

MATEMATIKA

O využití jedné algebraické nerovnosti

ŠEFKET ARSLANAGIĆ^{*)}

Prirodno–matematički fakultet, Univerzita Sarajevo, BOSNA a HERCEGOVINA

Tento článek navazuje na příspěvek [1], který byl v našem časopise zveřejněn před čtyřmi lety. Zde bude prezentováno využití jedné algebraické nerovnosti v důkazech některých netriviálních geometrických nerovností.

Věta 1

Pro libovolná tři kladná reálná čísla a, b, c , jejichž součin je roven 1, platí nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c. \quad (1)$$

Důkaz. Vynásobíme-li obě strany nerovnosti (1) kladným číslem abc , dostaneme po úpravě ekvivalentní nerovnost

$$a^2c + ab^2 + bc^2 \geq a + b + c. \quad (2)$$

Trojím použitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (dále jen AG-nerovnosti) vždy pro trojici kladných reálných čísel a dále využitím podmínky $abc = 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} 3(a^2c + ab^2 + bc^2) &= (a^2c + a^2c + ab^2) + (ab^2 + ab^2 + bc^2) + (bc^2c + bc^2 + a^2c) \geq \\ &\geq 3\sqrt[3]{a^5b^2c^2} + 3\sqrt[3]{a^2b^5c^2} + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^5} = \end{aligned}$$

^{*)} Psáno pro MFI. Z německého originálu přeložil Filip Švrček.

$$= 3 \left(a \sqrt[3]{(abc)^2} + b \sqrt[3]{(abc)^2} + c \sqrt[3]{(abc)^2} \right) = 3(a + b + c),$$

tedy

$$a^2c + ab^2 + bc^2 \geq a + b + c.$$

Dokázali jsme tak platnost nerovnosti (2), která je ekvivalentní s (1). V nerovnosti (1) přitom nastane rovnost (na základě použité AG–nerovnosti), právě když platí $a = b = c = 1$.

Jiný důkaz. Nejprve ukážeme, že pro libovolná kladná reálná čísla u, v, w platí nerovnost

$$u^3 + v^3 + w^3 \geq u^2v + v^2w + w^2u. \quad (3)$$

Opět trojným použitím AG–nerovnosti (vždy) pro trojici kladných reálných čísel dostaneme

$$\begin{aligned} 3(u^3 + v^3 + w^3) &= (u^3 + u^3 + v^3) + (v^3 + v^3 + w^3) + (w^3 + w^3 + u^3) \geq \\ &\geq 3\sqrt[3]{u^6v^3} + 3\sqrt[3]{v^6w^3} + 3\sqrt[3]{w^6u^3} = 3(u^2v + v^2w + w^2u), \end{aligned}$$

tj.

$$u^3 + v^3 + w^3 \geq u^2v + v^2w + w^2u.$$

Tím je nerovnost (3) dokázána. Vynásobíme-li nyní obě strany nerovnosti (3) kladným číslem $\frac{1}{uvw}$, dostaneme nerovnost

$$\frac{u^2}{vw} + \frac{v^2}{wu} + \frac{w^2}{uv} \geq \frac{u}{w} + \frac{v}{u} + \frac{w}{v}, \quad (4)$$

která je s nerovností (3) ekvivalentní. Položíme-li v nerovnosti (4) dále $a = \frac{u}{w}$, $b = \frac{v}{u}$ a $c = \frac{w}{v}$ ($abc = 1$), obdržíme po úpravě

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c,$$

což jsme chtěli dokázat.

Věta 2

Pro libovolná kladná reálná čísla x, y, z platí nerovnost

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x + y + z}{\sqrt[3]{xyz}}, \quad (5)$$

příčemž rovnost zde nastane, právě když $x = y = z$.

Důkaz. Položíme-li v (5)

$$a = \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}, \quad b = \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}}, \quad c = \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}},$$

splňuje trojice kladných reálných čísel a, b, c podmínku $abc = 1$. Užitím nerovnosti (1) pak bezprostředně obdržíme žádanou nerovnost (5). Lze tedy nerovnost (5) v tomto smyslu považovat za důsledek platnosti (1). Podle věty 1 rovnost zde nastává, právě když $a = b = c$, tj. právě když $x = y = z$.

Jiný důkaz. Trojím použitím AG-nerovnosti (podobně jako v důkazu věty 1) pro příslušné trojice kladných reálných čísel dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{y}{z} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} \right) \geq \\ &\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{zx}} + \sqrt[3]{\frac{z^2}{xy}} = \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}} = \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

V další části budou uvedeny některé aplikace nerovnosti (5), a to především v souvislosti s důkazy čtyř geometrických nerovností.

Příklad 1

Nechť a, b, c jsou délky stran trojúhelníku. Označme $2s = a+b+c$, r poloměr kružnice jemu opsané a ρ poloměr kružnice jemu vepsané. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \sqrt[3]{\frac{2s^2}{r\rho}}. \quad (8)$$

Řešení. Položíme-li v nerovnosti (5) $x = a$, $y = b$ a $z = c$, dostaneme

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Protože pro obsah P uvažovaného trojúhelníku platí vztahy $P = s\rho$, $abc = 4rP$ a dále $2s = a + b + c$, obdržíme z předešlé nerovnoposti po snadné úpravě přímo žádanou nerovnost, tj. platí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{4r\rho s}} = \sqrt[3]{\frac{2s^2}{r\rho}}.$$

Rovnost zde přitom nastane, právě když $a = b = c$, tj. v případě, kdy uvažovaný trojúhelník je rovnostranný.

Příklad 2

Dokažte, že pro délky stran v libovolném trojúhelníku platí nerovnost

$$\frac{b+c-a}{a+c-b} + \frac{c+a-b}{a+b-c} + \frac{a+b-c}{b+c-a} \geq \frac{s}{\sqrt[3]{\rho^2 s}}, \quad (9)$$

kde $2s = a + b + c$.

Řešení. Položme v nerovnosti (5) $x = s - a$, $y = s - b$ a $z = s - c$. Dostaneme tak nerovnost

$$\frac{s-a}{s-b} + \frac{s-b}{s-c} + \frac{s-c}{s-a} \geq \frac{3s - (a+b+c)}{\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Užitím Heronova vzorce pro obsah P libovolného trojúhelníku, tj. vztahu

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

máme dále

$$\frac{b+c-a}{a+c-b} + \frac{c+a-b}{a+b-c} + \frac{a+b-c}{b+c-a} \geq \frac{s}{\sqrt[3]{\frac{P^2}{s}}}.$$

Dosadíme-li nyní za $P = \rho s$, obdržíme po jednoduché úpravě dokazovanou nerovnost (9). Rovnost v ní nastane, právě když $a = b = c$, tedy právě když je uvažovaný trojúhelník rovnostranný.

Příklad 3

V libovolném trojúhelníku (při zavedeném označení) platí nerovnost

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{s^2 + \rho^2 + 4r\rho}{2\sqrt[3]{2s^2r^2\rho^2}}. \quad (10)$$

Řešení. Položíme-li nyní v (5) $x = v_a = \frac{2P}{a}$, $y = v_b = \frac{2P}{b}$ a $z = v_c = \frac{2P}{c}$, kde v_a, v_b, v_c značí délky výšek po řadě z vrcholů A, B, C , dostaneme

$$\frac{\frac{2P}{a}}{\frac{2P}{b}} + \frac{\frac{2P}{b}}{\frac{2P}{c}} + \frac{\frac{2P}{c}}{\frac{2P}{a}} \geq \frac{2P \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}{\sqrt[3]{\frac{8P^3}{abc}}}.$$

Postupnými úpravami této nerovnosti dále dostaneme

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}}$$

a

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{ab + bc + ca}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}.$$

Využitím identit $ab + bc + ca = s^2 + \rho^2 + 4r\rho$ (viz např. [1] nebo [4]) a $abc = 4r\rho s$ po úpravě konečně obdržíme

$$\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{s^2 + \rho^2 + 4r\rho}{2\sqrt[3]{2s^2r^2\rho^2}},$$

tedy dokazovanou nerovnost (10). Rovnost zde nastane, právě když $a = b = c$, tedy pro rovnostranný trojúhelník.

Příklad 4

Dokažte, že v libovolném ostroúhlém trojúhelníku (při obvyklém označení jeho vnitřních úhlů) platí nerovnost

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} \geq \frac{2(r + \rho)}{\sqrt[3]{2r(s^2 - (2r + \rho)^2)}}. \quad (11)$$

Řešení. Volbou $x = \cos \alpha > 0$, $y = \cos \beta > 0$ a $z = \cos \gamma > 0$ v nerovnosti (5) dostaneme

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} \geq \frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{\sqrt[3]{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}}.$$

Užitím identit

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r + \rho}{r}$$

a

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{s^2 - (2r + \rho)^2}{4r^2}$$

(viz [4]) obdržíme po úpravě předchozí nerovnosti

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} \geq \frac{\frac{r + \rho}{r}}{\sqrt[3]{\frac{s^2 - (2r + \rho)^2}{4r^2}}}.$$

Odtud po jednoduché úpravě bezprostředně plyne

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} + \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} \geq \frac{2(r + \rho)}{\sqrt[3]{2r(s^2 - (2r + \rho)^2)}},$$

což je dokazovaná nerovnost (11). Rovnost v ní nastane, právě když $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, tj. právě když trojúhelník je rovnostranný.

L i t e r a t u r a

- [1] *Arslanagić, Š.*: Pět důkazů jedné algebraické nerovnosti. MFI, roč. 12, 2002/03, č. 9, s. 513 – 516.
- [2] *Arslanagić, Š.*: Ungleichungen für ebene Dreiecke (I, II). $\sqrt{\text{Wurzel}}$, Heft 8/99, s. 170 – 173.
- [3] *Arslanagić, Š.*: Matematika za nadarene. Bosanska riječ, Sarajevo 2004; SCT Publishing, Singapore 2002.
- [4] *Švrček, J. – Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha 1988.

Mocninné řady a posloupnosti zadané rekurentně

EMIL CALDA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

U posloupnosti zadané rekurentně bývá někdy zapotřebí znát vzorec pro n -tý člen, jehož určení však v některých případech nemusí být jednoduchou záležitostí. S podobnou tematikou se mohou čtenáři (v souvislosti s řešením některých geometrických úloh) podrobněji seznámit např. v [2]. V tomto článku bude při řešení několika úloh uvedena metoda, v níž místo posloupnosti (a_n) reálných čísel zadané rekurentně, jejíž n -tý člen chceme určit, vyšetřujeme mocninou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Její koeficienty a_n , tj. členy dané číselné posloupnosti (a_n) , lze určit postupnými úpravami této řady. (Protože v tomto příspěvku půjde vesměs o nekonečné řady, budeme v sumačním znaku uvádět dále pouze dolní sčítací mez.)

Zdůrazněme, že v této mocninné řadě symbol x neznačí proměnnou, ale že bude považován za formální znak, za který se žádné konkrétní číselné hodnoty nedosazují. Řady tohoto typu se nazývají *formální mocninné řady* a lze o nich dokázat, že vzhledem k obvyklému způsobu sčítání a násobení tvoří *obor integrity* (nad tělesem reálných čísel) a že ke každé takové řadě (pokud má nenulový absolutní člen) existuje inverzní prvek (inverzní řada). S formálními mocninnými řadami pracujeme stejným způsobem jako s mocninnými řadami, v nichž symbol x je proměnná. Na rozdíl od nich však nemá smysl zjišťovat jejich obor konvergence. Např. pro následující formální mocninné řady platí:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1 - x},$$

$$3 - 6x + 12x^2 - 24x^3 + \dots = \frac{3}{1 + 2x}$$

Protože x není proměnná, nelze tvrdit, že první rovnost platí pouze pro všechna x taková, že $|x| < 1$ a druhá „jen“ pro všechna x taková, že $|x| < \frac{1}{2}$.

Výše zmíněnou metodu si objasníme při řešení následujících tří úloh.

Příklad 1

Určete n -tý člen posloupnosti dané rekurentním vztahem

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad \text{pro všechna } n > 1, \quad \text{kde } a_0 = a_1 = 1.$$

Řešení. Uvažujme mocninnou řadu (čtenář by měl pozorně sledovat a uvědomovat si jednotlivé kroky)

$$\sum_{n=0} a_n x^n,$$

kterou za podmínek kladených na její koeficienty a_n upravíme na tvar:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2} (a_{n-1} + 2a_{n-2}) x^n = \\ &= 1 + x + x \sum_{n=2} a_{n-1} x^{n-1} + 2x^2 \sum_{n=2} x^{n-2} = \\ &= 1 + x + x \sum_{n=1} a_n x^n + 2x^2 \sum_{n=0} a_n x^n = \\ &= 1 + x + x(-1 + \sum_{n=0} a_n x^n) + 2x^2 \sum_{n=0} a_n x^n. \end{aligned}$$

Po úpravě odtud dostaneme

$$(2x^2 + x - 1) \sum_{n=0} a_n x^n = -1,$$

tj.

$$\sum_{n=0} a_n x^n = -\frac{1}{2x^2 + x - 1}.$$

Vyjádříme-li výraz na pravé straně poslední rovnosti ve tvaru

$$-\frac{1}{2x^2 + x - 1} = \frac{1}{(2x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

a určíme-li odtud metodou neurčitých koeficientů hodnoty A a B , tj.

$$A = -\frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{3},$$

zjistíme, že daná mocninná řada je součtem dvou geometrických řad, tj. že platí:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0} a_n x^n &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2x - 1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1} = \\ &= \frac{2}{3} \sum_{n=0} 2^n x^n + \frac{1}{3} \sum_{n=0} (-1)^n x^n = \sum_{n=0} \left[\frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n \right] x^n. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů takto získané mocninné řady s koeficienty odpovídající mocninné řady $\sum a_n x^n$ zjistíme, že pro n -tý člen posloupnosti (a_n) platí

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Poznámka. Rekurentní vztah, který jsme v této úloze použili, byl odvozen při řešení kombinatorické úlohy v [1]. Úkolem bylo určit, kolika způsoby se na n parkovacích místech dají rozmístit osobní auta (každé zabere jedno parkovací místo), autobusy (každý zabere dvě parkovací místa) a nákladní auta (každé zabere také dvě parkovací místa). Pro posloupnost, jejíž n -tý člen $p(n)$ udává, kolik existuje takových rozmístění, byl v [1] odvozen rekurentní vztah

$$p(n) = p(n - 1) + 2p(n - 2), \quad p(1) = 1, \quad p(2) = 3.$$

Jestliže místo $p(n)$ budeme psát a_n , bude $a_1 = 1, a_2 = 3$. Pokud nyní z podmínky $a_2 = a_1 + 2a_0$ vypočteme $a_0 = 1$, dostaneme číselnou posloupnost (a_n) , jejíž n -tý člen jsme určili v řešení příkladu 1.

Příklad 2

Určete n -tý člen posloupnosti (a_n) zadané rekurentním vztahem

$$a_n - 3a_{n-1} = 3 \cdot 2^n \quad \text{pro všechna } n \text{ přirozená, kde } a_0 = -1.$$

Řešení. Postupujeme podobně jako v předchozím případě. Platí

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0} a_n x^n &= -1 + \sum_{n=1} (3a_{n-1} + 3 \cdot 2^n) x^n = \\
 &= -1 + 3x \sum_{n=1} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1} 3 \cdot 2^n x^n = \\
 &= -1 + 3x \sum_{n=0} a_n x^n - 3 + \sum_{n=0} 3 \cdot 2^n x^n = \\
 &= -4 + 3x \sum_{n=0} a_n x^n + \frac{3}{1-2x}.
 \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$(1-3x) \sum_{n=0} a_n x^n = -4 + \frac{3}{1-2x},$$

a tedy

$$\sum_{n=0} a_n x^n = -\frac{4}{1-3x} + \frac{3}{(1-2x)(1-3x)}.$$

Rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$\frac{3}{(1-2x)(1-3x)} = -\frac{6}{1-2x} + \frac{9}{1-3x},$$

takže máme

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0} a_n x^n &= \frac{5}{1-3x} - \frac{6}{1-2x} = \sum_{n=0} 5 \cdot 3^n x^n - \sum_{n=0} 6 \cdot 2^n x^n = \\
 &= \sum_{n=0} (5 \cdot 3^n - 6 \cdot 2^n) x^n.
 \end{aligned}$$

Zjistili jsme tak, že pro n -tý člen dané posloupnosti platí

$$a_n = 5 \cdot 3^n - 6 \cdot 2^n.$$

Příklad 3

Určete n -tý člen Fibonacciho posloupnosti, tj posloupnosti (a_n) zadané rekurentním vztahem

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{pro všechna přirozená } n > 1, \text{ kde } a_0 = a_1 = 1.$$

Řešení. Odpovídající mocninnou řadu nejprve upravíme užitím daného rekurentního vztahu

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0} a_n x^n &= 1 + x + \sum_{n=2} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n = \\
 &= 1 + x + x \sum_{n=2} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2} a_{n-2} x^{n-2} = \\
 &= 1 + x + x \sum_{n=1} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0} a_n x^n = \\
 &= 1 + x + x \left(-1 + \sum_{n=0} a_n x^n \right) + x^2 \sum_{n=0} a_n x^n = \\
 &= 1 + x \sum_{n=0} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0} a_n x^n .
 \end{aligned}$$

Odtud vypočteme

$$\sum_{n=0} a_n x^n = -\frac{1}{x^2 + x - 1} = -\frac{1}{\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)} .$$

Rozkladem na parciální zlomky a po úpravách (v nichž si musíme dát pozor, abychom neudělali úmyslnou chybu) dojdeme k rovnosti

$$\sum_{n=0} a_n x^n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \sum_{n=0} (1 + \sqrt{5})^{n+1} x^n - \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}} \sum_{n=0} (1 - \sqrt{5})^{n+1} x^n .$$

Sečtením obou řad na pravé straně zjistíme, že pro n -tý člen Fibonacciho posloupnosti platí

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} = \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] .
 \end{aligned}$$

A protože každý člen Fibonacciho posloupnosti je přirozené číslo, je výraz na pravé straně posledního vztahu také přirozené číslo, což na první pohled není zřejmé.

Závěrem si může čtenář užitím popsané metody sám odvodit vzorec pro n -tý člen posloupnosti zadané rekurentně vztahem

$$a_n = 2a_{n-1} + 4^{n-1} \quad \text{pro všechna } n \text{ přirozená, kde } a_0 = 0.$$

[Výsledek: $a_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$]

L i t e r a t u r a

- [1] *Calda, E.*: Řešení kombinatorických úloh nalezením rekurentního vzorce. MFI, roč. 12, 2002/03, č. 8 s. 321 – 326.
- [2] *Calábek, P. – Švrček, J.*: Rekurentní posloupnosti v geometrii. MFI, roč. 12, 2002/03, č. 10, s. 577 – 584.

P í s e m k o v é p ř í k l a d y n a S Š 30

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

První díl seriálu písemkových příkladů vyšel na konci roku 1993 [1] a seriál pokračoval dalších 14 roků až po [2]. Vycházel z toho, že písemky mají ve vyučování matematice své trvalé místo a při jejich sestavování se setkáváme s těmito hlavními problémy:

1. *Aby učitel prozkoušel přesně to, co chce.*
2. *Aby si učitel vyhledal nebo vytvořil dvě rovnocenné, ale přece je různé verze příkladů*, případně tři, pokud tuto třetí chce použít spolu s jinými příklady při opakování před písemkou nebo na domácí úlohu (v posledních čtyřech částech seriálu jsou připraveny vždy 4 verze příkladů, na písemku i na další použití – náhradní písemka, písemka v paralelce apod.).

Dobře vyřešit oba tyto problémy je někdy dost časově náročné a učitel si musí propočítat více příkladů z učebnic a sbírek, než se mu podaří připravit si vhodné rovnocenné verze. Seriál písemkových příkladů proto přicházel na pomoc učitelům matematiky jako materiál pro jejich databázi

písemkových příkladů i jako inspirace pro samostatnou tvorbu příkladů. V zájmu širšího použití byly uváděny zejména základní typy příkladů se střední a nižší obtížností. Autor seriálu čerpal především ze své rozsáhlé soukromé sbírky, kterou postupně vytvořil spolu s *Mgr. L. Trávníčkovou* († 2002). Všechny příklady vznikly jako originální, tj. nebyly převzaty ze žádné učebnice nebo sbírky příkladů (i když samozřejmě jsou jim někdy tématicky blízké) a byly propracovány se záměrem, aby co nejlépe vyřešily výše uvedené dva problémy, aby dobře vycházely a dobře se opravovaly. Všechny úlohy se uplatnily v praxi v různých letech a v různých třídách gymnázia, ale někdy pak byly částečně upraveny právě po zkušenostech s jejich praktickým použitím.

Příklady z jednotlivých tématických celků (TC) byly do našeho seriálu vybírány nahodile co do zaměření i co do obtížnosti, ale s ohledem na předpokládanou hodinovou dotaci těchto celků. Byl volen stručný text použitelný i k zápisu na tabuli. V prostředí třídy lze ovšem některé texty zestručnit a nahradit komentářem učitele, případně text přizpůsobit terminologii, kterou vyučující používá.

Spolu s tímto 30. dílem tak vznikla sbírka s 376 písemkovými příklady. Autor doufá, že svým kolegům, učitelům na školách, pomohl, ale v této fázi se rozhodl, že seriál ukončí – nikoli pro nedostatek materiálu, ale se záměrem inovovat formu pomoci učitelům při přípravě písemek.

TC: Řešení rovnic a nerovnic

1. A | B: V oboru přirozených čísel řešte nerovnici:

$$3x^2 - 4x - 20 \leq 0 \quad \Bigg| \quad 3x^2 + 5x - 28 \leq 0$$

Obsah: Rozklad kvadratického trojčlenu, řešení kvadratické nerovnice v $\mathbb{R}$, řešení v $\mathbb{N}$, resp. v $\mathbb{Z}$.

Výsledky:

A: Kořeny trojčlenu jsou -2 , $\frac{10}{3}$, $P = \{1, 2, 3\}$.

B: Kořeny trojčlenu jsou -4 , $\frac{7}{3}$, $P = \{1, 2\}$.

C | D: V oboru celých čísel řešte nerovnici

$$5x^2 - 9x - 18 < 0 \quad \Bigg| \quad 4x^2 + x - 18 < 0.$$

Výsledky:

C: Kořeny trojčlenu jsou $-\frac{6}{5}$, 3, $P = \{-1, 0, 1, 2\}$.

D: Kořeny trojčlenu jsou $-\frac{9}{4}$, 2, $P = \{-2, -1, 0, 1\}$.

TC: Stereometrie, polohové úlohy

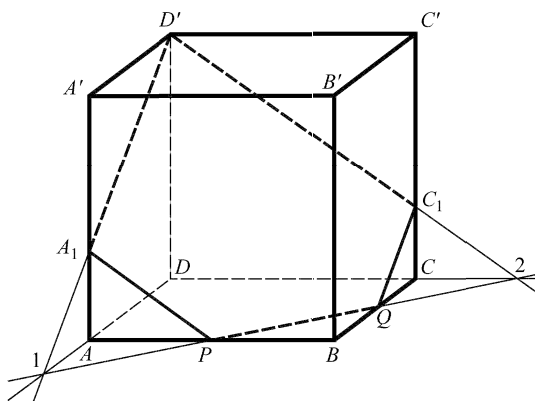
2. A [B]: Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$. Sestrojte řez této krychle rovinou $\varrho = PQD'$ [PQC'], kde P je střed hrany AB a Q je střed hrany BC [AD]. Pak vypište množiny vrcholů krychle, které leží v poloprostorech $\varrho A'$, ϱD .

Obsah: Zobrazení krychle ve volném promítání, řez krychle rovinou, pro-
věrka prostorové představivosti.

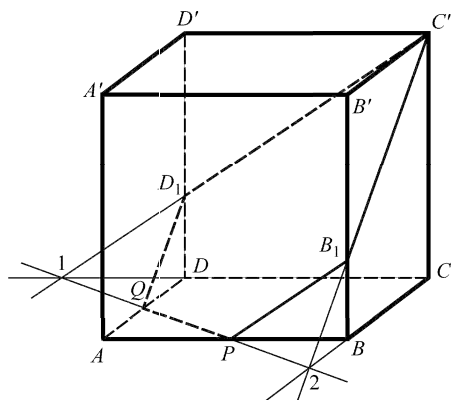
Výsledky:

A: poloprostor $\varrho A'$: $\{A, B, B', C', D'\}$, poloprostor ϱD : $\{A, C, D, D'\}$;
obr. 1a.

B: poloprostor $\varrho A'$: $\{A, A', B', C', D'\}$, poloprostor ϱD : $\{B, C, C', D\}$;
obr. 1b.



Obr. 1a



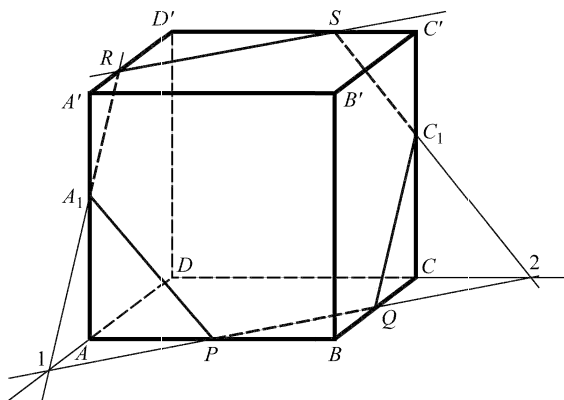
Obr. 1b

C [D]: Je dána krychle $ABCD A' B' C' D'$. Sestrojte řez této krychle rovinou $\varrho = PQR$, kde P je střed hrany AB , Q je střed hrany BC [AD] a R leží na hraně $A' D'$ [$C' D'$] v jedné třetině od bodu A' [C']. Pak vypište množiny vrcholů krychle, které leží v poloprostorech $\varrho A'$, ϱD .

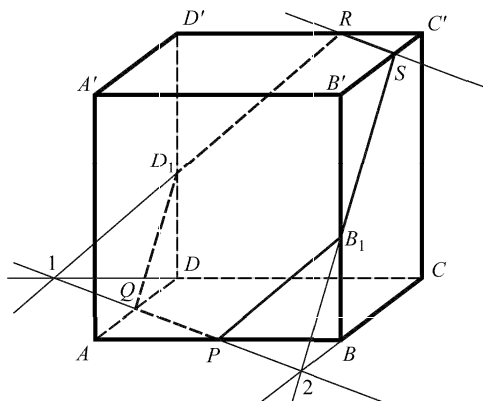
Výsledky:

C: poloprostor $\varrho A'$: $\{A', B, B', C'\}$, poloprostor ϱD : $\{A, C, D, D'\}$; obr. 1c.

D: poloprostor $\varrho A'$: $\{A, A', B', D'\}$, poloprostor ϱD : $\{B, C, C', D\}$; obr. 1d.



Obr. 1c



Obr. 1d

TC: Komplexní čísla

3. A [B]: Užitím Moivreovy věty odvoďte vzorec pro vyjádření $\sin 5\alpha$ [$\cos 5\alpha$] pomocí $\sin \alpha$ [$\cos \alpha$]. Odvozený vzorec ověřte pro $\alpha = 60^\circ$ [$\alpha = 30^\circ$].

Obsah: Moivreova věta, rovnost komplexních čísel, vztahy mezi funkcemi sinus a kosinus, hodnoty funkcí sinus a kosinus.

Výsledky:

A: $\sin 5\alpha = 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha$;

$$L(60^\circ) = \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, P(60^\circ) = 16 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 20 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

B: $\cos 5\alpha = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha$;

$$L(30^\circ) = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, P(30^\circ) = 16 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 - 20 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 5\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

C | [D]: Užitím Moivreovy věty odvoďte vzorec pro vyjádření $\cos 3\alpha$ [$\sin 3\alpha$] pomocí $\cos \alpha$ [$\sin \alpha$]. Odvozený vzorec ověřte pro $\alpha = 30^\circ$, 45° a 60° .

Výsledky:

C: $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$,

$$L(30^\circ) = \cos 90^\circ = 0, P(30^\circ) = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

$$L(45^\circ) = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, P(45^\circ) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - 3 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$L(60^\circ) = \cos 180^\circ = -1, P(60^\circ) = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} = -1.$$

$$D: \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

$$L(30^\circ) = \sin 90^\circ = 1, P(30^\circ) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = 1,$$

$$L(45^\circ) = \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, P(45^\circ) = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$L(60^\circ) = \sin 180^\circ = 0, P(60^\circ) = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = 0.$$

TC: Shrnutí a opakování učiva

4. A[B]: Automat vyrábí každých 90 [120] sekund jednu součástku, pravděpodobnost výroby technologického zmetku je 3 % [2 %]. Jaká je pravděpodobnost toho, že za hodinu práce vzniknou nejvýše 2 zmetky.

Obsah: Pravděpodobnost při n nezávislých pokusech, Bernoulliho schéma, sčítání pravděpodobností, numerické výpočty na kalkulačce.

Výsledky:

$$A: P = 0,97^{40} + 40 \cdot 0,97^{39} \cdot 0,03 + 20 \cdot 39 \cdot 0,97^{38} \cdot 0,03^2 \approx 88,2 \, \%.$$

$$B: P = 0,98^{30} + 30 \cdot 0,98^{29} \cdot 0,02 + 15 \cdot 29 \cdot 0,98^{28} \cdot 0,02^2 \approx 97,8 \, \%.$$

C [D]: Automat vyrábí každých 15 [12] sekund jednu součástku, pravděpodobnost výroby technologického zmetku je 0,3 % [0,2 %]. Jaká je pravděpodobnost toho, že za hodinu práce vzniknou nejvýše 3 zmetky.

Výsledky:

$$C: P = 0,997^{240} + 240 \cdot 0,997^{239} \cdot 0,003 + 120 \cdot 239 \cdot 0,997^{238} \cdot 0,003^2 + 40 \cdot 239 \cdot 238 \cdot 0,997^{237} \cdot 0,003^3 \approx 99,4 \, \%.$$

$$D: P = 0,998^{300} + 300 \cdot 0,998^{299} \cdot 0,002 + 150 \cdot 299 \cdot 0,998^{298} \cdot 0,002^2 + 50 \cdot 299 \cdot 298 \cdot 0,998^{297} \cdot 0,002^3 \approx 99,7 \, \%.$$

Literatura

- [1] Trávníček, S.: Pisemkové příklady na SŠ 1. MFI, roč. 3 (1993 – 94), č. 2.
- [2] Trávníček, S.: Pisemkové příklady na SŠ 29. MFI, roč. 16 (2006 – 07), č. 2.

Turnaj měst v České republice

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Na konci října uplynulého roku proběhla podzimní část (již) 28. ročníku mezinárodní matematické soutěže středoškoláků *Turnaj měst*, jíž se mohou zúčastnit žáci, kteří tak reprezentují svá města. Soutěž, jejíž 1. ročník se uskutečnil na jaře v roce 1980 mezi středoškoláky tří měst (Moskvy, Kijeva a Rigy), má v současnosti celosvětový charakter. Díky grantové podpoře MŠMT ČR, speciálně pak projektu „STM Morava“, měli možnost zúčastnit se této soutěže na podzim uplynulého roku (experimentálně) také talentovaní středoškoláci dvou českých měst – Prahy a Bílovce. Záměrně byla pro potřeby odzkoušení experimentu vybrána dvě města, která se výrazně liší počtem obyvatel. Soutěž má každoročně dvě kola (podzimní a jarní). Podrobnější informace o této soutěži lze najít např. v článku *Alexeje Tolpyga* [1], jednoho ze zakladatelů a dlouhodobých organizátorů této soutěže. Přestože výše zmíněný článek byl uveřejněn v našem časopise před více než deseti lety, nenašel se za tuto dobu v rámci České republiky vhodný organizátor Turnaje měst a nebylo tak možno akceptovat nabídky ruských organizátorů zapojit do této mezinárodně uznávané soutěže také žáky českých středních škol v širším měřítku.

Uvedená soutěž má nejen letitou tradici, ale také vysokou kvalitu v podobě původních netradičních úloh. Na jejich tvorbě se podílejí přední ruští odborníci na práci s matematickými talenty. V průběhu letošního roku (v rámci jarního kola 28. Turnaje měst a podzimního kola 29. Turnaje měst) mají organizátoři zmíněného experimentu na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci zájem rozšířit počet českých měst, která se hodlají soutěže zúčastnit. Své případné dotazy směřujte na mailovou adresu autora tohoto příspěvku – svrcek@inf.upol.cz. V první polovině letošního roku budou vytvořeny také aktuální webovské stránky Turnaje měst v České republice.

Soutěžícím ve dvou kategoriích (JUNIOR – 1. a 2. ročníky našich čtyřletých SŠ a SENIOR – 3. a 4. ročníky našich SŠ, resp. odpovídající ročníky víceletých gymnázií) jsou předloženy v obou kolech (na podzim a na jaře)

vždy dvě sady soutěžních úloh, viz [1] (přípravné úlohy a úlohy hlavní soutěže), v nichž se žákům započítávají vždy 3 nejlépe vyřešené úlohy. Prakticky to znamená, že soutěžící si sami mohou zvolit z nabídnuté sady úloh ty, které jim nejlépe vyhovují. Přitom se však vyžadují od žáků úplná řešení jednotlivých úloh (podobně jako např. v matematické olympiádě). Výsledky žáků nižších ročníků v obou věkových kategoriích a také rozdíly mezi velikostmi zúčastněných měst jsou korelovány podle mezinárodně platných pravidel soutěže, viz např. [1].

V podzimní části Turnaje měst soutěžilo v kategorii JUNIOR v Praze 83 žáků a v Bílovci 19. V kategorii SENIOR pak soutěžilo celkem 46 pražských středoškoláků a 17 bíloveckých. Dlužno zmínit, že v Bílovci se jednalo především o žáky tříd s rozšířenou výukou matematiky tamního gymnázia Mikuláše Koperníka, kdežto v Praze to byli studenti vybraní z většího počtu gymnázií a středních odborných škol. Snažili jsme se přitom dodržet obecná kritéria soutěže, která stanovili ruští organizátoři (na podmínky velkých ruských měst). Do vlastní soutěže mezi městy se tak na podzim započítávaly výsledky nejlepších jedenácti soutěžících v Praze a nejlepších pěti v Bílovci (v každé kategorii), viz např. [1]. Celkový výsledek je pak v každé kategorii stanoven jako aritmetický průměr bodových zisků nejlepších řešitelů v každém městě (a to ve výše uvedeném počtu). Pro informaci uvádíme, že v podzimním běhu dosáhla Praha v kategorii JUNIOR celkového výsledku 6,70 bodů a v kategorii SENIOR 7,27 bodů. Studenti matematických tříd z Bílovce pak v kategorii JUNIOR dosáhli 11,53 bodů a kategorii SENIOR 12,30 bodů.

Na ukázkou uvádíme texty všech *přípravných úloh* Turnaje měst z podzimního kola 28. ročníku soutěže včetně navrženého bodového maxima u jednotlivých úloh v obou věkových kategoriích tak, jak byly předloženy soutěžícím v Praze a Bílovci na podzim 2006.

JUNIOR

1. Na tabuli byla napsána po řadě dvě přirozená čísla x a y ($x \leq y$). Jirka si na list papíru napsal hodnotu x^2 (druhou mocninu prvního čísla) a pak zaměnil čísla na tabuli dvojicí čísel x a $y - x$ (napřed bylo napsáno menší z obou čísel). S novými čísly na tabuli pak provedl stejnou operaci atd., až jedno z čísel na tabuli bylo rovno 0. Určete, jaký byl (v tomto okamžiku) součet všech čísel, která si Jirka napsal na list papíru.

(4 BODY)

2. Je známo, že lháři vždy lžou, pravdomluvní lidé vždy mluví pravdu a vychytralí někdy mluví pravdu a někdy lžou. Můžete jim dávat otázky, na něž je odpověď buď *ano*, nebo *ne* (např.: „Je pravda, že tento člověk je vychytralý?“).

a) Před vámi stojí tři osoby – lhář, pravdomluvný a vychytralý, kteří navzájem znají svou identitu. Popište, jak je rozeznáte pomocí takových otázek.

(1 BOD)

b) Před vámi stojí čtyři osoby – lhář, pravdomluvný a dva vychytralí, kteří navzájem znají svou identitu. Dokažte, že oba vychytralí se mohou dohodnout na svých odpovědích tak, že nejste schopni na základě možných otázek zjistit identitu žádné ze čtyř osob.

(3 BODY)

3. a) Na tabuli je napsáno 2007 přirozených čísel větších než 1. Dokažte, že je možno označit jedno z nich tak, že součin ostatních čísel lze vyjádřit jako rozdíl druhých mocnin dvou přirozených čísel.

(2 BODY)

b) Na tabuli je napsáno 2007 přirozených čísel větších než 1, z nichž jedno je rovno 2006. Je známo, že existuje právě jedno z nich takové, že součin ostatních čísel lze vyjádřit jako rozdíl druhých mocnin dvou přirozených čísel. Dokažte, že je to číslo 2006.

(2 BODY)

4. Na prodloužení strany BC trojúhelníku ABC za bodem B leží bod B_1 takový, že $|BB_1| = |AB|$. Nechť osy vnějších úhlů při vrcholech B a C se protínají v bodě M . Dokažte, že body A, B_1, M a C leží na téže kružnici.

(4 BODY)

5. Určete, na jaký největší počet shodných nekonvexních mnohoúhelníků lze rozřezat čtverec tak, aby všechny strany těchto mnohoúhelníků byly rovnoběžné se stranami čtverce a přitom ani jeden z těchto mnohoúhelníků nevznikne posunutím (translací) jiného z uvažovaných mnohoúhelníků.

(4 BODY)

SENIOR

1. Na tabuli byla napsána tři přirozená čísla x, y, z . Petr si na list papíru napsal hodnotu součinu některých dvou z těchto tří čísel a na tabuli

místo třetího čísla napsal číslo o 1 menší. S novými třemi čísly na tabuli pak provedl stejnou operaci atd., až jedno z čísel na tabuli bylo rovno nule. Určete, jaký byl (v tomto okamžiku) součet všech čísel, která si Petr napsal na list papíru.

(4 BODY)

2. V rovině je dán tečnový čtyřúhelník. Každé dva dotykové body kružnice jemu vepsané, které leží na sousedních stranách daného čtyřúhelníku, jsou spojeny úsečkami. Takto sestrojeným trojúhelníkům jsou vepsány kružnice. Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníku, jehož vrcholy jsou tožné se středy kružnic vepsaných těmto čtyřem trojúhelníkům, jsou navzájem kolmé.

(4 BODY)

3. Do tabulky 2006×2006 jsou napsána čísla $1, 2, 3, \dots, 2006^2$. Dokažte, že v tabulce existují dvě čísla, která jsou vepsána do polí, které mají společnou celou stranu nebo jeden vrchol, taková, že jejich součet je dělitelný číslem 4.

(4 BODY)

4. Jsou dány dvě nekonečné posloupnosti: aritmetická $a_1, a_2, a_3, \dots$ a geometrická $b_1, b_2, b_3, \dots$ takové, že každý člen geometrické posloupnosti je také členem uvažované aritmetické posloupnosti. Dokažte, že kvocient geometrické posloupnosti je celé číslo.

(4 BODY)

5. Rozhodněte, zda je možno vepsat do krychle pravidelný osmistěn tak, aby vrcholy osmistěnu ležely na hranách krychle. (Pravidelný osmistěn má právě 6 vrcholů, z každého přitom vychází 4 hrany a jeho stěnami jsou rovnostranné trojúhelníky.)

(5 BODŮ)

Závěrem připojujeme řešení dvou přípravných úloh 28. Turnaje měst – podzim 2006 (po jedné z každé věkové kategorie), které jsou tematicky velmi příbuzné.

Řešení 1. úlohy (JUNIOR). Po každém kroku se zmenší součin obou čísel, která jsou napsána na tabuli, o hodnotu $x(y - x) = xy - x^2$, tj. o číslo, které si Jirka napsal na list papíru. Protože v posledním kroku je součin obou čísel na tabuli roven 0, je součet všech čísel, která si Jirka postupně zaznamenával na list papíru, roven xy .

Jiné řešení. Uvažujme pravoúhelník o stranách x a y ($x \leq y$). V prvním kroku oddělíme (odřízneme) z tohoto pravoúhelníku čtverec se stranou x a jeho obsah si zaznamenáme na list papíru. Získáme tak pravoúhelník o stranách $y - x$ a x atd. Tento proces je ukončen, jestliže již nelze z daného pravoúhelníku oddělit popsáním způsobem žádný čtverec, tj. je-li daný pravoúhelník úplně rozřezán na čtverce. Součet všech čísel, která jsou v tomto okamžiku napsána na listu papíru, je tedy roven obsahu daného pravoúhelníku, tj. xy .

Řešení 1. úlohy (SENIOR). Všimněme si, že po každém kroku se součin všech tří čísel, která jsou napsána na tabuli, zmenší o hodnotu, kterou si Petr zaznamenal na list papíru. Je-li některé z čísel na tabuli rovno 0, je také jejich součin roven 0. Součet všech čísel, která si Petr postupně zaznamenával na list papíru je tedy roven součinu tří čísel, která byla na počátku napsána na tabuli, tj. xyz .

Jiné řešení. Uvažujme kvádr o hranách délky x, y a z . V každém kroku odřízneme z tohoto kvádrů jiný kvádr, jehož (aspoň) jedna hrana má délku 1. Na list papíru si přitom vždy zaznamenáme objem odříznutého kvádrů (popř. jednotkové krychle). Takto lze postupovat až do okamžiku, kdy je daný kvádr popsáním způsobem úplně rozřezán na menší kvádrů (a popř. ještě několik jednotkových krychlí). Součet všech čísel, které si Petr postupně zaznamenal na list papíru je tedy roven objemu původního kvádrů, tj. xyz .

L i t e r a t u r a

- [1] *Tolpygo, A.*: Turnaj měst – mezinárodní matematická soutěž. MFI, ročník 4, 1994/95, č. 8, s. 349-352.
- [2] *ed. Taylor, P. J.*: Tournament of the Towns 1980 – 1984. Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 1993.
- [3] *ed. Taylor, P. J.*: Tournament of the Towns 1984 – 1989. Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 1992.
- [4] *ed. Taylor, P. J.*: Tournament of the Towns 1989 – 1993. Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 1994.
- [5] *Taylor, P. J. – Storozhev, A. M.*: Tournament of Towns 1993 – 1997 (Book 4). Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 1998.
- [6] *Storozhev, A. M.*: Tournament of Towns 1997 – 2002 (Book 5). Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, 2006.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 5. 2007 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 135

V oboru nezáporných reálných čísel určete všechna řešení soustavy rovnic

$$2x_1 + x_2^2 = x_3^3,$$

$$2x_2 + x_3^2 = x_1^3,$$

$$2x_3 + x_1^2 = x_2^3.$$

Pavel Calábek

Úloha 136

Do daného čtverce $ABCD$ vepište obdélník $KLMN$ tak, aby jeho vrcholy K, L, M, N ležely po řadě na stranách AB, BC, CD, DA uvažovaného čtverce a přitom aby pětiúhelníku $KLCMN$ bylo možno vepsat kružnici (tj. aby byl tečnový).

Jaroslav Švrček