

MATEMATIKA

Množiny bodů určené druhými mocninami vzdáleností od daných bodů

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V rámci analytické geometrie se na střední škole často setkáváme s úlohami vyšetřit množinu bodů dané vlastností. V tomto článku se budeme zabývat otázkou, jakým geometrickým útvarem je množina, jejíž body jsou určeny pomocí druhých mocnin jejich vzdáleností od několika daných bodů. Vyřešíme nejprve tři jednoduché příklady tohoto typu.

Příklad 1

Určete, jakým geometrickým útvarem je množina všech bodů X , pro které platí

$$|XA|^2 + |XB|^2 = d,$$

kde A, B jsou krajní body dané úsečky a d je dané nezáporné reálné číslo.

Řešení: Úsečku AB délky a umístíme ve zvolené souřadnicové soustavě tak, že bod A leží v počátku a bod B má souřadnice $[b, 0]$, takže vzdálenosti bodu $X[x, y]$ od bodů A, B jsou

$$|XA|^2 = x^2 + y^2, \quad |XB|^2 = (x - b)^2 + y^2.$$

Má-li bod X danou vlastnost, zjistíme (po ekvivalentních úpravách), že pro jeho souřadnice platí

$$\left(x - \frac{1}{2}b\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(2d - b^2).$$

Hledaným útvarem je tedy

- a) *kružnice*, je-li $d > \frac{1}{2}b^2$,
- b) *jediný bod* (a to střed úsečky AB), je-li $d = \frac{1}{2}b^2$,
- c) *prázdná množina*, je-li $d < \frac{1}{2}b^2$.

Příklad 2

Určete, jakým geometrickým útvarem je množina všech bodů X , pro které platí

$$|XA|^2 - |XB|^2 = d,$$

kde A, B jsou krajní body dané úsečky a d je dané reálné číslo.

Řešení: Úsečku AB délky a umístíme ve zvolené souřadnicové soustavě stejně jako v předchozím příkladu – bod A leží v počátku a bod B má souřadnice $[b, 0]$. Protože pro vzdálenosti bodu $X[x, y]$ od bodů A, B platí

$$|XA|^2 = x^2 + y^2, \quad |XB|^2 = (x - b)^2 + y^2,$$

dostaneme z dané podmínky snadnými úpravami, že bod $X[x, y]$ leží na přímce o rovnici

$$x = \frac{b^2 + d}{2b}.$$

Vzhledem k tomu, že tyto úpravy byly ekvivalentní, má také každý bod X této přímky danou vlastnost. Znamená to, že hledaným útvarem je *přímka*, která je kolmá na přímkou AB .

Příklad 3

Určete, jakým geometrickým útvarem je množina všech bodů X , pro které platí

$$|XA|^2 + |XC|^2 + |XE|^2 - |XB|^2 - |XD|^2 - |XF|^2 = 0,$$

kde A, B, C, D, E, F jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníku.

Řešení: Pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ o straně délky a umístíme ve zvolené souřadnicové soustavě tak, že jeho střed je v počátku a vrchol A má souřadnice $[a, 0]$; zbývající vrcholy B, C, D, E, F pak mají po řadě souřadnice $[\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\sqrt{3}]$, $[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\sqrt{3}]$, $[-a, 0]$, $[-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a\sqrt{3}]$, $[\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}a\sqrt{3}]$. Vypočteme-li druhé mocniny vzdáleností libovolného bodu $X[x, y]$ od vrcholů daného šestiúhelníku, zjistíme, že výraz

$$|XA|^2 + |XC|^2 + |XE|^2 - |XB|^2 - |XD|^2 - |XF|^2$$

je identicky roven nule. Znamená to, že dané podmínce vyhovují všechny body X , takže hledaným útvarem je *celá rovina*.

V uvedených příkladech jsme viděli, že množinou všech bodů určených druhými mocninami jejich vzdáleností od daných bodů může být některý z těchto útvarů:

celá rovina, přímka, kružnice, jediný bod, prázdná množina.

Naskýtá se otázka, zda nemohou nastat i jiné možnosti. Abychom ji zodpověděli, zobecníme předcházející příklady a vyřešíme *úlohu o druhých mocninách vzdáleností* obecně.

Úloha

Určete, jakým geometrickým útvarem je množina všech bodů X , pro které platí

$$\sum_{i=1}^n k_i |XA_i|^2 = k,$$

kde $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou dané body a $k_1, k_2, \dots, k_n, k$ jsou daná reálná čísla.

Řešení: Zvolíme souřadnicovou soustavu a souřadnice každého bodu A_i označíme $[x_i, y_i]$. Pro souřadnice $[x, y]$ bodu X pak podle dané podmínky platí:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n k_i [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2] &= \sum_{i=1}^n k_i (x^2 + y^2 - 2xx_i - 2yy_i + x_i^2 + y_i^2) = \\ &= (x^2 + y^2) \sum_{i=1}^n k_i - 2x \sum_{i=1}^n k_i x_i - 2y \sum_{i=1}^n k_i y_i + \sum_{i=1}^n k_i (x_i^2 + y_i^2) = k. \end{aligned}$$

Pro přehlednost označíme čísla

$$\sum_{i=1}^n k_i, \quad \sum_{i=1}^n k_i x_i, \quad \sum_{i=1}^n k_i y_i, \quad -k + \sum_{i=1}^n k_i (x_i^2 + y_i^2)$$

po řadě a, b, c, d a dostaneme tak rovnici

$$ax^2 + ay^2 - 2bx - 2cy + d = 0.$$

Je-li $a \neq 0$, upravíme ji doplněním na čtverec na tvar

$$\left(x - \frac{b}{a}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 - ad}{a^2},$$

odkud je vidět, že hledaným útvarem je

- a) *kružnice*, je-li $b^2 + c^2 > ad$,
- b) *jediný bod*, je-li $b^2 + c^2 = ad$,
- c) *prázdná množina*, je-li $b^2 + c^2 < ad$.

Je-li $a = 0$, dostaneme rovnici

$$2bx + 2cy - d = 0,$$

odkud je zřejmé, že hledaným útvarem je

- a) *přímka*, je-li $b^2 + c^2 \neq 0$ a d libovolné,
- b) *celá rovina*, je-li $b = c = d = 0$,
- c) *prázdná množina*, je-li $b = c = 0$ a $d \neq 0$.

Obrácením tohoto postupu docházíme k závěru, že platí následující tvrzení:

Věta (o druhých mocninách vzdáleností)

Množina všech bodů X , pro něž platí $\sum k_i |XA_i|^2 = k$, kde A_i jsou dané body a k_i , k daná reálná čísla, je právě jeden z těchto útvarů: celá rovina, přímka, kružnice, jediný bod, prázdná množina.

Tato věta umožňuje zjistit, jakým útvarem je množina bodů vyjádřená pomocí druhých mocnin jejich vzdáleností od několika daných bodů, aniž je nutné odvozovat rovnici tohoto útvaru. Ukažme si to v následujících příkladech.

Příklad 4

Určete, jakým geometrickým útvarem je množina všech bodů X , pro něž platí

$$|XA|^2 + |XB|^2 - |XC|^2 = 0,$$

kde ABC je daný rovnostranný trojúhelník.

Řešení: Tuto úlohu dostaneme, položíme-li v obecné úloze o druhých mocninách vzdáleností $n = 3$, $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = -1$, $k = 0$. Vzhledem k tomu, že platí

$$k_1 + k_2 + k_3 \neq 0,$$

je útvarem, který vyplní body X , kružnice nebo jediný bod nebo prázdná množina. Z dané podmínky je však ihned vidět, že vyhovuje bod $X = A$ (neboť je $|AA|^2 + |AB|^2 - |AC|^2 = 0$) a také bod $X = B$ (neboť je $|BA|^2 + |BB|^2 - |BC|^2 = 0$). Znamená to, že hledaný útvar obsahuje aspoň dva body, takže se jedná o kružnici.

Příklad 5

Určete, jakým geometrickým útvarem je množina všech bodů X , pro něž platí

$$|XA|^2 + |XC|^2 - |XB|^2 - |XD|^2 = 0,$$

kde $ABCD$ je daný pravoúhelník.

Řešení: Stejně jako v předešlém příkladu jde o speciální případ obecné úlohy o druhých mocninách vzdáleností, který dostaneme pro $n = 4$, $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = k_4 = -1$. Protože je nyní

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0,$$

je hledaným útvarem prázdná množina, přímka nebo celá rovina. Prázdná množina ani přímka však tímto útvarem být nemohou, neboť – jak se snadno přesvědčíme – danou podmínku splňují všechny vrcholy daného pravoúhelníku. Např. pro bod $X = A$ je $|AA| = 0$ a

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 + |AD|^2.$$

Příklad 6

Určete, jakým geometrickým útvarem je množina všech bodů X , pro něž platí

$$|PX| = \lambda |QX|,$$

kde P , Q jsou dané různé body a λ je dané kladné číslo různé od jedné.

Řešení: Na první pohled se nezdá, že by se jednalo o zvláštní případ naší obecné úlohy. Stačí si však uvědomit, že daná podmínka je ekvivalentní s podmínkou

$$|PX|^2 - \lambda^2 |QX|^2 = 0,$$

která vznikne z obecné úlohy pro $n = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = \lambda^2$. Je tedy $k_1 + k_2 \neq 0$, což znamená, že hledaným útvarem je kružnice, bod nebo prázdná množina. Protože však na přímce PQ leží dva body $X_1 \neq X_2$, jejichž poměr vzdáleností od bodů P , Q je roven danému číslu $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, je hledaným útvarem kružnice. (Je to známá Apolloniova kružnice.)

L i t e r a t u r a

- [1] *Calda, E.*: Apolloniova kružnice a kruhový kulečník, *Rozhledy MF*, roč. 81 (2006), č. 1.
- [2] *Vasiljev, N. B. – Gutenmacher, V. L.*: Přímky a křivky, Praha, Mladá fronta 1982.

Didakticko-motivačná výbava učiteľa matematiky

DUŠAN JEDINÁK

Trnavská univerzita, Trnava, SLOVENSKO

Vždy pripravený

Jednou z pozitívnych charakteristík úspešného učiteľa matematiky je aj jeho pripravenosť na improvizáciu (napr. na suplovaných vyučovacích hodinách, v mimovyučovacom čase, pri záujmovej činnosti a pod.). K tomu môže poslúžiť jeho *didakticko-motivačná výbava* – zvlášť pripravený súbor rôznorodých podnetov aj pre nečakané situácie. Učiteľ matematiky nemá ponúkať len údaje z predpísaných učebníc a zbierok úloh, ale aj iné motivačné informácie a popularizačné podnety, napr. aj výber titulov z popularizačnej, zábavnej a rekreačno-poučnej i historickej literatúry

s matematickou tematikou alebo životopisné informácie o významných matematikoch a ich pozoruhodných dielach. Zodpovedný učiteľ by mal mať vždy „po ruke“ svoj typický širší súbor podnetov (uložený aj vo svojej ľudskej pamäti), úloh i príkladov, zaujímavých myšlienok a didaktických postupov, historických poznámok, praktických ukážok, aby presvedčoval o tom, že jeho pomer k matematickej kultúre je živý a trvalý a hlboký vzťahom pre pestrý svet informácií s jednoduchým, ale aj veľmi podnetným pozadím. Tieto ciele sleduje to, čo nazývame *didakticko-motivačná výbava učiteľa matematiky*.

Málokto z učiteľov matematiky pochybuje o tom, že pre pedagogickú prácu sú potrebné nielen vhodné príklady a úlohy, ich didaktické spracovanie, motivačné podnety, ale aj pozoruhodné citáty, filozofické úvahy a historické poznámky. Ich účelový výber je určite rôznorodo pestrý. Spoločným menovateľom asi môže byť zámer motivačno-didaktický. Žiakom potrebujeme ukázať základné myšlienkové postupy charakteristické pre matematické myslenie, obsažnosť tém logickej argumentácie i žánrovú pestrosť spracúvanej problematiky. Každý učiteľ školskej matematiky má svoj „odborný obzor“. Postupné presahovanie tejto línie by si mal pravidelne pripravovať ďalším štúdiom podnetných zdrojov informácií.

Riešenie úloh ako ústredná činnosť

Základnou zložkou motivačno-didaktickej výbavy učiteľa matematiky je pestrý súbor úloh s pozoruhodným textom, s rôznou tematikou, postupne sa zvyšujúcou obťažnosťou a cieleným možným použitím vo zvolenej chvíli didaktického pôsobenia. Učiteľ matematiky v prvom rade na premyslených zadaniach príkladov a úloh, v postupoch ich riešenia a dokazovania správnosti, uplatňuje svoju metodickú spôsobilosť, didaktické zásady i praktické skúsenosti. Zmysluplne pripravené úlohy sú aj zdrojom myšlienkových podnetov a motivačných impulzov. Súbor ponúkaných úloh (napr. ukážka 1., 4.) a ich didakticko-motivačná úroveň môže byť pomerne dobrou charakteristikou kvality učiteľskej práce.

Súbor didakticko-motivačných úloh (1. ukážka)

1. Ako si zapamätať číslo na 30 desatinných miest?

$\pi = 3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\ldots$

Mám, ó bože, ó dobrý, zapamätať si takýto čísel rad. Veľký slovutný Archimedes, pomáhaj trápenému, daj mu moc naspamäť znať krásne aj

slávne síce, ale tak protivné nám, ach, číslice Ludolfove.

(počet písmen v jednotlivých slovách je príslušná číslica v desatinom vyjadrení π)

2. Nečakané vyjadrenie – rovnica srdca:

Znáznorníte v ortonormálnej sústave súradníc binárnu reláciu

$$y = \frac{2}{3} \left\{ \frac{x^2 + |x| - 6}{x^2 + |x| + 2} \pm \sqrt{36 - x^2} \right\}$$

3. Rozdelenie koristi – spravodliví zbojníci:

Ako si traja zbojníci rozdelia rôznorodú korisť, ak si navzájom nedôverujú a každý z nich je presvedčený, že dokáže korisť rozdeliť na rovnocenné časti.

4. Rozhovor dvoch matematikov:

A: Súčin veku mojich troch synov je 36.

B: Táto informácia nestačí na určenie veku každého z nich.

A: Súčet veku synov je rovnaký ako počet okien na dome, ktorý vidíme pred sebou.

B: Ani teraz sa nedá určiť vek tvojich synov.

A: Najstarší z mojich synov má čierne vlasy.

B: Ďakujem, to mi stačí. Už poznám vek tvojich synov.

Koľko rokov má každý z matematických synov a koľko okien bolo na budove, ktorú videli pred sebou?

5. Štvorec iba kružidlom

Zostrojte všetky vrcholy štvorca $ABCD$, ale iba kružidlom, ak sú dané vrcholy A , B .

6. Nežný cit a pravdepodobnosť:

Desať ľudí si náhodne sadne okolo okrúhleho stola. Aká je pravdepodobnosť, že určití dvaja ľudia budú sedieť vedľa seba?

7. Čo je výhodnejšie pre pracujúcich?

Máte rozhodnúť, buď znížiť ceny výrobkov o 10 % a nemeniť platy pracovníkov, alebo nemeniť ceny výrobkov a zvýšiť o 10 % platy. Zdôvodnite, čo je výhodnejšie pre pracovníkov.

8. Taký trojuholník neexistuje?

Ukážte, že neexistuje trojuholník, ktorého výšky by mali veľkosť 1, 2, 3 (dĺžkových jednotiek).

9. Aj taký existuje?

Dokážte, že v rovine existuje trojuholník, ktorého všetky výšky sú menšie než 1 cm a obsah trojuholníka je väčší ako milión cm^2 .

10. Záhada dvanástich dukátov

Medzi dvanástimi dukátmi je jeden falošný (nemá rovnakú hmotnosť ako ostatné). Stanovte postup akým nájdete tento falošný dukát najviac tromi váženiami na rovnoramenných váhach.

Postrehy význačných osobností (2. ukážka)

- *Najušľachtilejšia sila našej duše je schopnosť, ktorá sa spolieha na meranie a výpočet.*

Platón

- *Filozofia sveta je obsiahnutá v grandióznej knihe otvorenej pre všetkých – myslím tým knihu prírody. Je napísaná rečou matematiky. Bez nej nemožno pochopiť ani jedno slovo, bez nej zostane iba márne krúženie v bludnom labyrinte... Dve pravdy si nikdy nemôžu odporovať.*

G. Galilei

- *Úlohou vedy je vzdalovať človeka od zla, usmerňovať jeho myseľ k väčšej dokonalosti.*

M. Koperník

- *Celá ľudská dôstojnosť spočíva v myslení. Snažme sa preto, aby sme mysleli správne, v tom je princíp mravnosti... Nemožno popierať existenciu všetkého, čo nie je pochopiteľné.*

B. Pascal

- *Z úvah o príkladoch je možné vytvoriť metódu.*

R. Descartes

- *Matematiku už len preto je potrebné študovať, že ona rozum do poriadku dáva.*

M. V. Lomonosov

- *Najtvrdším orieškom pri riešení problémov je položiť si správnu otázku. Jediná cesta ako sa to dá naučiť je – skúšať to.*

P. Halmos

- *Práca matematikov mala vždy za cieľ priniesť nové poznatky užitočné pre inú ľudskú činnosť.*

P. Vopěnka

- *Matematika dáva najčistejší a bezprostredný zážitok pravdy, v tom je jej hodnota pre všeobecné vzdelanie.*

M. Laue

- *To najdôležitejšie v živote je hrať sa. A je šťastím, ak človek zapojí do hry svoj mozog.*

E. Rubik

- *Zaujatie matematikou sa dá porovnať so záujmom o mytológiu, literatúru, alebo hudbu. Je to jedna z najvlastnejších oblastí človeka, v nej sa prejavuje ľudská podstata, túžba po intelektuálnej sfére života, ktorá je jedným z prejavov harmónie sveta.*

H. Weyl

- *Milujem matematiku nielen preto, že je možné jej použitie v technike, ale aj preto, že je krásna, že do nej človek vložil svoju rozkoš z hry a že matematiky je schopná aj tej najvyššej hry a umožňuje nám zmocňovať sa nekonečna. Má čo povedať o nekonečne a o ideách. Má neuzavretú povahu ľudského tvorenia.*

R. Péterová

Súbor historických poznámok (3. ukážka)

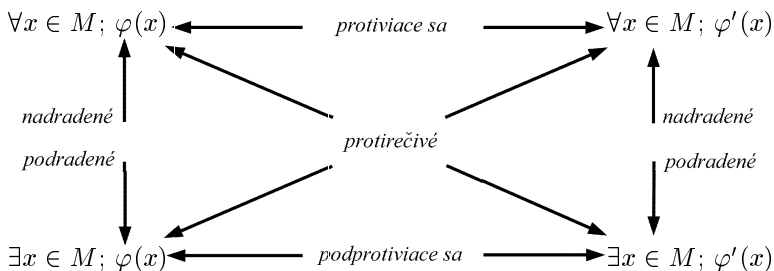
Stredoveká zbierka úloh

Ani v „temnom“ stredoveku nebola matematika mŕtva. Na dvore Karola Veľkého v Aachene okolo roku 775 sa používala jedna z prvých zbierok zaujímavých úloh z matematiky s podnetným názvom „Úlohy na cibrenie umu mladých“. Jej autorom bol učiteľ, filozof i básnik *Alcuin z Yorku* (asi 735 – 804, pôvodným keltským menom Alh-win, tj. priateľ chrámu). Už v tejto učebnici sa vyskytuje známa úloha o pltníkovi, vlku, koze a kapuste. Skúste zdokonaľiť svoje myslenia vyriešením úlohy: Ako rozdeliť 100 mincí medzi 100 osôb, aby muži dostali po troch, ženy po dvoch a každé dve deti spolu po jednej minci. Už vo svojej dobe vzdelanec Alcuin vedel: „*Rozumne sa pýtať, znamená vyučovať.*“

Štvorec protikladov

Carihradský mních a filozof *Michael Sellos*, žijúci v 11. storočí, navrhol (pred ním podobnú schému používal aj vzdelaný rímsky rečník *L. A. Apuleius* v druhom storočí) usporiadať všeobecný kladný výrok $[\forall x \in M; \varphi(x)]$, všeobecný záporný výrok $[\forall x \in M; \varphi'(x)]$, čiastočný kladný výrok

$[\exists x \in M; \varphi(x)$ a čiastočný záporný výrok $[\exists x \in M; \varphi'(x)$ do štvorcovej schémy a vyznačiť ich logické vzťahy:



protirečivé (logicky protikladné, sporné, kontradiktórne, negácia, opak; jeden je pravdivý – druhý nepravdivý);

protiviace sa (kontrárne; nemôžu byť obidva pravdivé, ale môžu byť obidva nepravdivé);

podprotiviace sa (subkontrárne; môžu byť obidva pravdivé, nemôžu byť obidva nepravdivé);

podradenosť, nadradenosť vzhľadom na pravdivosť (subsumcia; pre neprázdnu M z pravdivosti nadradeného výroku vyplýva pravdivosť podradeného výroku, z nepravdivosti podradeného výroku vyplýva nepravdivosť nadradeného výroku).

Nikdy nebude prvočíslom

Koľko bolo žien úspešných vo „veľkej“ matematike? Prvou ženou, ktorá získala cenu Parížskej akadémie za vypracovanie matematickej teórie pružnosti dosiek bola *Sophie Germainová* (1776 – 1831). Pracovala aj v teórii čísel. Tam jednoducho ukázala: *Pre každé prirodzené číslo $n > 1$ platí: číslo $(n^4 + 4)$ je číslo zložené* (to znamená, že ak je $n > 1$ nie je nikdy prvočíslom). Pozrite sa na vtipný dôkaz:

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 + 2n)(n^2 + 2 - 2n).$$

Ani jeden zo súčiniteľov sa pre $n > 1$ nerovná jednej, to znamená, že má dvoch rôznych deliteľov, ktoré sa nerovnajú číslu samému ani jednotke. Teda je to číslo zložené.

Zaujímavé riešenia vtipných úloh (4. ukážka)

Čarovný trik ako kúzelník

Úloha

Napište si svoje trojciferné číslo. Urobte z neho ďalšie číslo s obráteným poradím číslic. Odčítajte menšie z týchto čísel od väčšieho. Z výsledku mi povedzte cifru na mieste jednotiek. Poviem vám celý výsledok.

Riešenie: Skúsme to: (537, 735) $735 - 537 = 198$, poviete 8.

Ja si predstavím $99x = \dots 8$, teda $x = 2$, váš výsledok bol 198. V čom je podstata?

$$100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99(a - c)$$

Výsledok odčítania trojciferných, tzv. reverzných čísel je vždy deliteľný 99.

Tento fakt využijeme na určenie rozdielu $(a - c)$ a teda aj celého výsledku.

Vynášať sa aj z mála

Úloha

V znázornenom zápise súčinu dvoch kladných celých čísel stanovte nezapísané číslice (sú naznačené bodkami):

$$\begin{array}{r} \bullet \bullet \bullet \\ \times \bullet \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \\ 3275 \bullet \bullet \bullet \\ \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \end{array}$$

Riešenie: Musíme vychádzať z toho mála, čo vidíme a z toho, čo o násobení vieme. Ak rozložíme číslo 3275 na súčin prvočísel dostaneme $3275 = 5^2 \cdot 131$, teda aby sme dostali toto číslo ako súčin trojciferného a jednociferného čísla treba $655 \cdot 5$. Potom násobenec bude 655 a druhá cifra násobiteľa 5. Pretože tretí čiastočný súčin je trojciferný, tak prvá číslica násobiteľa musí byť iba 1. Aby prvý čiastočný súčin bol štvorciferný a celkový súčin iba päťciferný, tak posledná cifra násobiteľa môže byť len 2.

Naznačený súčin je

$$\begin{array}{r}
 6 \ 5 \ 5 \\
 \times 1 \ 5 \ 2 \\
 \hline
 1 \ 3 \ 1 \ 0 \\
 3 \ 2 \ 7 \ 5 \\
 6 \ 5 \ 5 \\
 \hline
 9 \ 9 \ 5 \ 6 \ 0
 \end{array}$$

Tanečný záznam svedomitých dievčat

Úloha

Na tanečnom večierku bolo 20 mladých ľudí (chlapci a dievčatá). Mária tancovala so siedmimi chlapcami, Olga s ôsmimi, Viera s deviatimi, atď. Posledná Helena tancovala so všetkými chlapcami. Koľko chlapcov bolo na večierku?

Riešenie: Na prvý pohľad sa zdá, že zadanie úlohy je akési zmätočné. Nevieime mená všetkých dievčat ani ich počet. Označme si počet dievčat x .

Poznáme iba počet tanečníkov s jednotlivými svedomitými dievčatami:

$$\begin{array}{l}
 x \left\{ \begin{array}{l} \text{M} \dots\dots\dots 7 \text{ chlapcov} \\ \text{O} \dots\dots\dots 8 \text{ chlapcov} \\ \text{V} \dots\dots\dots 9 \text{ chlapcov} \\ \dots\dots\dots \\ \text{H} \dots\dots\dots y \text{ (} y \text{ je počet všetkých chlapcov)} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Teda x -té dievča tancovalo s y chlapcami,

$$\begin{array}{l}
 x - 1 \dots\dots y - 1 \dots \\
 x - 2 \dots\dots y - 2 \dots \\
 \vdots
 \end{array}$$

prvé dievča tancovalo s $y - (x - 1)$ chlapcami.

Usudzujeme, že $y - (x - 1) = y - x + 1 = 7$.

Vyriešime sústavu rovníc: $y - x = 6$; $x + y = 20$

Dostaneme $y = 13$ a $x = 7$.

Na večierku bolo teda 7 dievčat a 13 chlapcov.

Svedomitý postup pri zoznámení sa so zadaním úlohy nám priniesol požadovaný výsledok.

Stručné spomienky na matematikov (5. ukážka)

Obdivoval usporiadanie čísel do magických štvorcov. V geometrii vytušil nové možnosti využívaním súradníc. Vybadal spojenie medzi úlohami na určovanie dotyčníc. Bol právnikom, matematiku sledoval ako záfubu. *Pierre Fermat* (20. 8. 1601 – 12. 1. 1665), francúzsky sudca, do dejín matematiky sa zapísal svojou domnienkou, ktorá prežila bez dôkazu celé storočia (Fermatovu vetu dokázal *A. Wiles*, 1993 – 94). Napĺňa sa jeho predpoveď: „*Mnohí budú prichádzať a odchádzať, ale veda sa bude stále obohacovať.*“ Jeho korešpondencia s B. Pascalom sa zapísala do základov teórie pravdepodobnosti.

Prvá profesorka matematiky v Európe prednášala na univerzite v Štokholme (od 1884). „*Medzi všetkými vedami, ktoré odkrývajú ľudstvu cestu k poznaniu zákonov prírody, najmohutnejšia a najvznešenejšia je matematika.*“ *Sofia Vasiljevna Kovalevská* (15. 1. 1850 – 10. 2. 1891), ruská matematická, vytvorila znamenité štúdie v teórii diferenciálnych rovníc a analytickej mechanike. Získala Bordinovu cenu, ocenenia parížskej Akadémie vied, Švédskej akadémie i členstvo v Akadémii vied v Petrohrade. Vynikala matematickou erudiťou, literárnym talentom a ľudskou odvahou. Zvýraznila právo sebauplatnenia žien v oblastiach dovtedy pre nich nedostupných.

Prispel k aritmetizácii matematiky, podal aritmetickú definíciu iracionálnych čísel. *Karl Weierstrass* (31. 10. 1815 – 19. 2. 1897), nemecký matematik, dobudoval základy matematickej analýzy, vytvoril presne zdôvodnenú teóriu eliptických funkcií, ovplyvnil teóriu analytických funkcií i variačný počet. Vedel, že matematika nesmie strácať kontakt s ďalšími vedami. „*Nemožno byť skutočným matematikom a nebyť trochu aj básnikom.*“

Metódy rozvíjania študijnej motivácie (6. ukážka)

Naznačme si tie princípy a postupy zvyšovania motivácie, ako protipríklady pre demotivačné činitele učenia sa (autoritatívny štýl vyučovania, memorovanie, strnulosť a fádnosť vyučovacích metód, málo tvorivosti, ak-

tivity a originality), ktoré môžu byť užitočné pri vyučovaní školskej matematiky:

1. Vyučovanie hrou a dramatizácia aj matematickej činnosti, živé a názorné vyučovanie, rozmanitosť a zmena rytmu.
2. Uplatňovanie princípu sebavyjadrovania žiaka a jeho zodpovednosti za výsledky matematickej práce, zvýraznenie jeho individuality.
3. Zaujímavosť ponúkaných matematických úloh, možnosť primeraného súťaženia a uplatnenia skúseností, vhodné ocenenie úspechu, vytváranie prostredia medziľudskej spolupráce.
4. Problémové alebo programované učenie (tvorba hypotéz, aktivita, spätná väzba, vlastné tempo).
5. Tvorivosť, autentický pocit sebarealizácie, oddelenie produkcie od hodnotenia, cielený rozvoj predstavivosti a zmysluplných asociácií, sústredenosť na prácu a zapojenie celej osobnosti.
6. Individuálny prístup k žiakom, skupinové vyučovanie, rozvíjanie citového vzťahu aj k problémom, rozvoj hodnotiaceho myslenia, hierarchia cieľov, aktuálnosť a užitočnosť získaných poznatkov.
7. Samostatné aktívne individuálne využívanie informačných zdrojov a fondov, uplatňovanie zmysluplnosti a širšieho významu vzdelanosti i matematickej kultúry.

Aj vo vyučovaní školskej matematiky majú nezanedbateľnú úlohu osvedčená motivačné postupy všeobecného didakticko-pedagogického pôsobenia: názornosť, problémový prístup, individuálna starostlivosť, zadanie primerane obtiažnych úloh pre ďalšie samostatné štúdium, pravidelné opakovanie.

Štúdium školskej matematiky má vzbudiť, usmerniť a udržať záujem a schopnosť používať matematický spôsob myslenia a argumentácie v rôznych životných situáciách každodenného ľudského života. Hans Freudenthal, didaktik matematiky, navrhol. „*Umiestnite žiakov do takých situácií, kde budú vo vzťahu s takými reálnymi javmi, ktorých organizačným princípom je určitá matematická štruktúra.*“ Matematická kultúra ľudstva patrí k nenahraditeľnému civilizačnému odkazu nielen prežitia ľudského rodu, ale aj jeho vedecko-technického a technologického rozvoja do informačno-počítačovej spoločnosti 21. storočia. Od dôb Platóna (asi 427–347 pred n. l.) až dodnes prinášajú rozvinuté matematické disciplíny aj podnety duchovno-filozofické a metodologické. „*Matematika je*

ako sila ľudského ducha povolaná nahradiť nám nedokonalosť našich zmyslov i krátky čas nášho života“ (J. B. Fourier, 1768 – 1830). Matematické myslenie je pre nás impulzom aj pre cestu k nekonečnu (potencionálnemu i aktuálnemu).

Výber z didakticko-popularizačnej literatúry (7. ukážka)

Jednou z možností, ako môžu učitelia „počtov a merby“ získať popularizačné a motivačné impulzy, je poznanie vhodných informácií z príslušnej literatúry. Ponúkam stručný výber slovenskej a českej knižnej produkcie z posledného obdobia (od roku 2000):

Anděl, J.: *Matematika náhody*. Praha: Matfyzpress, 2003.

Barrow, J. D.: *Pí na nebesích (O počítání, myšlení a bytí)*. Praha: Mladá fronta, 2000.

Cryan, D. a kol.: *Logika*. Praha: Portál, 2003.

Devlin, K.: *Jazyk matematiky*. Praha: Argo a Dokořán, 2002.

Hejtný, M. – Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001.

Karčíková, L. – Šir, Z.: *Číslo a jeho symbolika od antiky po renesanci*. Brno: CDK, 2003.

Kuřina, F.: *Deset geometrických transformací*. Praha: Prometheus, 2002.

Matoušek, J. – Nešetřil, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Praha: Karolinum, 2000.

Nagel, E. – Newman, J. R.: *Gödelův důkaz*. Brno: VUTIUM, 2003.

Punčochář, M.: *Nedaleko nekonečna*. Praha: Academia, 2004.

Rektorys, K.: *Co je a k čemu je vyšší matematika*. Praha: Academia, 2001.

Singh, S.: *Velká Fermatova věta*. Praha: Academia, 2000.

Smullyan, R.: *Naveky nerozhodnuto*. Praha: Academia, 2003.

Smullyan, R.: *Šeherezádiny hádanky a další podivuhodné úlohy*. Praha: Portál, 2004.

Quine, W. V.: *Od stimulu k vědě*. Praha: Filozofia, 2002.

Vopěnka, P.: *Uhelný kámen evropské vzdělanosti a moci (Souborné vydání rozprav o geometrii)*. Praha: Práh, 2000.

Vopěnka, P.: *Vyprávění o kráse novobaroční matematiky*. Praha: Práh, 2004.

Úžitok i zážitok z výbavy

Odporúčam zodpovedným učiteľom matematiky, aby si spracúvali a dopĺňali svoju osobnú motivačno-didaktickú výbavu a práve ňou charakte-

rizovali svoj spôsob práce, zameranie pedagogickej činnosti a zvýrazňovali ponúkané priority. Čas strávený pri výbere podnetných zložiek pestrej a rôznorodej motivačno-didaktickej výbavy určite nebude zbytočný, zúžitkuje sa v plnohodnotnej informačnej komunikácii so študentmi.

Ohlédnutí za krajskými koly 54. ročníku MO

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Jednota českých matematiků a fyziků vydává ve spolupráci s Ústřední komisí MO brožury jednotlivých ročníků matematické olympiády. Tyto tradičně obsahují zprávu o průběhu soutěže v kategoriích A, B, C a P, seznam nejlepších řešitelů, texty a řešení všech úloh, zprávu o příslušném ročníku MMO a další údaje. Mnohého čtenáře by asi zajímala i celková úspěšnost v řešení jednotlivých úloh, co bylo pro studenty příliš těžké, s čím si naopak poradili snadno apod. Ve snaze najít aspoň částečnou odpověď na tyto otázky jsem požádal předsedy krajských komisí MO o poskytnutí potřebných údajů. Na základě informací získaných z jedenácti krajů jsem se pokusil vyhodnotit II. (krajská) kola v kategoriích A, B a C z hlediska obtížnosti úloh a přístupu studentů k jejich řešení. Vzhledem k rozsahu příspěvku neuvádíme texty úloh, ani jejich úplné řešení. Ty najde čtenář v [1] nebo [2].

Připomeňme, že účastník druhého kola měl za úkol vyřešit samostatně čtyři úlohy. Za každou z nich získal 6 bodů, pokud ji vyřešil zcela správně. Za chybná řešení mu bylo uděleno méně bodů podle závažnosti chyb v souladu s centrálně vydanými pokyny k hodnocení dané úlohy. Čas, který byl stanoven na řešení úloh činil 4 hodiny.

Podívejme se nejprve na kategorii C, jež je určena studentům 1. ročníků čtyřletých SŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Z tabulky 1 je patrné, že nejlepších výsledků soutěžící dosáhli v úloze C–II–1,

Tabulka 1: Relativní četnosti řešitelů podle počtu získaných bodů pro kategorii C – počet řešitelů: 439

Počet získaných bodů	C-II-1	C-II-2	C-II-3	C-II-4
0 nebo neřešili	0,27	0,29	0,19	0,60
1 – 2	0,18	0,41	0,37	0,07
3 – 4	0,17	0,13	0,31	0,19
5 – 6	0,38	0,18	0,13	0,14

tj. v 1. úloze. Dokonce to byla nejúspěšnější úloha ze všech tří kategorií. Žáci měli určit číslice x , y a z (desítkové soustavy) tak, aby platila rovnost

$$\frac{x+y}{z} = \overline{z, yx},$$

kde pravá strana rovnice představuje zápis čísla (v desítkové soustavě) složené ze z jednotek, y desetin a x setin. Řešitelé většinou rovnici správně přepsali na tvar

$$\frac{x+y}{z} = z + \frac{y}{10} + \frac{x}{100},$$

kterou řešili postupným dosazováním možných číslic. Po úpravě lze však vhodným odhadem zjistit, že $z \in \{1, 2, 3, 4\}$, viz vzorové řešení v [1] nebo [2]). Nejhuře naopak dopadly obě geometrické úlohy C-II-3 a C-II-4. Ve druhé z nich dokonce 60 % řešitelů nezískalo ani bod, přestože šlo o celkem snadnou konstrukční úlohu. Úkolem bylo sestrojit lichoběžník vepsaný do kružnice o poloměru 5 cm, je-li dána vzdálenost $d = 2$ cm jejího středu S od průsečíku P úhlopříček lichoběžníku a dále $|\angle BAC| = 70^\circ$. Čtenář jistě snadno zjistí, že stačí sestrojit úsečku SP , kružnici k se středem S a poloměrem 5 cm a přímky p, q , které procházejí bodem P a mají současně od úsečky SP odchylku 20° . Průsečíky těchto přímek s kružnicí k jsou vrcholy lichoběžníku.

Jak uvidíme dále, jsou geometrické úlohy pro studenty opravdu velkým problémem a mělo by se jim na školách věnovat více pozornosti. Přesto mám pocit, že výsledky úlohy ovlivnila nevhodná formulace zadání a pokyny k hodnocení. Zadání totiž začínalo slovy: „Popište konstrukci lichoběžníku...“. Mnozí studenti opravdu uvedli jen slovní popis konstrukce

bez obrázku a bez zdůvodnění. Za to však podle pokynů hodnocení mohli získat nejvýše tři body, neboť se mělo snížit bodové hodnocení o 1 bod, pokud neurčili počet řešení, a další 2 body, když nezdůvodnili, že body S , P leží na ose základny lichoběžníku. V tabulce 1 dobře vidíme, jak se to projevilo na výsledcích. Jedna třetina řešitelů získala aspoň 3 body, což není tak špatný výsledek ve srovnání s nejtěžšími úlohami ostatních kategorií.

V úloze C–II–3 byly zadány tři dílčí důkazové úkoly z planimetrie obdélníku. Za vyřešení každého z nich mohl žák získat maximálně 2 body. První úkol byl snadný, k jeho vyřešení stačila znalost střídavých a vrcholových úhlů. Druhé dva úkoly byly náročnější. Díky těmto okolnostem získalo 37 % soutěžících 1–2 body, zhruba 19 % ani jeden bod a 31 % aspoň 3 body. Podobné, ale znatelně horší, bylo rozložení úspěšnosti v úloze C–II–2, která vedla, podobně jako úloha C–II–1, na diofantickou rovnici. Cesta ke správnému výsledku však zde vyžadovala více důvtipu.

V kategorii B (studenti druhých ročníků čtyřletých SŠ a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií) byly opět podstatně horší výsledky v geometrických úlohách B–II–1 a B–II–3. První z nich byla výpočetní, na využití Pythagorovy věty, a týkala vzájemné polohy kružnic. Velmi podobná, ale poněkud těžší úloha byla zadána již v domácím kole. Očekávali jsme proto poměrně vysokou úspěšnost, a tak jsme ji zařadili jako první z předpokládané čtveřice. Opak byl pravdou: 69 % získalo nejvýše dva body. Většina z nich získala 1–2 body, a to jen díky tomu, že za zjištění správné polohy středů dotýkajících se kružnic byl udělen 1 bod. Sestavení potřebných rovnic vyžadovalo objevit v obrázku tři pravoúhlé trojúhelníky (nebo využít kosinovou větu, která však ještě nebyla v běžných hodinách matematiky probírána). K tomu bylo zapotřebí vyznačit v obrázku ostroúhlého trojúhelníka výšku. Ti soutěžící, kteří rovnice sestavili, je většinou také vyřešili, jak naznačuje tabulka 2. Z ní je patrné, že 38 % řešitelů získalo 5–6 bodů. Chybělo zde tedy umění objevit v obrázku potřebné souvislosti. Tentýž nedostatek lze konstatovat u důkazové B–II–3, jejíž řešení vyžadovalo objevit Thaletovy kružnice určené stranou a patami výšek v ostroúhlém trojúhelníku, resp. týmiž patami výšek a úsečkou, jež spojuje třetí vrchol trojúhelníku s jeho ortocentrem. Tato úloha dopadla v kategorii B nejhůře: 67 % studentů nezískalo ani jediný bod a pouze 14 % dosáhlo 5–6 bodů.

Nejúspěšnější byla úloha B–II–4, v níž měli žáci vyřešit rovnice s dolní celou částí reálného čísla x – snad proto, že toto téma se vyskytlo v obou předchozích kolech. Slovní úloha B–II–2, v níž bylo třeba sestavit a vyřešit

soustavu nerovnic, byla druhá nejlépe hodnocená úloha v této kategorii. Máme-li posoudit celou čtveřici, pak je nutno říci, že úlohy byly relativně těžké a příliš se svou obtížností navzájem nelišily: V každé z nich dosáhla více než polovina řešitelů nejvýše dva body.

Tabulka 2: Relativní četnosti řešitelů podle počtu získaných bodů pro kategorii B – počet řešitelů: 281

Počet získaných bodů	B-II-1	B-II-2	B-II-3	B-II-4
0 nebo neřešili	0,30	0,41	0,67	0,36
1 – 2	0,39	0,20	0,14	0,17
3 – 4	0,04	0,14	0,05	0,09
5 – 6	0,27	0,25	0,14	0,38

Kategorie A je určena studentům SŠ v posledních dvou ročnících studia. Nejlepší řešitelé II. (krajského) kola jsou pozváni k účasti ve III. (ústředním) kole a z vítězů III. kola je pak sestaven tým, který reprezentuje naši republiku na Mezinárodní matematické olympiádě. Vzhledem k těmto okolnostem jsou pro II. a III. kola vybírány podstatně náročnější úlohy než v nižších kategoriích. To se znatelně projevuje i na výsledcích, jak vidíme v tabulce 3. Nejlépe dopadla úloha A-II-1 (důkaz algebraické nerovnosti), v níž sice 55 % řešitelů získalo nejvýše dva body, avšak aspoň pět bodů za její řešení mělo 34 % studentů. To představuje poměrně vysokou úspěšnost ve srovnání s výsledky u ostatních úloh.

Tabulka 3: Relativní četnosti řešitelů podle počtu získaných bodů pro kategorii A – počet řešitelů: 381

Počet získaných bodů	A-II-1	A-II-2	A-II-3	A-II-4
0 nebo neřešili	0,18	0,30	0,64	0,31
1 – 2	0,37	0,37	0,26	0,45
3 – 4	0,10	0,18	0,08	0,14
5 – 6	0,34	0,15	0,02	0,10

Nejtěžší byla opět planimetrická úloha A–II–3, v níž plných 90 % soutěžících nedosáhlo více než dva body, 8 % jich bylo hodnoceno získalo 3–4 body a 2 % pak 5–6 bodů. Byla to úloha na vyšetření množiny bodů v rovině, která byla poměrně dobře řešitelná využitím mocnosti bodu ke kružnici. Ve správném řešení je třeba dokázat jistou vlastnost tečen kružnic, kterou někteří přijali bez důkazu. Další typickou a tradiční chybou, která se vyskytla i zde, je opomenutí důkazu rovnosti hledané množiny a nalezeného geometrického útvaru v obou směrech. Navíc se řešitelé často spokojovali s nalezením jednoho oblouku kružnice navzdory tomu, že hledaná množina obsahovala oblouky dva. Úloha A–II–2 vyžadovala řešit soustavu tří kvadratických rovnic o třech neznámých. Co do obtížnosti je podle tabulky 3 srovnatelná (avšak trochu snazší) s úlohou A–II–4 (nalezení dvojic přirozených čísel s danými vlastnostmi). V obou je relativní četnost dosažení nejvýše dvou bodů kolem 70 %. Výsledku 5–6 bodů dosáhlo přitom 15 % řešitelů v úloze A–II–2 a 10 % řešitelů v úloze A–II–4.

Závěrem bych rád zdůraznil, že cílem tohoto příspěvku nebylo srovnání výsledků mezi kraji. To by nemělo smysl provádět již z toho důvodu, že individuální kritéria opravujících se mohou lišit, někdy i výrazněji. Chtěli jsme zjistit, jak obtížné se jevíly jednotlivé úlohy i soutěžní kola v rámci celé republiky. Z uvedené analýzy je patrné, že výrazně nejhorších výsledků bylo dosaženo v geometrických úlohách. To je bohužel trvalý jev. Syntetická geometrie je dnes ve výuce matematiky okrajovou záležitostí, a tak naši studenti neumí (až na řídké výjimky) provádět rozboru a diskuse konstrukčních úloh, ani vyšetřovat množiny bodů daných vlastností. Rovněž mají s velké potíže s důkazovými geometrickými úlohami.

L i t e r a t u r a

- [1] *Horák, K. a kol.*: 54. ročník matematické olympiády na středních školách. JČMF, Praha 2006, ISBN 80-7015-109-9.
- [2] <http://www.math.muni.cz/rvmo/>

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 133 a 134, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle tohoto (16.) ročníku našeho časopisu.

V minulém čísle našeho časopisu byly v této rubrice uvedeny dvě nové úlohy. Tiskařský šotek jim však místo správných čísel **137** a **138** přiřadil čísla 135 a 136. Za tuto chybu se čtenářům velmi omlouváme.

Úloha 133

Dokažte, že v desetinném rozvoji čísla $a = 0,0999^{999}$ je za desetinnou čárkou (před první platnou číslicí) právě 999 nul.

Stanislav Trávníček

Řešení:

Nechť $b = 0,999^{999}$, potom $a = 10^{-999}b$. Důkaz tvrzení dané úlohy je ekvivalentní s ověřením nerovností $0,1 < b < 1$. Nerovnost $b < 1$ je přitom zřejmá. Položme nyní

$$x_i = \frac{\binom{999}{i}}{1000^i}.$$

Zřejmě platí $x_2 = \frac{999 \cdot 998}{2 \cdot 1000^2} > \frac{1}{3}$ a $x_3 = \frac{999 \cdot 998 \cdot 997}{6 \cdot 1000^3} < \frac{1}{6}$. Pro $i \in \{0, 1, \dots, 998\}$ dostaneme

$$0 < \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{\frac{999!}{(i+1)!(998-i)!1000^{i+1}}}{\frac{999!}{i!(999-i)!1000^i}} = \frac{999-i}{1000(i+1)} < 1,$$

tedy (x_i) je klesající posloupnost kladných čísel. Podle binomické věty platí

$$b = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{999} = x_0 - x_1 + x_2 - \dots - x_{999}.$$

V následujícím výrazu jsou všechny výrazy v závorkách kladné, platí proto

$$b = (x_0 - x_1) + (x_2 - x_3) + \dots + (x_{998} - x_{999}) > x_2 - x_3 > \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} > 0,1.$$

Odtud již plyne, že v desetinném rozvoji čísla a je za desetinnou čárkou (před první platnou číslicí) právě 999 nul.

Jiné řešení:

Platí

$$-1,0005 < \log 0,0999 < -1.$$

Vynásobením jednotlivých členů v těchto nerovnostech kladným číslem 999 dostaneme nerovnost

$$-999,5 < 999 \cdot (-1,0005) < \log a < -999.$$

Odtud již plyne, že v desetinném rozvoji čísla a je za desetinnou čárkou (před první platnou číslicí) právě 999 nul.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Tomáš Javůrek* z G v Jeseníku, *Vít Orava* z GMK v Bílovci a *Zbyněk Konečný* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše.

Neúplné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Tomáš Jeziorský* z GMK v Bílovci.

Úloha 134

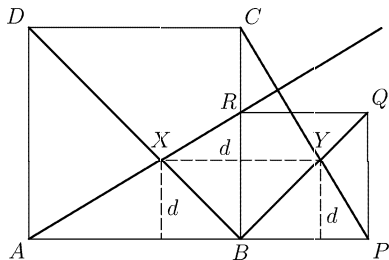
Nechť bod R leží na straně BC čtverce $ABCD$. Uvažujme dále čtverec $BPQR$, jehož vrchol P je bod polopřímky opačné k polopřímce BA . Nechť X je průsečík přímek AR a BD a Y průsečík přímek BQ a PC .

- Dokažte, že přímky AR a PC jsou navzájem kolmé.
- Dokažte, že přímky XY a AB jsou rovnoběžné.

Gottfried Perz (Graz)

Řešení:

Uvažujme otočení O kolem středu B o orientovaný pravý úhel RBP . Body A a R se v tomto otočení zobrazí po řadě na body C a P . Obrazem přímky AR je tedy přímka CP , proto jsou obě navzájem kolmé.



Oba úhly DBC a CBQ mají velikost 45° , proto obrazem přímky BD v otočení O je přímka BQ . Průsečík Y přímek BQ a PC je tedy v tomto otočení obrazem X průsečíku přímek AR a BD . Jelikož X je bodem osy úhlu ABC , má bod X stejnou vzdálenost d od obou jeho ramen BA a BC . Bod Y má tudíž stejnou vzdálenost d od přímky BP (tedy AB). Tím jsme ukázali, že přímka XY je rovnoběžná s přímkou AB .

Správné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Jiří Steckbauer* z Květné, *Vladimír Žůrek* z Olomouce, *Hana Bendová* z G v České Lípě, *Tomáš Jeziorský*, *Miroslav Klimoš*, a *Miroslav Štufka*, všichni z GMK v Bílovci, *Zbyněk Konečný*, *Samuel Říha*, *Jiří Řihák* a *Hana Šormová* všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Korbel* z G v Jihlavě, *Jana Medková* z G v Brně, Křenová a *Tomáš Princ* z WG v Ostravě-Porubě.

(*Pavel Calábek*)

58. ročník MO v Polsku

Matematická olympiáda v Polsku patří k nejstarším předmětovým soutěžím na světě. Má o dva roky delší tradici než naše MO; ve školním roce 2006/07 probíhá již její 58. ročník. Na rozdíl od naší MO řeší však všichni polští středoškoláci stejné úlohy – v polské MO tedy neexistují věkové kategorie. Pro naše čtenáře uvádíme na ukázkou dvě ze šesti úloh, které byly předloženy (koncem letošního února) soutěžícím II. kola 58. ročníku MO v Polsku.

1. Nechť $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Mají-li rovnice $P(x) = 0$ a $P(P(P(x))) = 0$ společný reálný kořen, pak mají společný celočíselný kořen. Dokažte.
2. Jsou-li a, b, c, d přirozená čísla, pro něž platí $ad = b^2 + bc + c^2$, je číslo $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

složené. Dokažte.

(*Jaroslav Švrček*)