarvený šedě. Libor má narýsovat přímku, která je rovnoběžná s přímkou MO a rozděluje šedý obrazec na dvě části o stejném obsahu.



V jaké vzdálenosti od přímky MO povede Libor tuto rovnoběžku?

Libor Šimůnek

Z7–I–3

Turisté plánovali dlouhou túru na tři dny s tím, že každý den ujdou třetinu celé trasy. To dodrželi jen první den. Druhý den ušli pouze třetinu zbylé cesty a třetí den, unaveni, jen čtvrtinu zbytku. Posledních 24 km do cíle je dovezlo terénní auto.

Jak dlouhá měla být celá túra a kolik kilometrů turisté ušli první, druhý a třetí den?

Marta Volfová

Z7–I–4

Pan Horák je o 3 roky starší než jeho žena a jejich prvorozený syn je o 4 roky starší než jejich druhorozený. Všichni čtyři členové rodiny slaví narozeniny ve stejný den, nyní mají dohromady 81 let. Před 5 lety bylo členům této rodiny dohromady 62 let. Urči dnešní stáří rodičů i obou dětí.

Marta Volfová

Z7–I–5

Zuzka napsala pětimístné číslo. Když připsala jedničku na konec tohoto čísla, dostala číslo, které je třikrát větší než číslo, které by získala, kdyby napsala jedničku před původní číslo.

Které pětimístné číslo Zuzka napsala?

Libuše Hozová

Z7–I–6

Je dán obdélník $ABCD$. Bodem A vedeme přímkou, která protne úsečku CD v bodě X tak, že pro obsahy vzniklých útvarů platí $S_{AXD} : S_{ABCX} = 1 : 2$. Bodem X vedeme přímkou, která protne úsečku AB v bodě Y tak, že platí $S_{AXY} : S_{YBCX} = 1 : 2$. Nakonec bodem Y vedeme přímkou, která protne úsečku XC v bodě Z tak, že platí $S_{XYZ} : S_{YBCZ} = 1 : 2$.

Vypočítej poměr obsahů $S_{AXD} : S_{AXZY}$.

Monika Dillingerová

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 145 a 146, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle tohoto (17.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 145

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro která platí

$$x^2 + y^2 = (x + 3)(2y + 4).$$

Pavel Calábek

Řešení: Rovnici upravíme na tvar

$$(x - y)^2 = 4x + 6y + 12.$$

Pro libovolná celá čísla x, y je výraz na pravé straně číslo dělitelné dvěma, tedy i výraz na levé straně musí být dělitelný dvěma. Pokud má rovnice řešení v oboru celých čísel, existuje celé číslo k tak, že platí

$$\begin{aligned}x - y &= 2k, \\4x + 6y + 12 &= 4k^2.\end{aligned}$$

Odtud

$$x = \frac{2k^2 + 6k - 6}{5}, \quad y = \frac{2k^2 - 4k - 6}{5}.$$

Nechť číslo k dává při dělení pěti zbytek j , tedy existují celá čísla m a j , kde $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, tak, že platí $k = 5(m - 1) + j$. Potom

$$\begin{aligned}x &= 10m^2 - 14m + 4mj - 4j + 4 + \frac{2j^2 + 6j - 6}{5}, \\y &= 10m^2 - 24m + 4mj - 4j + 14 + \frac{2j^2 - 4j - 6}{5}.\end{aligned}\tag{1}$$

Vzhledem k tomu, že m a j jsou celá čísla, jsou x a y celá, právě když čísla $\frac{1}{5}(2j^2 + 6j - 6)$ a $\frac{1}{5}(2j^2 - 4j - 6)$ jsou celá, tj. právě když $j \in \{3, 4\}$. Našli jsme nutnou podmínku existence řešení. Na druhou stranu zkouškou snadno ověříme, že každá z dvojic (vzniklých ze vztahu (1) volbou $j = 3, j = 4$)

$$(x, y) = (10m^2 - 2m - 2, 10m^2 - 12m + 2) \quad (2)$$

$$(x, y) = (10m^2 + 2m - 2, 10m^2 - 8m) \quad (3)$$

pro libovolné celé číslo m vyhovuje dané rovnici.

Dané rovnici vyhovuje nekonečně mnoho celých čísel, každé z nich se dá zapsat jedním ze způsobů (2) nebo (3), kde m je libovolné celé číslo.

Správné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Vladimír Pavel* z Blovic.

Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 146

V rovnostranném trojúhelníku ABD se stranou délky 2 označme C střed strany BD . Tento trojúhelník rozstříhneme na polovinu podél přímky AC . Trojúhelník ABC zůstane pevně na místě a trojúhelník ACD se kolem něj otočí takto: Nejprve se otočí kolem bodu A do polohy $AC'B$, pak se otočí kolem bodu B do polohy $A'CB$ a nakonec se otočí kolem bodu C do původní polohy ACD . Určete obsah rovinného útvaru, který pokryje při tomto pohybu trojúhelník ACD .

Jaroslav Zhouf

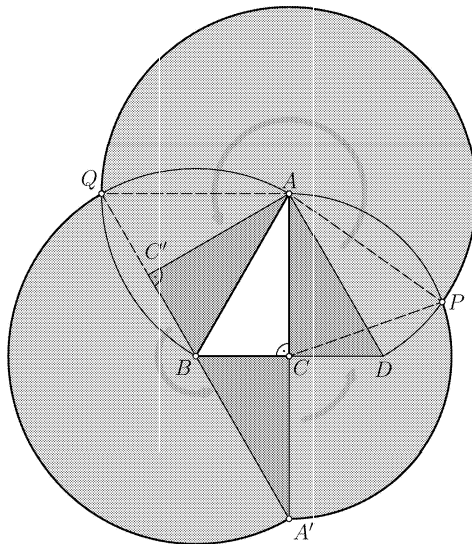
Řešení: Výška rovnostranného trojúhelníku se stranou délky 2 je $|AC'| = \sqrt{3}$. Vidíme, že trojúhelník ACD pokryje při svém pohybu oblast, která je sjednocením kruhů $k_A(A; 2)$, $k_B(B; 2)$ a $k_C(C; \sqrt{3})$ bez vnitřku trojúhelníku ABC (viz obrázek, kde jsou zároveň tmavší barvou zvýrazněny klíčové polohy trojúhelníku ACD). Označme P průsečík kružnic $k_a(A; 2)$ a $k_c(C; \sqrt{3})$, Q průsečík kružnic k_a a $k_b(B; 2)$.

Trojúhelník ABQ je rovnostranný. Trojúhelník ACP je rovnoramenný se základnou AP délky 2 a rameny délek $\sqrt{3}$. Pro velikost φ úhlu PAC platí

$$\cos \varphi = \frac{|AP|}{2|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Jelikož v dalším textu budeme hledat obsahy kruhových výsečí, uvádějme, na rozdíl od zažitých zvyklostí, velikosti úhlů v obloukové míře. Tedy

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{a} \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$



Oblast pokrytou pohybem trojúhelníku ACD rozdělme na několik částí:

- a) Kruhová výseč kruhu k_A ohraničená body P a Q . Velikost nekonvexního úhlu PAQ je

$$2\pi - |\angle QAB| - |\angle BAC| - |\angle CAP| = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} - \varphi = \frac{3\pi}{2} - \varphi,$$

tedy velikost jemu odpovídající kruhové výseče kruhu k_A je

$$S_1 = 4\pi \frac{\frac{3}{2}\pi - \varphi}{2\pi} = 3\pi - 2\varphi.$$

- b) Rovnostranný trojúhelník ABQ ; jeho obsah je

$$S_2 = \sqrt{3}.$$

- c) Kruhová výseč kruhu k_B ohraničená body Q a A' . Velikost úhlu $A'BQ$ je

$$|\angle A'BC| + |\angle CBA| + |\angle ABQ| = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$$

a velikost kruhové výseče kruhu k_B ohraničené body Q a A' je

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi = 2\pi.$$

d) Trojúhelník $A'BC$; jeho obsah je

$$S_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

e) Kruhová výseč kruhu k_C ohraničená body A' a P . Jestliže velikost vnitřního úhlu při základně AP rovnoramenného trojúhelníku APC je φ , potom velikost vnitřního úhlu při vrcholu C je $\pi - 2\varphi$. Velikost (vedlejšího) úhlu $A'CP$ potom je

$$\pi - |\angle ACP| = \pi - (\pi - 2\varphi) = 2\varphi$$

a velikost jemu odpovídající kruhové výseče kruhu k_C je

$$S_5 = 3\pi \cdot \frac{2\varphi}{2\pi} = 3\varphi.$$

f) Trojúhelník ACP , jeho obsah je

$$S_6 = \frac{1}{2} |AC| \cdot |AP| \cdot \sin |\angle CAP| = \frac{1}{2} 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2}.$$

Obsah plochy, kterou pokryje při svém pohybu trojúhelník ACD je tedy

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 &= (3\pi - 2\varphi) + \sqrt{3} + 2\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\varphi + \sqrt{2} = \\ &= 5\pi + \varphi + \frac{3}{2}\sqrt{3} + \sqrt{2} = 5\pi + \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 20,68. \end{aligned}$$

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan a *Vladimír Pavel* z Blovic.

Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Pavel Calábek