

MATEMATIKA

Tvorba nebo volba?

FRANTIŠEK KUŘINA

Pedagogická fakulta Univerzity Hradec Králové

Sestavujeme testy se záměrem zkoušet vědomosti žáků – začasť netušíce, že přitom testujeme svou vlastní inteligenci.

Stanislav Komenda

Tento článek je volným pokračováním mých článků [1], [2], [3], [4], [5], které byly uveřejněny v posledních pěti letech v časopise Matematika, fyzika, informatika, vychází z práce [6] vytvořené v rámci spolupráce s Evropským sociálním fondem a bezprostředním podnětem k jeho napsání byla dílna, kterou jsem vedl na *Dvou dnech s didaktikou matematiky 2007* na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Problematika, kterou se zde budeme zabývat, je hodnocení výsledků vyučování, zvláště pak testování.

1. Úvod

Po značnou část svého pedagogického působení jsem byl přesvědčen, že nejdůležitější složkou vyučování je výklad, který podle úrovně žáků či studentů a charakteru tématu může být různě dlouhý a různě náročný, u vyspělého publika pak může přejít v přednášku vysokoškolského typu. Odpovídalo to mému „implicitnímu“ přesvědčení o transmisivním charakteru vzdělávání. Učitel předává žákům srozumitelnou formou, za pomoci výstižných příkladů, případně modelů či jiných pomůcek, vybraný úsek matematické teorie. Jestliže žáci nerozumějí, učitel výklad opakuje. Role

žáka je dávat pozor, vnímat učivo a zapisovat si je. Snad kolegyně *Blážena Součková*, vynikající učitelka na základní škole v Hradci Králové, má hlavní zásluhu na posunu mého didaktického přesvědčení v této oblasti. Paní učitelka Součková nezanedbávala výklad, vykládala se zaujetím a dobře, respektovala však skutečnost, že argumenty, které při výkladu uvádí, musí být přístupné žákům, že to nemusí být argumenty logické, které jako jediné uznává matematika. Hlavní poučení z její práce pro mne však spočívalo v tom, že další, a patrně důležitější forma její práce, spočívala v organizování činnosti žáků. Od řešení úloh, které byly testem pochopení souvislostí a porozumění výkladu, přecházela k složitějším úlohám na procvičení učiva a jeho aplikacím. Další fází vzdělávacího procesu byly samostatné práce žáků, které byly hodnocené, nikoliv však klasifikované a podle charakteru nedostatků, které žáci vykazali, řešili další úkoly, „šité na míru“ a stupňované co do obtížnosti. Kolegyně Součková byla přesvědčena, že matematika se musí zrodit v myslích žáků na základě jejich matematických činností, matematiku si žáci nemohou osvojit memorováním, ale prací. Z tohoto hlediska je podstatnou složkou vzdělávání systém cvičení úloh a testů. V současné době zažíváme módu testů s výběrovými odpověďmi, jimž se chceme věnovat v tomto článku.

Ze svých dětských let si připomínám, že jsem měl na základní škole (tehdy se nazývala školou měšťanskou) dva učitele matematiky zcela odlišného didaktického zaměření. Pro pana učitele Nováka byla matematika řešením „úsudkových příkladů“, pan učitel Slepíčka, s nímž jsem se příliš neshodl, viděl matematiku jako formální počítání hodnocené nejen podle správnosti výsledku, ale i podle úpravy. Dnes mám dojem, že žádný z těchto učitelů nezařazoval do výuky výklad. Pan učitel Novák vysvětloval jak dál řešit úlohu, teprve když ji někdo řešit neuměl, pan učitel Slepíčka dával instrukce jak počítat. Těžko dnes mohu posoudit, kdo nás naučil víc. Vím pouze, že matematiku úsudkových příkladů jsem měl rád. Pan učitel Novák přesvědčil všechny venkovské děti v okolí jihočeského Bavorova, že matematika je užitečná.

Je patrně typické a doufám, že to nelze přičíst na vrub mé krátké paměti, že z učitelského vzdělání na matematicko – fyzikální fakultě jsem si neodnesl žádná poučení o hodnocení a klasifikaci v matematice. Náзор, že pro vyučování je podstatný výklad, že řešení úloh je důležité pro zkoušení, hodnocení a klasifikaci, tedy z důvodů víceméně společenských, není však podstatné pro matematické vzdělávání, jsem korigoval až po zkušenostech z praxe.

Dnes jsem přesvědčen o nezastupitelné roli úloh ve vyučování a o tom, že organizace práce je základní složkou činnosti učitele, dokonce i na škole vysoké. V článcích [2] a [3] rozebírám metody řešení úloh „klasického“ typu, v tomto příspěvku se budeme zabývat úlohami s výběrovými odpověďmi, přičemž se omezíme na úlohy typu „jedna správná odpověď“. Terminologie v této oblasti není jednotná, někteří autoři označují zmíněné úlohy jako *uzavřené úlohy* (např. M. Chráska [7], s. 212) z tzv. *výběrového testu* (option test, [8], s. 620).

2. Tvorba nebo volba?

Jako učitel matematiky vzdělaný v tradičním duchu nemohu mít k úlohám s výběrovými odpověďmi zcela kladný vztah. Před časem jsem tyto úlohy dokonce jednoznačně odsuzoval. Proč onen záporný vztah k uzavřeným úlohám?

Pro matematiku je typické, že pracuje v konstruovaném světě abstraktních pojmů. Od dob Hilbertových „se matematika zabývá pravidly, nikoli realitou“ ([9], s. 202). To je ovšem charakteristika „hotové“ matematiky, matematiky monografií a vědeckých článků. Řešení problému, důkaz věty, výpočet, konstrukce, ... musí vycházet z daných podmínek, exaktně formulovaných předpokladů a z teorie, která je již součástí matematiky. To, co je dáno, je podstatné a na nic jiného se matematika neohlíží.

Něco zcela jiného je otázka postupu při hledání řešení problému, při hledání důkazu, při tvorbě nových poznatků. Problém, který máme řešit, mobilizuje naše duševní úsilí, při tomto úsilí „je vše dovoleno“: dohady, experimenty, zvažování důsledků, hledání příkladů a protipříkladů, ... Řešení úlohy tak má charakter tvorby, konstrukce něčeho nového. V některých případech může být taková konstrukce zcela elementární, může to být výpočet podle známého algoritmu, řešení problémů znamená ovšem obvykle tápání, vznik alternativ a nápadů. Obvykle se mnohé nápady ukáží jako neplodné, jen „dobré“ nápady vedou k cíli.

Řešení úloh je tvůrčí práce, je to tvorba. Proto je nemožné naučit řešit problémy. Můžeme je ovšem učit řešit – s menším nebo větším úspěchem. Ve škole řešíme řadu úloh, které charakter problémů nemají, a které jako učitelé naučit musíme. Zde mám na mysli řešení typických úloh, např. základních úloh o procentech a funkcích, řešení určitých typů rovnic a nerovnic a jejich soustav, základní geometrické konstrukce, aplikace vzorců pro různé výpočty a výpočty samotné, ať už pomocí výpočetní techniky nebo techniky řemeslné typu úprav algebraických výrazů atp. Z naznačeného

vyplývá, že řešení úloh není věcí samotné logiky. Jde zde spíše o procesy, v nichž se snoubí intuice s logikou, nápady s jejich přijímáním nebo odmítáním. Generování nápadů je charakteristické pro řešení problémů – a to ne jen v matematice.

Jestliže při řešení úloh získáme nabídku výsledků, z nichž máme volit, je nutné chápat to jako pomoc při řešení problému, jako nabídku nápadů. Problém ovšem je, že v testových úlohách jde o nabídku „hotového zboží“, nikoliv o nabídku cest, jak výsledky získat. V první a nejdůležitější etapě, k níž by mělo matematické vzdělávání především směřovat, nám tak uzavřené úlohy příliš nepomohou. Souvisí to ovšem s charakterem školy. Známý matematik a literát 18. století *Georg Christoph Lichtenberg* napsal: „Mnozí lidé vědí všechno tak, jako známe hádanku, jejíž rozluštění jsme si přečetli, nebo nám je někdo řekl, a to je ten nejhorší způsob vědění, který by si člověk měl osvojovat co nejméně. Měl by se spíše snažit získat takové znalosti, které mu umožní, aby v nutném případě sám odhalil mnohé, co si jiní musejí přečíst nebo poslechnout, aby se to dověděli“ ([10], s. 129). Encyklopedické vzdělávání, vzdělávání pro „znalostní“ soutěže a kvízy můžeme jistě dobře rozvíjet systémem uzavřených úloh, tedy volbou z nabídnutých alternativ.

Problematika má ovšem ještě další stránku, které se budeme věnovat v následujícím odstavci.

3. Poznání nebo uznání?

Jestliže vzdělávací proces je proces poznávací, jde v něm o hledání a nalézání pravdy, patrně podobně jako je tomu např. v přírodních vědách. V matematice je ovšem situace jiná, zde „pravda“ znamená soulad s přijatými předpoklady, s přijatou teorií, v jejímž rámci odvozujeme důsledky. Vyjděme z předpokladu, že ve škole, podobně jako ve vědě, usilujeme o pravdivé poznání, které v přírodních vědách je spjata se soustavou pozorování, experimentování, ... a jejich vyhodnocováním, v matematice pak s „logickým“ usuzováním. Poznání ovšem nemůže být omezeno jen na přírodní vědy a matematiku. Pro náš život je možná stejně důležité, ne-li důležitější, např. poznání sociologické, ekonomické, politické, ... , kde nemůžeme dělat experimenty typu např. experimentů fyzikálních a nemůžeme využít v plném smyslu ani logiku, neboť neznáme dostatečně exaktně ani výchozí situaci. Škola by měla vést žáky a studenty k orientaci i v těchto oblastech, kde je poznání pravdy, ať chceme nebo nechceme, exaktně vzato nemožné.

Kromě výše zmíněných přístupů, jimiž jsme charakterizovali tvorbu, zde přistupují aspekty další, např. vnímání představ, pocitů, nálad, důsledků, ... To ovšem není nic nového a je to v souladu s tzv. *pragmatismem*, jehož zakladatel americký filosof *Charles Sanders Peirce* napsal v r. 1878: „Jediným úkolem myšlení je vyvolat víru nebo přesvědčení čili zřídit zvyky pro jednání. Chceme-li dojít k poznání, musíme uvážít, jaké jsou praktické výsledky, o nichž myslím, že mohou býti přivoděny předmětem naší koncepce“ (citováno podle *Pragmatismu Karla Čapka* ([11], s. 269). Sám Čapek píše: „Pragmatism přijímá vše; přijímá logiku, přijímá smysly a ochotně všímá si všech zkušeností, i nejpokornějších a nejzvláštnějších. ... Pragmatická teorie pravdy se týká jejího uznání, nikoliv poznání“ ([11], s. 278).

Taktika řešení testů s výběrovými otázkami je podle mého názoru spíše otázkou pragmatického než matematického myšlení. Poznání pravdy bychom mohli idealisticky požadovat, uznat něco za pravdu je běžný požadavek reality života, k jejímuž chápání by měla i matematika přispívat. Při řešení uzavřených úloh má úspěch ten, kdo odhadne, který výsledek je správný, a není důležité, zda přitom používal matematickou teorii a postupoval logicky.

Vzhledem k tomu, že tento způsob uvažování je někdy pro realitu života důležitější než uvažování formálně logické, uznávám právo na uplatnění úloh s výběrovými odpověďmi i v naší škole, a to i v matematice.

Tradiční matematika vede studenty k hledání pravdy, americkými trendy ovlivňovaná matematika vede k uznání některé z nabídnutých odpovědí za pravdivou.

Není zde analogie s právní praxí? „Kontinentální evropské právo je založeno na premise, že odsouzený je ten, kdo je skutečně vinen, ... zatímco americké právo ... říká, že o vině rozhoduje to, zda žalobce v přímé konfrontaci s obhájcem přesvědčí porotu o vině obžalovaného ... o pravdu ani tak nejde“ ([12], s. 93). Hodnota pravdy v životě člověka a společnosti je znevažována. Již nejde o to, zda žák rozbil okno, ale o to, zda mu to může někdo dokázat.

4. Příklady

V této části uvedme po třech příkladech uzavřených úloh ze čtyř didakticky rozdílných prostředí: od přijímacích testů pro zájemce o službu v britské policii, přijímacích zkoušek na střední školu, maturitních úloh, až

po přípravné úlohy na matematickou olympiádu v USA. Úlohy se přirozeně od sebe liší obtížností, tematikou i metodami řešení.

Úlohy policejní

Zdrojem těchto úloh je české vydání knihy *How to pass numeracy tests* [13].

P1. *Policejní stanice je 1 180 m od knihovny. Supermarket je na půli cesty mezi policejní stanicí a knihovnou. Kolik metrů je supermarket od knihovny?*

- (A) 2 360 (B) 1 200 (C) 590 (D) 600 (E) 1 800.

Správná odpověď (C).

P2. *Jedu-li rychlostí 30 km/h, za jak dlouho v hodinách ujedu 90 km?*

- (A) 0,5 (B) 3 (C) 6 (D) 9 (E) 12.

Správná odpověď (B).

P3. *Pokud se policistky lidé zeptají na cestu v průměru třikrát za den, kolikrát se jí zeptají na cestu za sedm dní?*

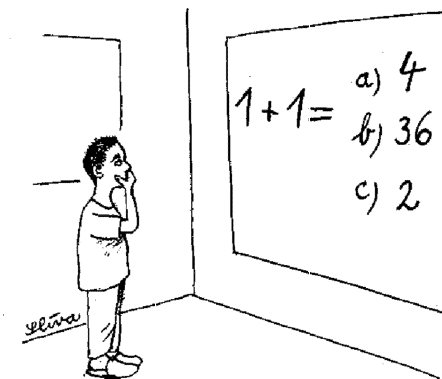
- (A) 4 (B) 10 (C) 17 (D) 21 (E) 27.

Správná odpověď (D).

Úlohy jistě nejsou přípravou na práci policisty v terénu. Stěží si lze představit situaci, že by příslušník policejního sboru používal při kontrole na silnici „tahák“ ve stylu úlohy P2. Citovanými úlohami se snad dá testovat elementární gramotnost a minimální úroveň „zdravého selského rozumu“. Nabídnuté odpovědi hrají patrně jistou kladnou psychologickou roli (na každou otázku je uchazeč schopen odpovědět (správně nebo špatně)). Jsem přesvědčen, že i o úrovni „teoretických“ schopností uchazeče by více vypověděly úlohy bez nabídnutých odpovědí.

Úlohy z přijímacích zkoušek na průmyslovou školu

Když *Jiří Slíva* nakreslil do naší knihy *Pozoruhodný svět elementární matematiky* obr. 1, považovali jsme to za vtipnou nadsázku. Úlohy, které



Obr. 1

nyní uvedeme, však ukazují, že karikaturista příliš nepřeháněl. Citujeme je z knihy *Testy z matematiky 2003* [14] – úlohy byly zadány v Uherském Hradišti.

U1. Vypočti $\frac{33}{100} + \frac{7}{100}$

a) $\frac{337}{100}$

b) $\frac{42}{100}$

c) $\frac{2}{5}$

d) 0,2

e) $\frac{4}{100}$.

Správná odpověď c).

U2. Urči, kolik přirozených čísel je řešením nerovnice: $-2 \leq x < 6$.

a) 5

b) 7

c) 6

d) 9

e) 8.

Správná odpověď a).

U3. V místnosti je stůl a židle. Stůl má 3 nohy. Každá židle má 4 nohy. Když na každé židli sedí člověk, je celkový počet nohou 39. Kolik židlí je v místnosti?

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7.

Správná odpověď d).

Úlohami z přijímacích zkoušek se škola, ať chce nebo nechce, prezentuje i na veřejnosti. Co si má pomyslet otec – technik o škole, která má

vychovávat pro praxi, a napovídá jak sečíst dva zlomky se stejným jmenovatelem (U1)? Hodnota úlohy U2 snad spočívá jen v terminologické „jemnosti“, téměř pohádková realita na úrovni prvního stupně základní školy není rovněž vhodnou uzavřenou úlohou (U3). Policejní úlohy nebyly příliš vynalézavé, byly však, na rozdíl od úloh z průmyslové školy, aspoň z oboru, o který se uchazeči zajímají.

Úlohy testu Scio

I zde jde o úlohy z přijímacích zkoušek na střední školu. Úlohy S1 a S2 jsou převzaty z publikace [15], úloha S3 z testu [16].

S1. Maminka chtěla vysadit tulipány do šesti, sedmi nebo osmi řádků. Kolik měla tulipánů, když jejich počet je nejmenší možné trojciferné číslo?

- a) 100 b) 168 c) 158 d) 148

Jako správná je uvedena odpověď b).

S2. Máme pytel ořechů. Můžeme je rovným dílem rozdělit mezi 2, 3, 4, 5, 6, 8 a 10 dětí tak, že žádný nezbude. Kolik můžeme mít v pytli nejméně ořechů?

- a) více než 69 a méně než 90 b) více než 89 a méně než 110
c) více než 109 a méně než 130 d) více než 129.

Správná odpověď je příj c).

S3. O kolika číslicích platí, že se nacházejí uvnitř vždy jen jednoho z obrazců na obr. 2?

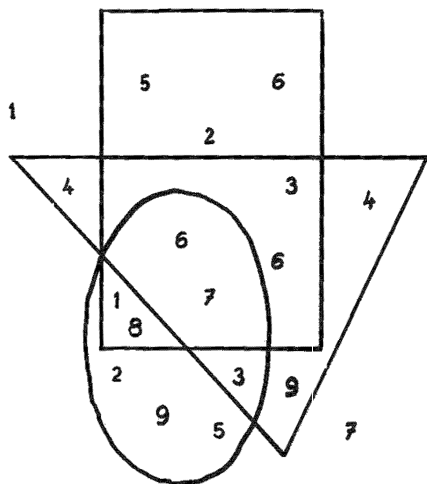
- a) o třech b) o pěti c) o šesti d) o osmi e) o devíti

Správná odpověď je e).

Jaký je součet všech číslic, které se nacházejí ve všech třech obrazcích najeďnou?

- a) 9 b) 13 c) 18 d) 24 e) 31

Správná odpověď je b).



Obr. 2

V částech P a U jsou uvedena řešení úloh, ačkoliv byla zřejmá. V části S si všimneme řešení úloh podrobněji. Co když v úloze S1 uvažuje řešitel následujícím způsobem?

Protože maminka může vysadit tulipány jen do jednoho určitého počtu řádků z požadovaných šesti, sedmi nebo osmi, ne však zároveň do všech, stačí jí 105 tulipánů. V tomto případě sází tulipány do 7 řádků ($105 = 7 \cdot 15$). Sází-li do 8 řádků, zbude jí 1 tulipán, ($105 = 8 \cdot 13 + 1$), sází-li do 6 řádků, zbudou jí 3 ($105 = 6 \cdot 17 + 3$). Tento správný výsledek Scio vůbec neuvádí. Hodnotíme-li odpověď 105 jako nesprávnou, vnucujeme žákovi názor, že se má podřídít autoritě a nepřemýšlet samostatně. Z navržených odpovědí ovšem pozná, co měli autoři na mysli, ale na jejich řešení nemůže přistoupit. 168 je sice nejmenší společný násobek čísel 6, 7 a 8, ale tento výsledek „úloze z praxe“ vůbec neodpovídá.

V úloze S2 si patrně žák uvědomí, že počet ořechů je nejmenším společným násobkem čísel 2, 3, 4, 5, 6, 8 a 10, tedy 120, tato odpověď však v uváděných alternativách není. Má-li být správná odpověď c), znamená to, že v pytli může být např. 110 ořechů. V textu publikace [15] se přitom uvádí, že u každé úlohy je „jediná správná odpověď“. Snad bychom měli vést žáky k tomu, aby rozlišovali formulace: „správná odpověď je ...“ a „správná odpověď není v rozporu s ...“.

Úloze S3 můžeme patrně rozumět i takto: Číslice 5 a 2 jsou v obdélníku a uvnitř elipsy, nejsou tedy jen v jednom z obrazců, číslice 9 je v trojúhelníku a uvnitř elipsy, není tedy rovněž uvnitř jen jednoho obrazce, ... Teprve podle toho, že správná odpověď je 9, poznáme, co měli autoři na mysli. Profesionálové by snad měli rozlišovat mezi pojmy číslo a číslice a vědět, že se číslice nesčítají, jak požadují v druhé části úlohy.

Každý autor dělá chyby, to je věc zcela přirozená. Skutečnost, že zmíněné testy řešilo 32 000 uchazečů na 302 školách v republice a nikdo na uvedené „nepřesnosti“ neupozornil, je známkou odcizenosti testovací masinérie od školy, žáka a vzdělávací reality.

Maturitní úlohy

Uvedme zde tři úlohy z materiálů *Maturita nanečisto 2004* [17].

M1. *Obrazem kružnice $k: x^2 + y^2 + 2y = 3$ v osové souměrnosti s osou o je kružnice $l: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.*

1) *Na které přímce leží střed kružnice k ?*

A) $a: x - 2y + 1 = 0$

C) $c: 2x + y - 3 = 0$

B) $b: x + 2y - 3 = 0$

D) $d: 2x - y - 1 = 0$

Správná odpověď je D).

2) *Který z následujících vztahů je rovnicí osy souměrnosti o obou kružnic?*

A) $x - 2y + 1 = 0$

C) $2x + y - 3 = 0$

B) $x + 2y - 3 = 0$

D) $2x - y - 1 = 0$

Správná odpověď je B).

M2. *Trojúhelník ABC má vepsanou kružnici l se středem O , která se dotýká strany AB v bodě P , strany BC v bodě Q , strany AC v bodě R . Úhel ACB má velikost 66° .*

1. *Jaká je velikost úhlu ROQ ?*

A) 66°

C) 132°

B) 114°

D) 156°

Správná odpověď je B).

2. Jaká je velikost úhlu RPQ ?

- A) 33° C) 57°
B) 132° D) 66°

Správná odpověď je C).

M3. Cukrářský kornout má tvar rotačního kužele (bez podstavy) a je obrácen vrcholem dolů. Kornout je v dolní části do poloviny výšky naplněn čokoládou a v horní části je až po okraj dorovnan zmrzlinovým krémem. Kolik procent objemu kornoutu zabírá zmrzlina?

- A) 50 % C) 83,3 %
B) 75 % D) 87,5 %

Správná odpověď je D).

Maturitní úlohy, které jsme zde připomněli, jsou dokladem toho, že i geometrie je dobře přístupná uzavřenému testování.

V první části úlohy M1 se prověřují základní vlastnosti z analytické geometrie (určení souřadnic středu kružnice a incidence bodu a přímky), v druhé části pak i kolmost dvou přímek. Výpočet lze zčásti nahradit náčrtem.

Úloha M2 prověřuje znalosti obvodového a středového úhlu.

Úloha M3 je nejzajímavější. Výsledek lze (až na nesprávnost odpovědi A) stěží odhadnout bez výpočtu. Škoda, že se u úloh tohoto typu nehodnotí postup řešení, neboť bezprostřední zdůvodnění, že objem komolého kužele je $\frac{7}{8}$ objemu celého kužele ukazuje na dobré porozumění stereometrickým souvislostem.

Přípravné úlohy na matematickou olympiádu

Úlohy z této ukázky jsou přirozeně podstatně náročnější, než v předchozích částech a byly převzaty z knihy [18].

O1. Číslo $N = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{3}}$ je rovno

- (A) 1 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\sqrt{\frac{5}{2}}$
(E) není rovno žádnému z těchto čísel.

Správná odpověď je (A).

O2. Počet reálných řešení rovnice $\frac{x}{100} = \sin x$ je

- (A) 61 (B) 62 (C) 63 (D) 64 (E) 65.

Správná odpověď je (C).

O3. Jsou-li p , q a M kladná čísla, $q < 100$, pak číslo, které získáme vzrůstem M o p % a poklesem výsledku o q %, převyšuje M tehdy a jen tehdy, jestliže

- (A) $p > q$ (B) $p > \frac{q}{100-q}$ (C) $p > \frac{q}{1-q}$ (D) $p > \frac{100q}{100+q}$ (E) $p > \frac{100q}{100-q}$.

Správná je odpověď (E).

Podle mého názoru lze zde stěží nalézt uspokojivé motivy pro nalezení správných odpovědí, aniž bychom řešili úlohy „od začátku do konce“.

V úloze O1 je výhodné určit nejdříve druhou mocninu zlomku, neboť lze odhadnout, že se „iracionality zjednoduší“, k dokončení úlohy je třeba si uvědomit, že $3 - 2\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2$. Student, který nemá dobrý vhled „do aritmetických struktur“, patrně nemá šanci úlohu vyřešit.

V úloze O2 je účelné představit si grafické řešení rovnice, z něhož je vidět, že počet jejích řešení je lichý; které z lichých čísel uvedených ve výsledcích je správné asi musíme detailně vypočítat.

Úloha O3 není myšlenkově náročná. Text je nutno převést do algebraické symboliky a pak řešit příslušnou nerovnici. Náповěda $p > q$ v části (A) je svůdná pro studenta, který si neuvědomí, že při počítání s procenty je nejdůležitější určení základu.

5. Závěr

Všimněme si dvou pólů orientace školy. Představme si školu jako příležitost k poznávání, jako servis, kde se studentovi předkládá v uspořádané formě souhrn určité části lidského vědění a je na studentovi, zda se chce nebo musí tuto sumu vědění naučit a soubor s tím spojených kompetencí zvládnout.

V takové škole slouží hodnocení jako míra úspěchu jednotlivce v dané etapě, na konci jedné nebo na začátku další části vzdělávacího cyklu. O to, jak se žák učí, jak rozumí učivu, jak je dovede aplikovat, ... se škola příliš nestará: zajímá ji především, jak je její absolvent úspěšný. A úspěch se dnes často měří v testech, kterými podnik, instituce nebo škola vyššího typu uchazeče prověřuje. Je zde vážné nebezpečí, že školy budou upravovat

své kurzy především podle převládající módy testovacích otázek, což může znamenat sklon k povrchnímu, např. faktografickému a encyklopedickému charakteru vzdělávání. Takovýto styl nemá v dnešní době, kdy jsou volně k dispozici všemožné informace, valný význam.

Co když má škola vznešenější cíle? Může být např. institucí, která přispívá spolu s rodinou a společností k utváření osobnosti žáka. Takováto škola cítí odpovědnost za růst žáka a hodnocení v ní realizované je od samého začátku nedílnou složkou její práce. Mělo by to být hodnocení individuální, laskavé a pomáhající, samozřejmě že slovní. Je ovšem třeba si uvědomit, že slovní hodnocení je nástroj působení na žáka a stěží může být zprávou pro veřejnost či další instituce. Takovou zprávou je školní klasifikace. O této problematice jsem se zmínil v článku [5]. Hodnocení má vést žáka k porozumění učivu, k poznání nutnosti zvládnout určitou sumu poznatků a dovedností, mělo by přispívat k růstu tvořivosti žáka, k aplikacím učiva, k práci. Hledání cest k řešení problémů je jedním z nejtěžších úkolů v rozvíjení osobnosti žáka a jemu by měl být podřízen systém úloh, které ve škole řešíme. Nejde tedy o to, že problém již někdo vyřešil a naším cílem je se do jeho řešení „trefit“. Uzavřené úlohy přinášejí z tohoto hlediska deformovaný pohled, mají spíše charakter přípravy na „vědomostní“ soutěž a k hlubokému vědění nevedou.

Je-li ovšem tvořivost spjata s generováním nápadů, jejich hodnocením a orientací na nápady „dobré“, mohou být úlohy s výběrovými odpověďmi vhodným příspěvkem k tomu, jak učit orientaci v řešení problémů.

Tvorba a volba nejsou tedy dichotomické procesy: v procesu tvorby musíme volit, správná volba může vést k tvorbě.

V praxi školy bychom tedy měli zařazovat úlohy uzavřené i otevřené. V tomto smyslu se patrně správným směrem testování u nás ubírá, např. v projektech *Scio* a *Maturita nanečisto*. Škole s převažujícími rysy transmise a instrukce odpovídá spíše testování s nabídnutými odpověďmi, škola konstruktivního typu rozehrává celou škálu hodnocení.

Zdá se, že testování může být dobrým sluhou, ale zlým pánem. Doložme to dvěma pohledy z historie. Počátkem 60. let minulého století byl *J. B. Conant* jako prezident Harvardské univerzity znepokojen tím, že by se v Americe mohla vyvinout statická dědičná aristokracie, a tak angažoval *H. Chaunceye*, muže posedlého testováním osobnosti, aby vyvinul systém, který by nahradil dřívější elitu původu elitou schopností . . . Harvard a po něm další univerzity se tak změnily ze školy pro žáky s dobrými konexemi na školy pro nadané dříče. Průměrný student z roku 1952 by na Harvardu

v roce 1960 patřil mezi posledních 10 % žáků ([19], s. 144). Za 50 let nato píše *R. B. Reich*: ... standardizované testy jsou jedinou a největší věcí, která zasáhla americké vzdělávání od dob Sputniku.

V odpovědi na pochopitelné požadavky na větší „zodpovědnost“ se téměř všechny školy v zemi proměnily ve fabriky na testy. Vytváříme jednorozměrný systém, do něhož mají všichni zapadat, který zbytečně stigmatizuje mnoho mladých lidí jako neúspěšné, zatímco by mohli být úspěšní, pokud by se jim nabídl jiné vzdělání, v němž by se pokrok měřil odlišně. Paradoxně jsme zavedli standardizované testy právě v době, když nová ekonomika vylučuje standardizovaná místa. Úspěch nezávisí od zvládnutí jednotného korpusu vědění, jak se měří pomocí jediného rozhodujícího standardizovaného testu ... nové kariéry místo toho vyžadují schopnost se v práci učit – odhalit, o kterých potřebách by bylo potřebné vědět a rychle je najít použít. Některé závisejí na kreativitě – na myšlení, které přesahuje jednotnou šablonu, na originalitě a talentu ([20], s. 68, 69). Neměli bychom se nechat nerozumně ovlivnit bezduchým testováním v době, kdy i v USA si uvědomují vážnost a složitost problematiky, jak o tom zasvěceně píše *D. Stein* ve studii *Matematické války v USA*: „Hodnocení musí být plně v souladu s metodami a cíli vyučování. Celkové hodnocení musí být založeno nejen na testech a domácích úkolech, ale i na mnoha dalších zdrojích: na pohovorech se žáky, na pozorování žáků při výuce, na studentských projektech, portfoliích a referátech. Hodnoceny mají být nejen konkrétní znalosti a dovednosti, ale též obecné schopnosti, přístupy a vlastnosti. Role a význam standardizovaných testů a jejich vliv na školství musí být oslabena. Omezeno má být používání otázek, při nichž žáci jen volí správnou odpověď z několika nabízených, naopak častěji se mají od žáka vyžadovat odpovědi, včetně dlouhých slovních odpovědí, které musí sám vytvářet. Používány mají být i takové otázky, na které neexistují jednoznačné odpovědi nebo které povolují různé interpretace“ ([21], s. 40).

Zamysleme se nad tím, kde na pomyslné stupnici S – O (škola jako servis a škola rozvíjející osobnost žáka) je naše současná škola. Podle mého názoru by se měla blížit ideálu O, formální orientace školy k sepisování školních vzdělávacích programů místo soustředění se ke změně klimatu školní činnosti k odpovědnosti a k práci, a orientace na přizpůsobení obsahu školní práce místním podmínkám, může znamenat pro budoucnost naší vzdělanosti vážné nebezpečí.

Buďme rozumní a nepodléhejme módním vlnám, ať už mají charakter rámcových vzdělávacích programů nebo výběrových testů.

Literatura

- [1] *Kuřina, F.*: Porozumění matematice, matematické řemeslo a tvořivost. MFI, roč. 12, 2002/03, č. 1.
- [2] *Kuřina, F.*: Matematika je řešení úloh. MFI, roč. 13, 2003/04, č. 3.
- [3] *Kuřina, F.*: Logika a intuice při řešení úloh. MFI, roč. 13, 2003/04, č. 4.
- [4] *Kuřina, F.*: Matematická gramotnost a kongres ICME10, MFI, roč. 15 2005/06, č. 1.
- [5] *Kuřina, F.*: Vyučování matematice a realita školy. MFI, roč. 16, 2006/2007, č. 2.
- [6] *Kuřina, F.*: Geometrie jako příležitost k rozvíjení kompetencí. In: Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP. JČMF Praha, 2006.
- [7] *Kalous, Z., Obst, O. a kol.*: Školní didaktika. Portál, Praha 2002.
- [8] *Hartl, P. – Hartlová, H.*: Psychologický slovník. Portál, Praha 2000.
- [9] *Mlodinow, L.*: Euklidovo okno. Slovart, Praha 2007.
- [10] *Lichtenberg, G. Ch.*: Myšlenky, postřehy, nápady. Odeon, Praha 1986.
- [11] *Čapek, K.*: Universitní studie. Československý spisovatel, Praha 1987.
- [12] *Štern, J.*: Člověk potřebuje poznat sám sebe. Prostor 71, č. 3, 2006.
- [13] *Tolley, H. – Thomas, K.*: Numerické testy. Ikar, Praha 2002.
- [14] Testy z matematiky. Didaktis, Brno 2002.
- [15] Testy z matematiky. Didaktis. Brno 2006.
- [16] Test obecných studijních předpokladů pro přijímací zkoušky na SŠ.scio.cz. Lidové noviny 15. 1. 2007.
- [17] Maturita nanečisto 2004. Cermat, Praha 2004.
- [18] The Contest Problem Book IV. The Mathematical Association of America. Washington 1983.
- [19] *Cílek, V.*: Hippies a co bylo potom. Makom, Dokořán, Praha 2004.
- [20] *Reich, R. B.*: Slušná společnost. Vize 97. Moraviapress, Praha 2005.
- [21] *Stein, D.*: Matematické války v USA. Učitel matematiky č. 1, 2006.

Upozornění pro učitele matematiky

Na konci roku 2006 vyšla nová ročenka

54. ročník matematické olympiády na středních školách,

kteřá na 180ti stranách obsahuje řešení všech úloh matematické olympiády v kategoriích A, B, C a P, dále texty všech úloh kategorií Z9 – Z5, podrobné zprávy o mezinárodních soutěžích a přípravě našich olympioniků na 46. MMO, 17. MOI a 12. Středoevropskou olympiádu v informatice.

Ročenku si můžete objednat (i pro vaše školní knihovny) na adrese: Prodejna učebnic a skript Univerzity Palackého, Biskupské nám. 1, 771 11 Olomouc. Cena ročenky včetně DPH je 79 Kč.

Připravuje se také ročenka 55. ročníku MO (šk. rok 2005/06). O jejím vydání budeme čtenáře MFI informovat.

57. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola

KATEGORIE Z6

Z6–I–1

Jirka koupil dvě čokolády v obchodě naproti škole. Michal si koupil stejné dvě čokolády v obchodě za školou a Ivan si koupil jednu takovou čokoládu, ale ve školním bufetu. Potom zjistili, že průměrně je vyšla jedna čokoláda na 19,70 Kč. Cena zakoupených čokolád je o 6 Kč vyšší, než kdyby chlapci nakoupili všech 5 čokolád v obchodě naproti škole, a o 6,50 Kč nižší, než kdyby nakupovali jen v obchodě za školou. Za kolik korun prodávají čokoládu v jednotlivých obchodech?

Monika Dillingerová

Z6–I–2

Michal měl barevné nálepky dvou druhů ve tvaru pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků. První nálepka měla ramena délky 5 cm, těch bylo 9. Druhá měla nejdelší stranu dlouhou 10 cm a těchto nálepek bylo 17. Kolik nálepek prvního druhu si má Michal ještě dokoupit, aby všemi svými nálepkami mohl oblepit (pokrýt) stěny krychle s hranou délky 10 cm?

Monika Dillingerová

Z6–I–3

V rovině mají ležet body A, B, C, D tak, aby platilo: $|AB| = 7$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|CD| = 5$ cm a $|DA| = 9$ cm.

- Urči největší možnou vzdálenost bodů A a C .
- Urči nejmenší možnou vzdálenost bodů A a C .

Libor Šimůnek

Z6–I–4

Při chudokrevnosti se doporučuje pít směs šťávy z mrkve a červené řepy. Červená řepa však má tvořit pouze $\frac{1}{5}$ z objemu nápoje. Ze dvou kilogramů

mrkve získáme v odšťavňovači 7,5 dl šťávy. Z jednoho kilogramu červené řepy získáme 6 dl šťávy.

a) Jaké množství mrkve potřebujeme na 250 gramů červené řepy, abychom získali správně namíchanou směs šťávy?

b) Jaké množství šťávy takto získáme?

Světlana Bednářová

Z6–I–5

Řekne-li mimozemšťan v rozhovoru o Vánocích *haf quin lina*, znamená to *velké zlaté hvězdy*; když *kari lina mejk*, znamená to *blikavá zlatá kolečka*; když *esca haf kari*, znamená to *červená velká kolečka*. Jak se řekne *blikavé hvězdy*? (Zapiš svou úvahu.)

Marta Volfová

Z6–I–6

Z čísel 532 a 179 vyškrtni dohromady dvě číslíce, aby součin takto vzniklých čísel byl co možná největší.

Monika Dillingerová

KATEGORIE Z5

Z5–I–1

Kuchyňský stůl má tvar obdélníku o rozměrech 90 cm × 140 cm. Chceme na něj ušít ubrus tak, aby na všech okrajích stolu přesahoval stejně.

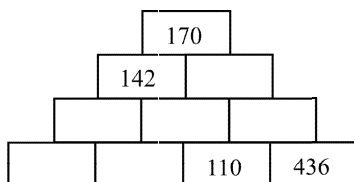
a) Kolik látky šířky 140 cm je třeba koupit, abychom již nemuseli látku stříhat?

b) Kolik centimetrů bude tento ubrus na každé straně přesahovat?

Světlana Bednářová

Z5–I–2

Doplň na prázdné cihličky pyramidy z obrázku chybějící čísla tak, aby platilo: na každé cihličce (kromě spodní řady) je napsané číslo, které se rovná polovině součtu čísel napsaných na dvou sousedních cihličkách z nižšího řádku.



Světlana Bednářová

Z5–I–3

Ve školce mají stavebnici ze stejně velkých molitanových kvádrů. Když je děti všechny položí na sebe, vždy je pokládají tak, aby na sobě kvádry ležely stejnými stěnami. Takto se jim podařilo postavit tři různě vysoké věže. První měla výšku 120 cm, druhá 130 cm a třetí 150 cm. Kolik kvádrů mohly děti ve školce mít?

Světlana Bednářová

Z5–I–4

Trojčata právě oslavila své třetí narozeniny. Za pět let bude součet jejich věků roven dnešnímu stáří jejich matky. Kolik let bude jejich matce za pět let?

Marie Krejčová

Z5–I–5

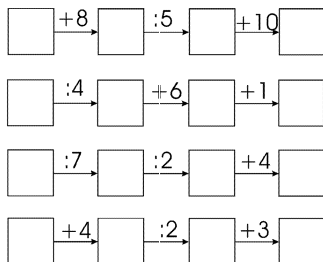
Číslo se nazývá *mazané*, jestliže počínaje od jeho třetí číslice zleva platí: Každá jeho číslice je součtem všech číslic ležící nalevo od něj.

- a) Uveď dvě největší mazaná čísla.
- b) Kolik je všech čtyřmístných mazaných čísel?

Světlana Bednářová

Z5–I–6

Doplň do prázdných políček přirozená čísla od 1 do 16 (každé číslo můžeš použít jen jednou) tak, aby platily matematické vztahy:



Miroslava Smitková

Zajímavé matematické úlohy

Otevíráme již 15. ročník naší pravidelné řešitelské rubriky „Zajímavé matematické úlohy“. V každém ročníku bylo dosud publikováno vždy deset úloh. V předchozích číslech našeho časopisu tak najdete již 140 zajímavých úloh. Upozorňujeme současně naše čtenáře, že kompletní soubor prvních 130 úloh této rubriky (včetně jejich úplných řešení je možno nalézt v nové publikaci nakladatelství Prometheus „Sbírka netradičních matematických úloh“ autorů *J. Švrčka* a *P. Calábka*.

Řešení první dvojice úloh nového ročníku můžete zaslat nejpozději do 20. 10. 2007 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 141

Z dřevěného kvádrů o rozměrech $a \times b \times c$, kde a, b, c jsou přirozená čísla větší než 1, vyřezeme u některých dvou protilehlých vrcholů daného kvádrů dvě rohové jednotkové krychličky. Určete všechny trojice a, b, c , pro které lze takto vytvořené těleso rozřezat na *dvojkrychle* $2 \times 1 \times 1$.

Jozef Cmar

Úloha 142

Určete počet všech přirozených čísel n menších než 2008, pro něž je číslo $2^n - n^2$ dělitelné sedmi.

Peter Novotný