

INFORMATIKA

Pokleslá podposloupnost (Úlohy z MO – kategorie P, 20. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha



Jubilejním dvacátým pokračováním našeho seriálu zajímavých programátorských úloh z Matematické olympiády – kategorie P bude jedna technická hříčka s posloupnostmi čísel. Úloha pochází z krajského kola 47. ročníku soutěže (školní rok 1997/1998) a je blízká úloze o nejdelší

vybrané rostoucí podposloupnosti, kterou jsme vám představili před pěti lety v 8. dílu seriálu [1] a již dříve byla uveřejněna také v učebnici [2]. Začneme jako obvykle zadáním soutěžní úlohy:

Budeme zkoumat konečné posloupnosti celých čísel. Podposloupností délky K vybranou ze zadané posloupnosti rozumíme libovolnou uspořádanou K -tici čísel takovou, že všechna její čísla se nacházejí v původní posloupnosti a navíc pořadí čísel v K -tici je stejné jako pořadí těchto čísel v původní posloupnosti. O posloupnosti čísel $a_1, a_2, \dots, a_K$ řekneme, že je nejvýše s jedním poklesem, jestliže buď $a_i \leq a_{i+1}$ pro všechna i od 1 do $K-1$, nebo pokud existuje jediný index j z rozmezí od 1 do $K-1$, pro který platí $a_j > a_{j+1}$. Napište program, který určí délku nejdelší takové podposloupnosti vybrané ze zadané posloupnosti N celých čísel, aby byla nejvýše s jedním poklesem. Při návrhu programu se zaměřte na dosažení co největší rychlosti výpočtu.

Příklad: Pro zadanou vstupní posloupnost 5 9 7 3 7 8 2 4 1 bude výsledkem číslo 6, neboť nejdelší vybraná podposloupnost s nejvýše jedním poklesem je tvořena šesti prvky: 5 7 7 8 2 4.

Jak jsme již zmínili v úvodu, při řešení tohoto příkladu se můžeme inspirovat o něco jednodušší úlohou určit délku nejdelší *rostoucí* podposloupnosti vybrané ze zadané posloupnosti čísel. Různé varianty jejího řešení lze nalézt v [1] a [2]. Rovněž v naší dnešní úloze použijeme místo velmi pomalého systematického zkoumání všech vybraných podposloupností raději chytřejší postup založený na průběžném ukládání vhodných mezivýsledků do pomocného pole. Původní exponenciální časovou složitost řešení tak dokážeme snížit až na velmi dobrou složitost $O(N^2)$, kde N je délka zkoumané posloupnosti. Za toto výrazné zrychlení výpočtu zaplatíme o něco většími paměťovými nároky, potřebné pomocné datové struktury však budou mít velikost pouze lineárně závislou na N .

Zadanou posloupnost čísel si uložíme do pole A . Další dvě celočíselná pole B , C stejné velikosti (tzn. indexovaná od 1 do N) budeme používat při výpočtu jako pracovní. Hodnota B_i bude představovat délku maximální neklesající podposloupnosti vybrané z posloupnosti $A_i, A_{i+1}, \dots, A_N$, přičemž tato podposloupnost začíná prvkem A_i . Hodnota C_i zase určuje délku maximální podposloupnosti s právě jedním poklesem vybrané z posloupnosti $A_i, A_{i+1}, \dots, A_N$, přičemž tato podposloupnost rovněž začíná prvkem A_i . Budeme si muset průběžně počítat oba tyto údaje, neboť předem nevíme, zda nejdelší vybraná podposloupnost s nejvýše jedním poklesem bude neklesající, nebo zda možnost jednoho poklesu skutečně využije, a pokud ano, tak ve kterém svém místě. Jednotlivé hodnoty B_i , C_i snadno spočítáme odzadu, tzn. v pořadí indexů $N, N-1, \dots, 1$. Na stanovení čísel B_i a C_i pro určité konkrétní i stačí jednou sekvenčně projít úseky polí A , B , C od indexu $i+1$ do N . Při výpočtu B_i není žádný pokles dovolen. Proto B_i určíme tak, že o 1 zvýšíme maximální B_k vybrané pro taková k od $i+1$ do N , pro něž $A_i \leq A_k$. Maličko komplikovanější je určení hodnoty C_i . Tam se naopak právě jeden pokles předpokládá, přičemž buď se již uskutečnil někde mezi indexy od $i+1$ do N , nebo ho provedeme právě teď za prvkem posloupnosti s indexem i . První případ odpovídá tomu, že o 1 zvýšíme maximální C_k vybrané pro taková k od $i+1$ do N , pro která $A_i \leq A_k$. Ve druhém případě bychom o 1 zvyšovali maximální B_k vybrané pro taková k od $i+1$ do N , pro která naopak

$A_i > A_k$. Z obou možností si vybereme tu, která pro nás bude výhodnější, tzn. která dává vyšší výslednou hodnotu. Způsob výpočtu těchto hodnot ukazuje názorně také připojená programová ukázka. Výsledná délka maximální podposloupnosti s nejvýše jedním poklesem je pak rovna maximu ze všech hodnot uložených v polích B, C (buď využijeme možnost jednoho poklesu, nebo nikoliv). Při určení čísel B_i, C_i pro jeden konkrétní index i vykonáme řádově N operací. To se opakuje celkem N -krát, pro jednotlivé indexy i . Algoritmus má proto kvadratickou časovou složitost, vyžaduje provést řádově $O(N^2)$ operací.

```

program Max_1_pokles;
{Program určí v zadané posloupnosti celých čísel
délku nejdelší vybrané podposloupnosti s nejvýše
jedním poklesem.}

const MaxN = 1000;      {maximální počet čísel}
var A,B,C: array[1..MaxN] of integer;
    {A -- zadaná posloupnost čísel,
     B -- délka maximálního neklesajícího úseku,
     C -- délka maximálního úseku s právě jedním
         poklesem}
    N: integer;          {počet čísel}
    V: integer;          {výsledná délka podposloupnosti}
    I, K: integer;

begin
write('Počet čísel: ');
read(N);
if N = 0 then
    V:=0
else
begin
writeln('Posloupnost čísel:');
for I:=1 to N do
begin
read(A[I]);
B[I]:=1; C[I]:=0
end;

```

```

V:=1
end;

for I:=N-1 downto 1 do      {stanovení hodnot B[I], C[I]}
  for K:=I+1 to N do        {zkoumáme možnost navázání A[I]}
    if A[I] > A[K] then      {zde nastane jediný pokles}
      begin
        if C[I] < B[K]+1 then
          begin
            C[I]:=B[K]+1;
            if C[I] > V then V:=C[I]
          end
        end
      else                    {zde lze navázat bez poklesu}
        begin
          if B[I] < B[K]+1 then
            begin
              B[I]:=B[K]+1;
              if B[I] > V then V:=B[I]
            end;
          if C[I] < C[K]+1 then
            begin
              C[I]:=C[K]+1;
              if C[I] > V then V:=C[I]
            end
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;

writeln('Délka nejdelší vybrané podposloupnosti');
writeln('s nejvýše jedním poklesem: ',V)
end.

```

(Autorkou úvodní ilustrace je Mgr.Jaroslava Čermáková z Hlinska v Čechách.)

Literatura

- [1] *Töpfer, P.*: Nejdelší rostoucí podposloupnost (Úlohy z MO – kategorie P, 8. část), MFI č. 2, roč. 12 (2002 – 2003).
- [2] *Libicher, I. – Töpfer, P.*: Od problému k algoritmu a programu, Grada, Praha 1992.

Geometrická úloha řešená s přítelem počítačem

VÁCLAV ZEMEK

Gymnázium, Prachatice

Dovolte, abych vám představil Mirku a Jirku. Oba studenti mají rádi matematiku, ale k řešení úloh přistupují různým způsobem. Mirka ovládá matematické poučky, úlohy řeší deduktivně. Jirka rád experimentuje na počítači s využitím programů Cabri geometrie, Derive, MS Excel, řešení úloh hledá induktivním postupem. Posuďte, jak si společně poradili s touto úlohou:

Do elipsy vepište pravoúhelník, který má strany rovnoběžné s osami elipsy a jehož obsah je ze všech vepsaných pravoúhelníků největší.

- Navrhněte postup konstrukce pravoúhelníka.
- Určete jeho rozměry i obsah.
- Vypočítejte poměr obsahů elipsy a pravoúhelníka.

Řešte obecně i pro délky poloos elipsy $a = 5$ cm, $b = 3$ cm.

Mirka: Víím, že kdybychom vepisovali pravoúhelník do kružnice, největší obsah by měl čtverec. Myslíš, že pro elipsu to bude stejné?

Jirka: Připadá mi logické, že důležitý bude tvar elipsy. Myslím, že pro elipsu to bude obdélník, který bude mít delší stranu rovnoběžnou s hlavní osou. Uvidíme. Uděláme si obrázek v Cabri geometrii. Můžeš napsat rovnici elipsy?

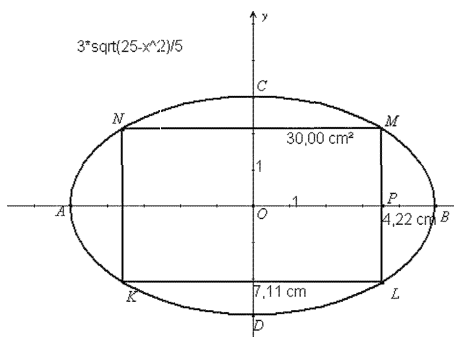
Mirka: Když zvolíme střed elipsy v počátku soustavy souřadnic a hlavní osu v souřadnicové ose x , můžeme použít vzorec $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Rovnice elipsy s danými poloosami je $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Jirka: Pro zobrazení množiny bodů, které jsou v Cabri určeny výrazem, potřebujeme ještě vyjádřit y .

Mirka: To není problém. Pro část elipsy v polorovině $y \geq 0$ platí:
$$y = \frac{3}{5} \sqrt{25 - x^2}.$$

Jirka: To mi pro obrázek v Cabri stačí. Nejdříve sestrojíme množinu bodů danou výrazem $\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$ a pak kuželosečku, která je dána pěti body této množiny. Do elipsy vepíšeme obdélník $KLMN$, jehož rozměry lze měnit pohybem bodu P po úsečce OB . Zjistil jsem, že největší obsah ($30,00 \text{ cm}^2$) má obdélník s rozměry přibližně $7,11 \text{ cm}$ a $4,22 \text{ cm}$.



Obr. 1

Mirka: Když opišeme elipse obdélník se středními příčkami AB , CD , má obsah 60 cm^2 , tedy přesně dvojnásobek obsahu vepsaného obdélníku. Nebude mezi nimi nějaká souvislost?

Jirka: Zkusil jsem udělat poměr rozměrů vepsaného obdélníku, vychází $1,68$. To je zaokrouhlená hodnota poměru poloos elipsy a zároveň poměru rozměrů opsaného obdélníku. Takže vepsaný a opsaný obdélník jsou podobné. Z toho plyne konstrukce ...

Mirka: To není ještě jisté. Měli bychom tuto hypotézu nejdříve dokázat například užitím diferenciálního počtu a pak přemýšlet o konstrukčním využití. Víím, jak na to. Z kladných souřadnic bodu $M[x; y]$ na elipse vypočítáme obsah obdélníku

$$S = 4xy = 4x \cdot \frac{3}{5}\sqrt{25-x^2} = \frac{12x\sqrt{25-x^2}}{5}.$$

Pak vypočítáme derivaci funkce

$$f: S = \frac{12x\sqrt{25-x^2}}{5}$$

a položíme ji rovnu nule ...

Jirka: Věřím, že tento výraz umíš derivovat, ale není nyní vhodná příležitost pro užití programu Derive? Vypočítá derivaci, vyřeší rovnici, určí rozměry obdélníku s maximálním obsahem dříve, než najdeš vzorce pro derivaci součinu a derivaci složené funkce.

$$\frac{d}{dx} \frac{12 \cdot x \cdot \sqrt{(25 - x^2)}}{5} = \frac{12 \cdot (25 - 2 \cdot x^2)}{5 \cdot \sqrt{(25 - x^2)}}$$

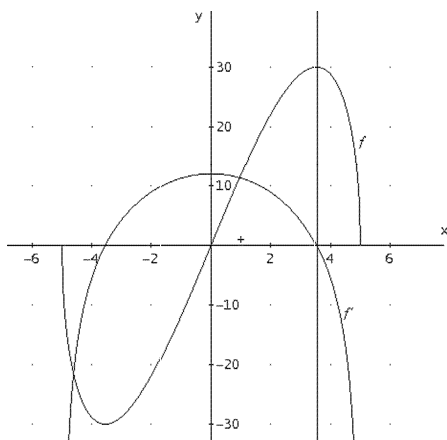
$$\frac{12 \cdot (25 - 2 \cdot x^2)}{5 \cdot \sqrt{(25 - x^2)}} = 0$$

$$x = -\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$x = -3.535533905 \vee x = 3.535533905$$

Obr. 2

Numerické řešení ještě doplníme grafy funkce f i její derivace f' . Zajímá nás jen část grafu pro kladné hodnoty proměnné i funkce.



Obr. 3

Z grafů vyplývá, že pro $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ má funkce maximum. Nyní již snadno dopočítáme rozměry a maximální obsah vepsaného obdélníku. Vychází: $k = 5\sqrt{2}$, $l = 3\sqrt{2}$, $S = 30$.

Mirka: Výsledky se celkem shodují s tím, co jsme zjistili v Cabri geometrii. Obsah vychází stejně a rozměry se rovnají, když je zaokrouhlíme na desetiny. Poměr rozměrů vepsaného obdélníku je $k : l = 5 : 3$, což je (přesně) rovno poměru hlavních poloos. Nyní je třeba dokázat, že tento vztah platí obecně.

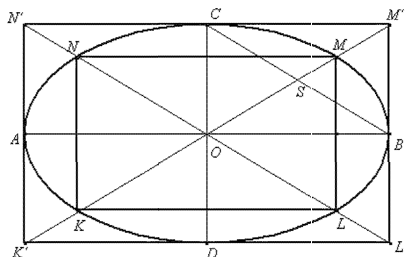
Jirka: V programu Derive vypadá výpočet takto:

$$\begin{aligned}
 S &:= 4 \cdot x \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)} \cdot \frac{b}{a} \\
 \frac{d}{dx} \left(4 \cdot x \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)} \cdot \frac{b}{a} \right) &= \frac{4 \cdot b \cdot (a^2 - 2 \cdot x^2)}{a \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}} \\
 \frac{4 \cdot (a^2 - 2 \cdot x^2) \cdot \frac{b}{a}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} &= 0 \\
 x &= -\frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{2}
 \end{aligned}$$

Obr. 4

Mirka: Ostatní již mohu dopočítat sama. Rozměry vepsaného obdélníku vychází $k = a\sqrt{2}$, $l = b\sqrt{2}$, obsah $S = 2ab$, poměr rozměrů $k : l = a : b$. Poměr rozměrů vepsaného obdélníku je roven poměru délek poloos elipsy, tedy i rozměrům opsaného obdélníku. Opsaný a vepsaný obdélník jsou podobné. Z toho plyne konstrukce vepsaného obdélníku pro libovolnou elipsu. Elipse opíšeme obdélník a zobrazíme ho ve stejnolehlosti se středem ve středu elipsy na vepsaný obdélník. Stačí spojit úsečkami vrcholy opsaného obdélníku se středem elipsy a najít průsečíky těchto úseček a elipsy.

Jirka: To se mi zdá příliš pracné. Sestrojit opsaný obdélník není nutné. Úsečky BC a OM mají společný střed S . Takže najdeme střed úsečky BC a polopřímka OS pak protne elipsu ve vrcholu obdélníku M . Pak doplníme další vrcholy vepsaného obdélníku $KLMN$.



Obr. 5

Mirka: Ještě jsme nevyřešili poměr obsahů elipsy a obdélníku.

Jirka: V Cabri vychází podíl přibližně 1,57 a nemění se při změně rozměrů elipsy.

Mirka: Toto číslo je přibližně polovinou čísla π . Musíme ještě dokázat, že tomu tak je pro libovolnou elipsu. Obsah obdélníku již známe, určíme ještě obsah elipsy pomocí integrálního počtu. Ale je v tom potíž. Horní oblouk elipsy je vyjádřen funkcí $y = \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, ale tu integrovat zatím neumíme.

Jirka: Ale Derive to umí. Obsah poloviny elipsy je roven určitému integrálu $\int_{-a}^a \frac{b\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$, jehož hodnota je $\frac{\pi ab}{2}$.

Mirka: Poměr obsahů elipsy a vepsaného obdélníku je $\frac{\pi ab}{2ab} = \frac{\pi}{2} = \pi : 2$. Výsledek souhlasí s přibližnou hodnotou, kterou jsme zjistili v Cabri geometrii.

Tuto úlohu počítač se svými programy za Mirku a Jirku sám nevyřešil. V první fázi jim umožnil lépe pochopit, jak se změnami rozměrů pravoúhelníka souvisí změny obsahu. Usnadnil jim vytvoření hypotézy o tvaru pravoúhelníku. Při určování maxima obsahu užitím derivace jim ušetřil čas a zabránil mechanickým chybám. Obsah elipsy by bez vhodného programu sami nevypočítali, i když jim byl jasný princip. Počítač jim umožnil dokončit výpočet.

Možná se vám zdá, že úloha je zcela nepraktická a může zaujmout jen matematika. Opak je však pravdou. Nedávno Mirku a Jirku navštívily učitelky mateřské školy, kterým ve skříni přebývalo z doby Velikonoc mnoho elips a naopak chyběly klasické papíry tvaru obdélníku na malování. Mirka

a Jirka jim poradili, jak vystříhnout z elips obdélníky o maximálním obsahu, aby ani čtvereční centimetr papíru nepřišel nazmar. Nevěříte?

★★★

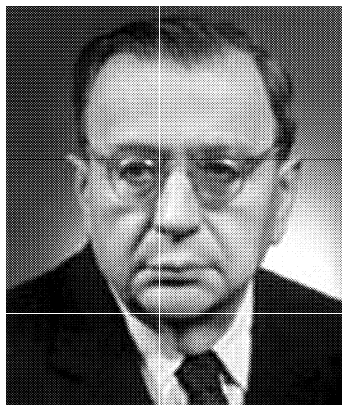
Poznámka redakce: Vynalézavost Mirky a Jirky v tomto napůl humor-ném vyprávění byla příkladná. Škoda, že neznali afinní zobrazení. Věděli by, že jejich elipsa je afinním obrazem kružnice k s tímž středem a s polo-měrem a , přičemž hlavní osa elipsy je osou afinity a úsečky kolmé k ose afinity se zkracují v poměru b/a . Čtverec vepsaný do kružnice k je vepsaným pravoúhelníkem o maximálním obsahu, má úhlopříčky velikosti $2a$, tedy strany o velikosti $a\sqrt{2}$ a obsah $2a^2$. Hledaný obdélník je afinním obrazem toho čtverce vepsaného do kružnice k , který má dvě strany rovnoběžné s osou afinity, jejich obrazy mají touž délku $a\sqrt{2}$, a dvě strany kolmé k ose afinity a ty se zkracují na $\frac{b}{a} \cdot a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$. Rozměry obdélníku jsou tedy $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$ a jeho obsah $2ab$. Poměr obsahu kruhu a obsahu vepsaného čtverce je $\pi a^2 : 2a^2 = \pi : 2$ a tento poměr se při afinním zobrazení nemění. Užitím afinity lze lehce získat i jednoduchou metodu konstrukce hledaného obdélníku.

Z HISTORIE

František Běhounek (1898 – 1973)

1. Vědecké začátky

František Běhounek se narodil 27. října 1898 v Praze 7, Holešovicích – Bubnech. Tamtéž v letech 1909 – 1916 absolvoval c. k. státní reálku (1. až 7. třídu). Jak později přiznal, typickým rysem, který utvářel celý jeho život, byl sklon k romantice. Proto se vedle matematiky a fyziky a astronomie (byla součástí fyziky), velmi zajímal o historii, v níž nacházel mnoho romantických prvků. Ovšem bez absolvování gymnázia nemohl historii na univerzitě



František Běhounek