

MATEMATIKA

Zaokrouhlování podruhé

OLDŘICH ODVÁRKO – JARMILA ROBOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V článku „Zaokrouhlování na různé způsoby“ (MFI, roč. 16, č. 3) jsme se věnovali zaokrouhlování cen nákupů v obchodech, zaokrouhlování poplatku za telefonní služby, zaokrouhlování nedoplatku za odběr plynu. V centru pozornosti byl padesátihaléř jako nejmenší peněžní jednotka, na kterou lze zaokrouhlovat desetihaléře i haléře. Ukázali jsme si dva různé způsoby zaokrouhlování – *aritmetické zaokrouhlování na padesátihaléře*, které je v souladu se zaokrouhlováním ve školské matematice, a *zaokrouhlování na padesátihaléře dolů*. Stručně si připomeneme oba způsoby na konkrétním příkladu, navíc pro zajímavost uvedeme, jak by vypadalo *zaokrouhlování na padesátihaléře nahoru* (tento způsob jsme v praxi zatím nikde neobjevili):



Zaokrouhlování na padesátihaléře	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90	3,00
aritmetické	2,00		2,50				3,00				
dolů	2,00					2,50				3,00	
nahoru	2,00	2,50				3,00					

PŘIZNÁNÍ
k dani z nemovitostí na rok 2005
podle zákona č. 338/1992 Sb., o dani z nemovitostí, ve znění pozdějších předpisů (dále jen „zákon“)

Obr. 1

II. ODDÍL Údaje k dani z pozemků		Počet příloh 		
1) Druh pozemku A				
A - orná půda, chmelnice, vinice, zahrada, ovocný sad B - trvalý travní porost C - hospodářský les D - rybník s intenzivním a průmyslovým chovem ryb E - zastavěná plocha a nádvoří F - stavební pozemek G - ostatní plocha				
Č. ř.		Měr. j.	Poplatek	Finanční úřad
18	Výměra druhu pozemku	m ²	9,72	
19	Cena pozemku za 1 m ² podle § 5 odst. 1 a 2 zákona	Kč	5,60	
20	Základ daně podle § 5 odst. 1 a 2 zákona (zaokrouhlí se na celé Kč nahoru)	Kč	54,44	
21	Sazba daně podle § 6 odst. 1 zákona	%	0,75	
22	Základ daně podle § 5 odst. 3 zákona	m ²		
23	Sazba daně podle § 6 odst. 2 zákona	Kč/m ²		
24	Koeficient podle § 6 odst. 4 zákona			
25	Daň z pozemků (zaokrouhlí se na celé Kč nahoru)	Kč	41	
26	Nárok na osvobození ve výměře	m ²		
27	Výše nároku na osvobození podle § 4 a § 18 odst. 1 zákona (zaokrouhlí se na celé Kč nahoru)	Kč		
28	Daňová povinnost	Kč	41	

Obr. 2

Opustíme teď svět obchodů a služeb a podíváme se do světa **daní**. To je svět, který je pravděpodobně pro většinu žáků neznámý, ale v dospělosti se s ním budou často setkávat. A tak jistě neuškodí aspoň letmo na problematiku daní nahlédnout, i když třeba jen s důrazem na zaokrouhlování.

Podrobněji se podíváme na **daň z nemovitosti**, kde je typické *zaokrouhlování na koruny nahoru*. Uvedeme nejprve jeden konkrétní příklad na výpočet daně z pozemku a daně ze stavby. Zvolené hodnoty (výměra pozemku, cena pozemku za 1 m², výměra zastavěné plochy, ...) i hodnoty z nich vypočítané zapisujeme do tabulek formuláře „Přiznání k dani

z nemovitosti na rok ...“ (obr. 1, obr. 2). Využíváme přitom instrukce z materiálu „POKYNY k vyplnění přiznání k dani z nemovitosti od roku 2005“. Pro úsporu místa uvádíme z POKYŇŮ jen ty části, které jsou nezbytné pro pochopení příslušných situací a k vyplnění tabulek.

Sledujte s námi následující výpočty a kontrolujte jejich správnost. V tabulce z III. oddílu (obr. 3) si všimněte, že kromě *zaokrouhlování na koruny nahoru* je zde ještě *zaokrouhlování na m² nahoru* a *zaokrouhlování na dvě desetinná místa*.

18 Výměra druhu pozemku – uveďte celkovou výměru označeného druhu pozemku v m² podléhající dani z pozemků v katastrálním území Výměra druhu pozemku je součtem výměr jednotlivých parcel . . . , od něhož se odečte součet ploch zastavěných stavbami,

19 Cena pozemku za 1 m² – vyplňte pouze u těchto druhů pozemků: A – orná půda, chmelnice, vinice, zahrada, ovocný sad, . . . , u kterých uveďte průměrnou cenu půdy za 1 m², která je přiřazena katastrálnímu území v Seznamu katastrálních území s přiřazenými průměrnými základními cenami zemědělských pozemků, stanoveném vyhláškou ministerstva zemědělství.

20 Základ daně podle § 5 odst. 1 a 2 zákona – vyplňte pouze u druhu pozemků A, Základ daně získáte vynásobením výměry pozemku na řádku 18 cenou pozemku za 1 m² na řádku 19. Výsledek se **zaokrouhlí na celé Kč nahoru**.

21 Sazba daně podle § 6 odst. 1 zákona – vyplňte pouze u druhu pozemků A, Sazba daně pro jednotlivé druhy pozemků činí: A – orná půda, chmelnice, vinice, zahrada, ovocný sad **0,75 %**,

25 Daň z pozemků – vypočítejte takto:

- pro druhy pozemků A – orná půda, chmelnice, vinice, zahrada, . . . vynásobením základu daně na ř. 20 sazbou daně na ř. 21:

$$\left(\text{ř. 25} = \frac{\text{ř. 20} \times \text{ř. 21}}{100} \right)$$

28 Daňová povinnost – zde uveďte částku z řádku 25 sníženou o částku na řádku 27 (ř. 28 = ř. 25 – ř. 27).

III. ODDÍL Údaje k dani ze staveb		Počet příloh 	
29 Druh stavby H		H - obytný dům I - ostatní stavba tvořící přístřeší k obytnému domu J - stavba k individuální rekreaci včetně rodinných domů využívaných k individuální rekreaci K - stavba k individuální rekreaci plnící doplňkovou funkci L - garáž vystavěná odděleně od obytného domu Stavba pro podnikatelskou činnost: M - zemědělská výroba, lesní a vodní hospodářství N - průmysl, stavebnictví, doprava, energetika, ostatní zemědělská výroba O - ostatní podnikatelská činnost P - ostatní stavba	

Č. ř.	Měr. j.	Poplatník	Finanční úřad
41	Výměra zastavěné plochy podle § 10 zákona (zaokrouhlí se na celé m ² nahoru)	m ²	1,14
42	Základní sazba daně podle § 11 odst. 1 zákona	Kč/m ²	1
43	Počet nadzemních podlaží dalších		1
44	Zvýšení základní sazby za další nadzemní podlaží podle § 11 odst. 2 zákona	Kč	0,75
45	Koeficient podle § 11 odst. 3 a 4 zákona		2,5
46	Výsledná sazba daně (zaokrouhlí se na 2 des. místa)	Kč/m ²	4,38
47	Dan ze staveb (zaokrouhlí se na celé Kč nahoru)	Kč	5,00
48	Výměra podlahové plochy nebytového prostoru sloužícího k podnikání	m ²	
49	Zvýšení daně podle § 11 odst. 5 zákona (zaokrouhlí se na celé Kč nahoru)	Kč	
50	Poměr výměry podlahových ploch podle § 9 odst. 2 zákona (zaokrouhlí se na 2 des. místa)		
51	Výše nároku na osvobození podle § 9 zákona (zaokrouhlí se na celé Kč nahoru)	Kč	
52	Výše nároku na odpočet podle § 18 odst. 2 zákona	Kč	
53	Daněvá povinnost	Kč	5,00

Obr. 3

- 41 Výměra zastavěné plochy podle § 10 zákona** – uveďte zastavěnou plochu v m², tj. výměru půdorysu její nadzemní části.
- 42 Základní sazba daně podle § 11 odst. 1 zákona** – uveďte základní sazbu daně pro označený druh stavby. Pro jednotlivé druhy staveb činí: **H** – obytný dům **1 Kč/m²**, ...
- 43 Počet nadzemních podlaží dalších** – uveďte počet dalších nadzemních podlaží stavby, u nichž přesahuje zastavěná plocha podlaží dvě třetiny výměry plochy zastavěné celou stavbou, ...
- 44 Zvýšení základní sazby za další nadzemní podlaží podle § 11 odst. 2 zákona** – získáte vynásobením počtu dalších nadzemních podlaží uvedeného na ř. 43 sazbou za další nadzemní podlaží **0,75 Kč**.

45 Koeficient podle § 11 odst. 3 a 4 zákona

- **koeficient podle § 11 odst. 3 písm. a) zákona** – vyplíte pouze u druhů staveb **H** – obytný dům ... Pokud obec nestanoví obecně závaznou vyhláškou pro jednotlivé části obce jiné koeficienty, platí koeficienty podle počtu obyvatel v obci na základě posledního sčítání lidu uvedené v zákoně, a to:

...,

2,5 v obcích nad 25 000 obyvatel do 50 000 obyvatel,

....

46 Výsledná sazba daně – je součtem základní sazby daně na řádku 42 a zvýšení za další nadzemní podlaží na řádku 44, vynásobeným případným koeficientem na řádku 45. Výsledek **zaokrouhlete** (aritmeticky) **na dvě desetinná místa**.

47 Daň ze staveb – získáte ji vynásobením výměry zastavěné plochy na ř. 41 výslednou sazbou daně na ř. 46. Výsledek **zaokrouhlete na celé Kč nahoru**.

53 Daňová povinnost – zjistíte ji jako součet daně ze staveb na řádku 47 a zvýšení daně na řádku 49, snížený o výši nároku na osvobození na řádku 51 (dříve rovněž odpočet na řádku 52).

56 Daň z nemovitosti celkem – uveďte celkovou daňovou povinnost, kterou získáte jako součet údajů na řádcích 54 (daň z pozemků celkem) a 55 (daň ze staveb celkem).

IV. ODDÍL			
Údaje k dani z nemovitostí			
54	Daň z pozemků celkem Souhrn údajů na ř. 29 ve II. oddíle ze všech listů	Kč	4,1
55	Daň ze staveb celkem Souhrn údajů na ř. 53 ve III. oddíle ze všech listů	Kč	500
56	Daň z nemovitosti celkem ř. 54 + ř. 55	Kč	541

Obr. 4

Zamysleme se teď nad tím, co potřebují žáci k tomu, aby mohli smysluplně řešit úlohy podobných typů jako je shora uvedený, a jaké přístupy při řešení těchto úkolů volit. Žákům by mělo být zřejmé, co je to **nemovitost** a co je to **daň**. Uvedeme charakteristiky těchto pojmů podle [3]:

Nemovitost je pozemek (část zemského povrchu bez ohledu na to, jakým substrátem je pokryta), stavba spojená se zemí pevným základem a byt, je-li předmětem vlastnictví.

Daň je platební povinnost stanovená státem za účelem zisku příjmů.

Dále je třeba vysvětlit, co je **výměra pozemku** a **výměra zastavěné plochy** (ve druhém případě se objeví termín „půdorys“). Dále je samozřejmě nutné objasnit princip *zaokrouhlování* finančních částek *na koruny nahoru*, resp. obsahů ploch *na čtverečné metry nahoru*. To by ale nemělo činit zásadní potíže:

Jestliže počet korun není přirozené číslo, pak se tento počet zvýší na nejbližší větší přirozené číslo. Pokud je částka vyjádřena přirozeným číslem, tak se při zaokrouhlování nemění.

$$32,10 \text{ Kč} \rightarrow 33 \text{ Kč}$$

$$1\,945,28 \text{ Kč} \rightarrow 1\,946 \text{ Kč}$$

$$716,70 \text{ Kč} \rightarrow 717 \text{ Kč}$$

$$84 \text{ Kč} \rightarrow 84 \text{ Kč}$$

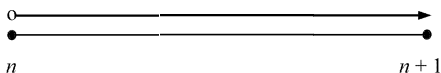
Obdobně lze vysvětlit zaokrouhlování na čtverečné metry nahoru.

Dříve než začnete řešit konkrétní úlohy, doporučujeme žáky informativně seznámit s formulářem „Příznání“ (ten lze bez problémů získat na finančním úřadu). Žáci by měli řešení zapisovat do namnožených tabulek z příslušného formuláře a používat POKYNY. Nabízí se zde tak příležitost k tomu, jak žáky učít orientovat se v cizím textu (nejen úředním) a jak ho využít pro řešení daného problému.

Tři poznámky

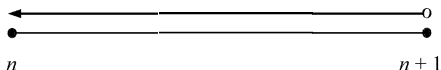
1. Obdobně jako daň z pozemku se *zaokrouhluje na koruny nahoru* daň silniční, záloha na tuto daň a sleva z této daně, daň dědická, daň darovací a daň z převodu nemovitosti.

Můžeme se dotknout této otázky i v zobecněné podobě – zaokrouhlování čísel na jednotky nultého řádu nahoru; jde o následující pravidlo:



Pro každé $x \in (n, n + 1)$, kde $n \in \mathbb{N}$, je x po zaokrouhlení na jednotky nultého řádu nahoru rovno $n + 1$.

2. Pokud žáci pochopí princip zaokrouhlování na koruny nahoru, mohli by už sami formulovat pravidlo pro *zaokrouhlování* peněžních částek *na koruny dolů*, resp. obecně desetinných čísel na přirozená (či celá) čísla dolů.



3. Zaokrouhlování na jednotky nahoru či na jednotky dolů není pro žáky úplně novou záležitostí. S tímto procesem se setkávají při řešení některých aplikačních úloh, i když si to třeba neuvědomují:

Jedna plechovka barvy o hmotnosti 3 kg stačí na nátěr 20 m². Kolik plechovek potřebujeme koupit, máme-li natřít stěny kůlny, které mají šířku 4 m a 2,8 m a výšku 2,2 m? (Dveře a okenice budeme natírat stejnou barvou.)

$$2 \cdot 2,2 \cdot (4 + 2,8) = 29,92 \rightarrow 2 \text{ plechovky}$$

Instalatér řeže z trubky dlouhé 5,3 m kusy dlouhé 0,8 m. Kolik jich nařeže?

$$[5,3 : 0,8 = 6,625 \rightarrow 6 \text{ kusů}]$$

Stručně se nyní podíváme na další daň, a to na **daň z příjmu** (obr. 5), kde je typické *zaokrouhlování na stokoruny dolů i na stokoruny nahoru*. Za zaměstnance vyřizuje daň z příjmu zaměstnavatel, ale podle front, které se tvoří na finančních úřadech před 31. březnem, který je posledním dnem pro odevzdání přiznání k dani a pro zaplacení daně, je vidět, že značná část dospělé populace podstupuje tuto činnost sama. Výpočet daně z příjmu je obvykle náročnější než výpočet daně z nemovitosti. Žáky stačí seznámit s touto problematikou jen informativně a chápat ji pouze jako motivaci vedoucí k úvahám o dalším možném způsobu zaokrouhlování.

PŘIZNÁNÍ

k dani z příjmů fyzických osob

podle zákona č. 586/1992 Sb., o daních z příjmů, ve znění pozdějších předpisů (dále jen „zákon“)

za zdaňovací období (kalendářní rok) 2005 nebo jeho část*) od do

dále jen „DAP“

Obr. 5

Žákům stačí objasnit, že základ daně je částka, která je součtem všech příjmů v daném roce, od nichž se odečítají různé výdaje, slevy na dani (např. částky na vyživované děti, na životní pojištění atd.) a zaplacené zálohy na daň.

Pokud je žákům jasný princip zaokrouhlování na koruny nahoru a koruny dolů, nemělo by jim činit potíže, aby sami formulovali pravidlo o *zaokrouhlování na celé stokoruny dolů* (na základě konkrétně volených příkladů).

Předpokládejme, že poplatníkem daně, která je uvedena na ř. 63 tabulky (obr. 6), je akademický malíř, který „pracuje na volné noze“. Vzhledem k tomu, že jeho daňová povinnost přesáhla 30 000 Kč (ale nepřekročila 150 000 Kč), musí platit zálohy na daň, a to ve výši 40 % z poslední daňové povinnosti; první záloha je splatná do 15. 6. a druhá do 15. 12. [1]. Záloha na daň z příjmu se po výpočtu *zaokrouhuje na stokoruny nahoru*: 40 % z 55 320 Kč je 22 128 Kč, po zaokrouhlení na stokoruny nahoru je to 22 200 Kč.

60 Úhrn nezdanitelných částí základu daně a položek odčitatelných od základu daně (ř. 46 + ř. 47a + ř. 47b + ... ř. 48 + ř. 49 + ř. 50 + ř. 51 + ř. 52 + ř. 53 + ř. 54 + ... ř. 55 + ř. 56 + ř. 57 + ř. 58 + ř. 59)		
61 Základ daně snížený o nezdanitelné části základu daně a položky odčitatelné od základu daně (ř. 45 – ř. 60) nebo údaj z ř. 52b přílohy č. 5 DAP	286 895,20	
62 Základ daně zaokrouhlený na celá sta Kč dolů	286 800	
63 Daň podle § 16 odst. 1 zákona	55 320	

Obr. 6

Dvě poznámky

1. Na stokoruny nahoru se zaokrouhuje také např. základ daně dědické, základ daně darovací a základ daně z převodu nemovitosti.
2. Žáci mohou sami formulovat a aplikovat pravidla, která se týkají zaokrouhlování peněžních částek na desetikoruny, tisícikoruny, ... nahoru, resp. dolů, a obecněji pravidla pro zaokrouhlování desetinných čísel na desítky, tisíce, ... nahoru, resp. dolů. Do příslušných úvah mohou zapojit pro porovnání známá pravidla o aritmetickém zaokrouhlování desetinných čísel.

Literatura

- [1] Daň z příjmů (podle stavu k 1.1. 2006). ÚZ. Sagit, Ostrava 2006.
- [2] Daň silniční. Daň z nemovitosti, Daň dědická, daň darovací. Daň z převodu nemovitostí (podle stavu k 1.1.2006). ÚZ Sagit, Ostrava 2006.
- [3] *Kolektiv autorů*: Encyklopedický slovník. Encyklopedický dům a Odeon, Praha 1993.
- [4] *Odvárko, O.*: Matematika pro každý den. Prospektrum, Praha 1995.
- [5] *Odvárko, O. – Kadlecěk, J.*: Matematika pro 8.ročník základních škol. 1. díl. Prometheus, Praha 2004.
- [6] Pokyny k vyplnění přiznání k dani z nemovitosti od roku 2005.
- [7] Pokyny k vyplnění přiznání k dani z příjmů fyzických osob za zdaňovací období (kalendářní rok) 2005.
- [8] Přiznání k dani z nemovitosti na rok ...
- [9] Přiznání k dani z příjmů fyzických osob za zdaňovací období (kalendářní rok).

Matematické hry a soutěže pro školní výlet

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Ve školní výuce se studenti a žáci setkávají ponejvíce s vážnější pracovní stránkou matematiky. Některé z nich přitom baví matematika jako taková, oceňují její přednosti a řešení matematických úloh berou sportovně jako souboj lidské mysli s nastraženými překážkami. Některým se naopak matematika zdá těžká a nezábavná. Učitel matematiky by proto měl umět využít všech vhodných příležitostí – i mimo vlastní výuku – k tomu, aby svým žákům občas předvedl matematiku i v jiném světle.

Předně jsou tu úlohy a zajímavosti z tzv. rekreační matematiky, o níž je dosti bohatá literatura. Dále bývají – zvláště pro mladší žáky – k různým partiím učiva vymyšleny různé školní matematické úlohy charakteru her, které mají zaujmout žáky, učinit jim výuku dané partie matematiky zajímavější a přispět ke konstruktivnímu přístupu k výuce. Kromě toho lze nyní objevit na internetu komerční nabídky spousty dalších her, k jejichž provozování jsou prodávány příslušné rekvizity – speciální desky, kostky, kartičky apod. Tyto hry mají také za cíl (kromě výděлку pro obchodníka) hráče zaujmout a pobavit, avšak z větší části už nejsou v přímém kontaktu s matematikou. Mohou však mezi nimi být i hry, při nichž se hráči setkávají zábavnou formou s matematickými jevy a při hře si vlastně nenápadně procvičují různé matematické činnosti. Ani o ty nám nyní nepůjde.

Tento článek si všímá jiného typu her, a to zábavných společenských her s matematickým pozadím, které nepotřebují speciální rekvizity, mají jednoduchá pravidla, může je hrát libovolný počet hráčů, mají soutěživý charakter, obsahují prvky zábavy a napětí, vyžadují iniciativu a aktivitu hráčů, obsahují prvky matematického myšlení, ale kde *šanci mají všichni – pro úspěch není matematické nadání zase až tak rozhodující*. Tyto hry proměněné na soutěže, kde pak lze vyhlásit získání zlaté, stříbrné a bronzové medaile i další pořadí, soutěžící zpravidla docela zaujmou a aktivizují. Jsou vhodné nejen pro školní výlet (když se počasí nevydaří – nebo i vydaří), jak nabízí název článku, ale i pro jiné vhodné příležitosti. Autor si

pozitivní reakce studentů na tyto hry znovu ověřil na Soustředění mladých přírodovědců v Jevíčku v srpnu 2006.

Matematico

V [1] je Matematico představeno jako italská hra a může se jí zúčastnit libovolný počet hráčů (i jeden). Vedoucí hry má balíček 52 karet, které představují 4 sady čísel od 1 do 13 (eso = 1, ... , kluk = 11, dáma = 12, král = 13). Karty zamíchá a při hře postupně ukazuje 25 karet a nahlas oznamuje jejich číselnou hodnotu. (Osvědčují se asi pětisekundové prodlevy mezi sdělováním jednotlivých čísel.)

Každý hráč má na listu papíru nakreslen (vytištěn) čtverec 5×5 s 25 prázdnými poli a jeho úkolem je postupně zapisovat každé ze sdělovaných čísel do kteréhokoli dosud prázdného pole čtverce (tedy zapsat každé číslo dříve, než je oznamováno další). Číslo jednou zapsané už nelze měnit – při hře se předpokládá čestnost hráčů. Cílem hráče je získat co nejvíce bodů, jimiž jsou ohodnoceny „figury“, které se mu podaří při hře sestavit ve svých řádcích, sloupcích nebo ve dvou „nejdelších diagonálách“. Jaké jsou možnosti (bodové ocenění „figur“ trochu připomíná poker):

<i>V řádku nebo sloupci jsou:</i>	<i>Bodový zisk:</i>
jedna dvojice, tj. dvě shodná čísla	10
dvě dvojice	20
trojice, tj. tři shodná čísla	40
trojice a dvojice	80
čtveřice, tj. čtyři shodná čísla	160
postupka (pět po sobě jdoucích čísel)	50
trojice jedniček a dvojice třináctek	100
čísla 1, 13, 12, 11, 10	150
čtveřice jedniček	200

Je-li některá z těchto figur v některé ze dvou diagonál, připočítává se za ni 10 bodů.

Hráče, kteří tuto hru hrají poprvé, upozorníme, že v žádné z figur nezáleží na pořadí, např. v postupce může být pořadí třeba 7, 5, 3, 6, 4, v trojici a dvojici třeba 8, 8, 5, 8, 5, atd. Při hodnocení se boduje v každém řádku, sloupci či diagonále vždy jen ta nejlepší figura; např. je-li v řádku trojice

a dvojice, získává hráč podle pravidel (jen) 80 bodů, tedy už žádné body navíc za dvojici nebo za trojici.

V průběhu hry panuje napětí – každý hráč si rezervuje políčka na předpokládané „figury“, při každém nově ohlášeném čísle se někteří hráči zaradují, jiní jsou zklamáni a všichni intenzivně přemýšlejí, kam toto nové číslo umístit – jsou tu totiž i prvky rizika. Hra končí, když je zaplněno všech 25 polí. Po hře hráči vyhodnotí ve svém čtverci hodnoty řádků, sloupců a dvou úhlopříček podle toho, jaké „figury“ se jim na nich podařilo vytvořit. Na obr. 1 je příklad, jak se zjišťuje celkový výkon. Vítězí hráč s nejvyšším počtem bodů; lze sestavit i medailové pořadí, a to po jedné hře nebo souhrnně po několika hrách.

11	7	5	3	6	0
8	10	10	8	8	80
10	2	1	10	1	20
7	7	5	13	6	10
9	7	4	4	12	10
0	0	40	10	0	10
					celkem 390 bodů

Obr. 1

K této hře stačí každému hráči papír a tužka, čtverec s 25 poli se načrtne za chvilku a generování čísel může být simulováno vedoucím hry, který si před vlastní hrou poznamenal posloupnost 25 čísel 1 až 13 (každé nejvýše čtyřikrát) a pak je diktuje v nahodilém pořadí.

Vyložené matematico

Vedoucí hry sdělí hráčům 25 čísel, která si předem připraví např. pomocí balíčku karet, a hráči usilují vložit je do polí čtverce 5×5 tak, aby získali co nejvyšší ocenění.

Tuto variantu hry lze též použít např. pro soutěž dvojic (na sestavení optimálního čtverce pracují dva a radí se – není to totiž tak snadné). Je tu třeba dát více minut času nebo dokonce zadat *Vyložené matematico* jako úkol „do druhého dne“. Kdo získá nejvíce bodů, zvítězí.

Úloha

Ze zadaných čísel sestavte *Vyložené matematico* s co nejvyšším hodnocením:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13.

Podaří se vám získat více než 900 bodů?

Rovnice

Tato hra by se měla jmenovat spíše „rovnosti“. Vedoucí hry sdělí (napíše na tabuli) skupinu pěti čísel a výsledek, např.:

$$5 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad = \quad 1.$$

Soutěžící mají mezi napsaná čísla vložit 4 znaménka matematických operací (případně i znaménko mínus před první číslo) tak, aby rovnost byla splněna a přitom nebylo změněno pořadí zapsaných čísel na levé straně rovnosti. Hra má několik úrovní:

- V 1. úrovni lze vkládat jen znaménka plus a mínus, případně vytvářet víceciferná čísla (např. $53 - 23 - 1$, pokud by byl zadán výsledek 29)
- ve 2. úrovni i znaménka krát a děleno,
- ve 3. úrovni i závorky – úrovně pro studenty i žáky,
- ve 4. nejvyšší úrovni lze použít mocniny, druhou odmocninu, kombinační čísla, faktoriály – úroveň pro studenty (viz pravidla v následující hře).

Vedoucí hry musí ovšem zadání připravit tak, aby zadaná úloha měla řešení. Např. výše uvedený příklad nemá řešení v první úrovni, ale má řešení (dokonce více než jedno) již ve druhé úrovni (najděte je) a ještě další řešení v dalších úrovních. Řešení je tím cennější, čím v nižší úrovni je ho dosaženo.

Hraje se zpravidla na rychlost – boduje ten, kdo nejdříve úlohu vyřeší. Souhrnný výsledek série her lze odměnit medailemi.

Soutěž o nejdelší posloupnost

Vedoucí hry zadá uspořádanou čtveřici nebo pětiici čísel (nemusejí být navzájem různá, např. 2, 1, 1, 6) a hráči z nich sestavují posloupnost čísel 0, 1, 2, ..., n (kam až to dovedou). Posloupnost těchto čísel musí být nepřerušená, tj. žádné číslo se tu nesmí vynechat.

Pravidla: Jsou povoleny operace sčítání, odčítání, násobení, dělení (zlomky), libovolný počet závorek, sestavení víceciferného čísla (např. z 1

a 6 číslo 16 nebo i 1,6), mocniny, druhá odmocnina, absolutní hodnota, případně faktoriál (vůbec nevádí, pokud ho žáci ještě nebrali, takto se s ním neformálně mohou seznámit, i s tím, že $0! = 1$). Vyspělejší hráči mohou používat kombinační čísla a funkci „celá část“ (resp. „dolní celá část“), nikoli však logaritmickou funkci (viz [2 – 3]). Každá číslice musí být použita právě jednou, všechny číslice musejí zachovat zadané pořadí (zleva doprava nebo shora dolů a žádná číslice se nesmí vynechat ani přidat. Řešení má v sobě prvky objevů (jednodušší řešení jsou cennější) a hra účastníky zpravidla docela zaujme.

Často existuje i více řešení; uveďme ukázkou:

Příklad

$$\begin{aligned} 0 &= (2 - 1 - 1)6 = \lfloor 2/116 \rfloor, \\ 1 &= (2 + 1)! + 1 - 6 = (2 - 1)^{16}, \\ 2 &= 2 + (1 - 1) \cdot 6 = \lfloor 2,116 \rfloor, \\ 3 &= -2 - 1 \cdot 1 + 6 = -2^1 - 1 + 6, \\ 4 &= (-2) \cdot 1 \cdot 1 + 6 = 2 + 1 - 1 + \lfloor \sqrt{6} \rfloor, \\ 5 &= (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 21 - 16, \\ 6 &= 2 - 1 - 1 + 6 = \binom{2}{1+1} \cdot 6, \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

Vítězí ten, kdo dojde nejdál a při stejném výkonu ten, kdo svou práci ukončí dříve.

Desítka

Je to vlastně takový kříženeček dvou předchozích her. Vygenerují se 4 čísla od 1 do 10, která nemusejí být všechna navzájem různá. Pokud nemáme po ruce nějaký technický prostředek pro jejich generování, např. kartičky s čísly nebo karty (viz výše Matematico), může vybrat čísla např. vedoucí hry nebo simultánně 4 hráči, každý jedno. Hráči pak soutěží, kdo nejdříve z těchto čísel vytvoří výsledek 10. Z číslic hořejšího příkladu by to bylo jednoduché: $2 + 1 + 1 + 6 = 10$, ale též např. $16 - (2 + 1)! = 10$. Jiný příklad: 1, 3, 7, 8: sestavíme $(7 + 3) \cdot 1^8$. Přitom pro vytváření výsledku 10 platí stejná pravidla jako ve shora uvedené soutěži o nejdelší posloupnost s tím rozdílem, že stanovená čísla můžeme v této hře použít v libovolném

pořadí. Provede se soutěž např. na 5 – 10 kol, přičemž každé kolo má limitován čas (podle věku žáků) např. 1 – 2 minuty. Vítězí ten, komu se podaří sestavit desítku v co nejvíce kolech, případně zaznamenáváme i pořadí v jednotlivých kolech.

Tvorba slov

V této hře, pro studenty a žáky také docela zajímavé, se druží matematika s českým jazykem. Vedoucí hry oznámí (napíše) nějaké delší slovo nebo slovní spojení, např.

STARÉ BORŮVKY,

kte­ré má v našem případě 12 písmen, z toho R je tu dvakrát. Hráči (nebo dvojice hráčů) si pak vytvářejí a zapisují všechny takové variace z těchto 12 prvků druhé až dvanácté třídy, které v českém jazyce mají význam podstatného jména v 1. pádě jednotného nebo množného čísla (např. lze zapsat oba případy, jak SBOR, tak SBORY). Přitom se v jednom slově mohou použít zadaná písmena jen v tom počtu, v jakém jsou zadána; např. je přípustné slovo BRATR (dvě R jsou zadána), ale nikoliv třeba BOBR (B je zadáno jen jednou). Platí slovo KŮRA, ale nikoli slovo ÚBOR (nad U je v zadání kroužek). Vedoucí hry se jistě vyhne zadání, z něhož by šlo vytvářet slova nepatřičná.

Po skončení doby stanovené vedoucím hry se provádí vyhodnocení. Lze je provést prostě jen podle počtu vytvořených slov, ale lze je i zpestřit: např. za slovo, které vymyslel jen jeden hráč a nikdo jiný, dát 6 bodů, mají-li totéž slovo jen dva hráči, pak každý dostane 3 body, jestliže toto slovo objevili 3 hráči, každý dostane 2 body, a v ostatních případech získají autoři slova 1 bod. Lze případně ohodnocovat i délku slov.

A nyní hry, které lze hrát v místnosti i venku.

Bum

Autor se s touto hrou seznámil před 60 lety jako žák základní školy. Účastníci hry se sesednou nebo postaví do kroužku a v podstatě postupně počítají jeden po druhém od jedné do nějakého n , které stanoví vedoucí hry. Ten na počátku hry také určí jednociferné číslo $p > 2$ (např. 3) a hráče, který hru začne. Určený hráč řekne „jedna“, jeho soused po pravici pak pokračuje 2, atd.; počítání pokračuje v kroužku stále dokola až po ono n .

Ale pozor: pokud na hráče vyjde číslo, které je dělitelné číslem p , řekne místo „svého“ čísla jen BUM! Stejně si počíná i hráč, na něhož vyjde číslo, v němž je číslice p .

Příklad počítání od 1 do 20 pro $p = 3$:

1, 2, BUM!, 4, 5, BUM!, 7, 8, BUM!, 10, 11, BUM!, BUM!, 14, BUM!, 16, 17, BUM!, 19, 20, ...

Je snadné se splést – na správnost hlášky dohlíží vedoucí hry a vlastně i všichni hráči. Hodnotit jednotlivé hráče lze různě; např. na počátku hry dostane každý hráč 10 bodů a za každou chybu se mu jeden bod strhne. (Pokud počet hráčů je dělitelný číslem p , následovník chybujícího hráče jedno číslo přeskočí.) Jinou možností je, že po první chybě drží hráč zvednutou levou ruku, při jeho následující správné odpovědi zase připaží, ale při nesprávné odpovědi zvedne i druhou ruku a při třetí nesprávné odpovědi vypadne ze hry.

Hru lze zpestřit tím, že se nepočítá od 1, ale např. od 100, nebo tím, že se počítá s krokem větším než 1, tj. např. přes 2: 2, 4, 6, 8, ...

Bum – prásk

Pokud se hráčům zdá hra *Bum* příliš jednoduchá, je možno přejít k této složitější verzi:

- když je počítané *číslo* dělitelné číslem p , řekne se místo čísla jen BUM!,
- když je *některá číslice* čísla dělitelná číslem p , řekne se místo čísla jen PRÁSK! (resp. PRÁSK – PRÁSK!, viz příklad níže),
- když nastanou obě tyto možnosti, řekne se místo čísla BUM – PRÁSK!.

Příklad počítání od 1 do 20:

1, 2, BUM – PRÁSK!, 4, 5, BUM – PRÁSK!, 7, 8, BUM – PRÁSK!, 10, 11, BUM!, PRÁSK!, 14, BUM!, PRÁSK!, 17, BUM!, PRÁSK!, 20, ... (např. místo čísla 36 by bylo BUM – PRÁSK – PRÁSK!)

Vše ostatní je stejné jako u hry *Bum*. (Autor zkoušel ještě složitější variantu, ale při té už se pletli skoro všichni, proto ji zde neuvádíme.)

A nakonec jedna hra, která se hraje venku.

Psaní čísel

V této hře spolupracuje matematika s tělesnou výchovou. Jedna verze hry se připomíná v [4]: Hráči soutěží, kdo napíše nohama nejdelší posloupnost 1, 2, 3, ..., n . Za jakých podmínek? Hráč leží na zádech, paže i hlava

jsou opřeny o zem, obě nohy jsou mírně zvednuté a dokonale napjaté a hráč snožmo špičkami chodidel píše ve vzduchu jednotlivé číslice. Přitom se nesmí patami dotknout země ani zvednout nohy výše než půl metru nad podložku. Ostatní hráči jeho výkon kontrolují (výkon nebývá velký).

Tuto hru lze učinit zajímavější v této verzi: Hráči se rozdělí do dvojic. Jeden z dvojice je *odesílatel* a druhý *příjemce*. Vedoucí hry řekne každému odesílateli nějaké číslo, např. 6378 (každá dvojice může mít jiné, ale nemusí), pak si odesílatelé lehnou vedle sebe do řady – na krok od sebe, tři kroky za jejich nohama si stoupnou příjemci a na pokyn vedoucího hry vysílají odesílatelé svým příjemcům (nohama, jak je uvedeno výše) jednotlivé číslice svého čísla – velmi úhledně psané a stranově převrácené, aby se to příjemcům dobře četlo. Mezi jednotlivými číslicemi si odesílatelé mohou chvíli odpočinout s nohama na zemi. Po přijetí celého čísla příjemci rychle a tiše ohlásí přečtené číslo vedoucímu hry a ten si zapisuje pořadí správných odpovědí. Je-li některé číslo přečteno nesprávně, odešle vedoucí hry neúspěšného příjemce ihned zpět k jeho odesílateli, aby se pokusil znovu a správně vysílané číslo přečíst. Při hře musí odesílatelé mlčet, samozřejmě nesmějí své číslo sdělovat ani jinými způsoby (kontrolují to protihráči). Mlčí i příjemci, pokud se před startem hry nedohodne, že příjemci mohou požádat o nové odeslání číslice. Ve druhém kole si odesílatelé a příjemci vymění své funkce. Vítězem je dvojice s co nejmenším součtem svých umístění.

Závěr: Kromě toho, že uvedené hry jsou zábavné a matematika je při nich partnerem hráčů, má každá z těchto her pro hráče svůj vlastní přínos, ale analýzu tohoto přínosu už ponecháváme čtenáři.

Literatura

- [1] *Korděmskij, B. A.*: Matematické prostocviky. Mladá fronta, Praha 1957.
- [2] *Vinař, J.*: Rok 2000 – konec jedné hry? MFI, r. 9 (1999/2000), č. 3, str. 182.
- [3] *Vinař, J.*: Rok 2003 – hra sa nám vrátila? MFI, r. 13 (2003/2004), č. 4, str. 243 a č. 5, str. 303 – 304.
- [4] *Zapletal, M.*: Špalíček her. Albatros, Praha, 1988.

57. ročník matematické olympiády

Úlohy I. kola (domácí část)

KATEGORIE A

A–I–1

Najděte všechny trojice reálných čísel a, b, c s vlastností: Každá z rovnic

$$x^3 + (a + 1)x^2 + (b + 3)x + (c + 2) = 0,$$

$$x^3 + (a + 2)x^2 + (b + 1)x + (c + 3) = 0,$$

$$x^3 + (a + 3)x^2 + (b + 2)x + (c + 1) = 0$$

má v oboru reálných čísel tři různé kořeny, celkem je to však pouze pět různých čísel.

Jaromír Šimša

A–I–2

V rovině je dána úsečka AV a ostrý úhel velikosti α . Určete množinu středů kružnic opsaných všem těm trojúhelníkům ABC s vnitřním úhlem α při vrcholu A , jejichž výšky se protínají v bodě V .

Pavel Leischner

A–I–3

Množinu M tvoří $2n$ navzájem různých kladných reálných čísel, kde $n \geq 2$. Uvažujme n obdélníků, jejichž rozměry jsou čísla z M , přičemž každý prvek z M je použit právě jednou. Určete, jaké rozměry mají tyto obdélníky, je-li součet jejich obsahů

- a) největší možný; b) nejmenší možný.

Jaroslav Švrček

A–I–4

Určete počet konečných rostoucích posloupností přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$ všech možných délek k , pro které platí $a_1 = 1$, $a_i \mid a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \dots, k - 1$ a $a_k = 969\,969$.

Martin Panák

A–I–5

Je dána kružnice k , bod O , který na ní neleží, a přímka p , která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici l , která má vnější dotyk s kružnicí k a dotýká se i přímky p . Příslušné body dotyku označme A a B . Pokud body O , A , B neleží v přímce, sestrojíme kružnici m opsanou trojúhelníku OAB . Dokažte, že všechny takové kružnice m mají další společný bod různý od bodu O , anebo se dotýkají téže přímky.

Ján Mazák

A–I–6

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje celé číslo a ($1 < a < 5^n$) takové, že platí $5^n \mid a^3 - a + 1$.

Ján Mazák

KATEGORIE B

B–I–1

Najděte všechna přirozená čísla k , pro něž je zápis čísla $6^k \cdot 7^{2007-k}$ v desítkové soustavě zakončen dvojčíslím a) 02; b) 04.

Eva Řídká

B–I–2

V pásu mezi rovnoběžkami p , q jsou dány dva různé body M a N . Sestrojte kosočtverec nebo čtverec, jehož dvě protější strany leží na přímkách p a q a body M a N po jednom leží na zbývajících dvou stranách.

Jaromír Šimša

B–I–3

Jsou-li x a y reálná čísla, pro něž platí $x^3 + y^3 \leq 2$, potom $x + y \leq 2$. Dokažte.

Ján Mazák

B–I–4

Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s délkami stran a , b , c a délkami těžnic t_a , t_b , t_c , pro něž platí $a + t_a = b + t_b$. Uvažujte oba případy, kdy AB je a) přepona, b) odvěsna.

Pavel Novotný

B–I–5

Určete všechny dvojice a, b reálných čísel, pro něž má každá z kvadratických rovnic

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \quad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva různé reálné kořeny, přičemž právě jeden z nich je oběma rovnicím společný.

Jaroslav Švrček

B–I–6

Obdélník $2\,005 \times 2\,007$ je rozdělen na černé a bílé jednotkové čtverečky. Dokažte, že pak pro jednu z barev (černou nebo bílou) existuje více než 95 800 pravoúhelníků (složených z jednotkových čtverečků), jež se navzájem se nepřekrývají a jejichž rohové čtverečky mají vesměs zvolenou barvu, přičemž každá z jejich stran je tvořena aspoň dvěma čtverečky.

Pavel Leischner

KATEGORIE C

C–I–1

Určete nejmenší přirozené číslo n , pro něž i čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ jsou přirozená.

Jaroslav Švrček

C–I–2

Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice se středem S . Určete rozdíl

$$|\angle ASD| - |\angle CSD|,$$

jestliže $|\angle ASB| - |\angle BSC| = 40^\circ$.

Jaromír Šimša

C–I–3

Máme určitý počet krabiček a určitý počet kuliček. Dáme-li do každé krabičky právě jednu kuličku, zbyde nám n kuliček. Když však dáme právě

n krabiček stranou, můžeme všechny kuličky rozmístit tak, aby jich v každé zbývající krabičce bylo právě n . Kolik máme krabiček a kolik kuliček?

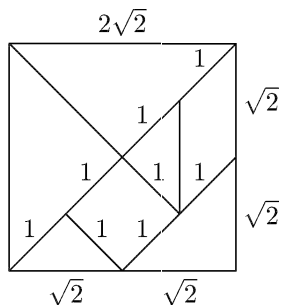
Vojtech Bálint

C–I–4

Tangram je skládačka, kterou lze vyrobit z papíru rozřezáním vystřiženého čtverce na sedm dílů podle čar vyznačených na obrázku. Předpokládejme, že délka strany čtverce je $2\sqrt{2}$ cm. Rozhodněte, zda lze z dílů tangramu složit:

- obdélník $2 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$,
- obdélník $\sqrt{2} \text{ cm} \times 4\sqrt{2} \text{ cm}$.

Pavel Leischner



C–I–5

Ve skupině n lidí ($n \geq 4$) se někteří znají. Vztah „znát se“ je vzájemný: jestliže osoba A zná osobu B , pak také B zná A a nazýváme je dvojicí známých.

- Jestliže mezi každými čtyřmi osobami jsou aspoň čtyři dvojice známých, pak každé dvě osoby, které se neznají, mají společného známého. Dokažte.
- Zjistěte, pro která $n \geq 4$ existuje skupina osob, v níž jsou mezi každými čtyřmi osobami aspoň tři dvojice známých a současně se některé dvě osoby neznají ani nemají společného známého.
- Rozhodněte, zda ve skupině šesti osob mohou být v každé čtveřici právě tři dvojice známých a právě tři dvojice neznámých.

Ján Mazák

C–I–6

Klárka měla na papíru napsané trojmístné číslo. Když ho správně vynásobila devíti, dostala čtyřmístné číslo, jež začínalo touž číslicí jako číslo původní, prostřední dvě číslice se rovnaly a poslední číslice byla součtem číslic původního čísla. Které čtyřmístné číslo mohla Klárka dostat?

Peter Novotný

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2007 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 139

Určete všechny dvojice a, b přirozených čísel, pro něž jsou hodnoty odmocnin $\sqrt{a^2 - 8b}$ a $\sqrt{b^2 - 8a}$ celá čísla.

Jaromír Šimša

Úloha 140

Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníku ABC a ϱ poloměr kružnice jemu vepsané. Pak platí nerovnost

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4\varrho^2}.$$

Dokažte a zjistěte, kdy nastává rovnost.

Jaroslav Švrček