

# MATEMATIKA

## Co, proč a jak ve školské matematice VI

RŮŽENA BLAŽKOVÁ

Pedagogická fakulta MU, Brno

### Násobení a dělení celých čísel

Motivací pro násobení čísel celých ve školské matematice jsou pravidla pro násobení čísel přirozených a další modely pro násobení čísla kladného a záporného. Např. vypůjčím si pětkrát po třech korunách, sčítám pět sčítanců, každý z nich je  $(-3)$ , apod. Jde tedy typově o následující příklady

- $5 \cdot 3 = 15$ ,
- $5 \cdot (-3) = -15$ ,
- $(-3) \cdot 5 = -15$ .

Největším problémem je najít vhodný reálný model pro násobení dvou záporných čísel. Existuje několik různých výukových postupů, které mohou dětem přiblížit skutečnost, že součin dvou záporných čísel je číslo kladné. Jedním takovým je postup, v němž žákům poskytneme instrukci (návod) o násobení celých čísel se stejnými znaménky a s různými znaménky a přejeme si, aby si pravidlo zapamatovali a také je v dalších situacích správně používali. Pokud však máme žáky zvědavé, kteří chtějí vědět, proč např. součin dvou záporných čísel je číslo kladné, můžeme jim tuto skutečnost přiblížit. Připomeňme zde některé z možných postupů.

a) Využijeme tzv. *funkčního myšlení*, kdy sledujeme, jak se mění výsledek operace v závislosti na postupných změnách čísel, s nimiž pracujeme.

- $(-5) \cdot 3 = -15$
- $(-5) \cdot 2 = -10$      výsledek je o 5 větší než v předchozím součinu,
- $(-5) \cdot 1 = -5$      výsledek je o 5 větší než v předchozím součinu,
- $(-5) \cdot 0 = 0$      výsledek je o 5 větší než v předchozím součinu,
- $(-5) \cdot (-1) = ?$

Všimněme si, co jsme tímto postupem sledovali. První činitel se neměnil (byl konstantní, roven hodnotě  $-5$ ), druhý činitel se postupně zmenšoval o číslo 1 a hodnota součinu se tím vždy zvětšila o 5. Budeme-li takto pokračovat dál, vidíme, že součin takto uvažovaných dvojic celých čísel se vždy zvětší o 5, takže

- $(-5) \cdot (-1) = +5$      výsledek je o 5 větší než v případě součinu  $(-5) \cdot 0$ ,
- $(-5) \cdot (-2) = +10$ ,
- $(-5) \cdot (-3) = +15$      atd.

b) Využijeme distributivnosti násobení vzhledem ke sčítání. Děti umí již od 3. ročníku ZŠ „roznásobit“ závorku, takže s touto operací by neměl být větší problém. Dále je třeba si uvědomit (již známou skutečnost), že součet celého čísla a čísla k němu opačného je roven 0, např.  $5 + (-5) = 0$ .

- Vydeme z toho, co již umíme:  $(-3) \cdot 0 = 0$ .
- Činitele 0 můžeme výjádřit jako součet některých dvou opačných čísel, např. tedy  $(-3) \cdot [5 + (-5)] = 0$ .
- Roznásobením pak dostaneme  $(-3) \cdot 5 + (-3) \cdot (-5) = 0$ .
- Součin  $(-3) \cdot 5 = -15$  přitom již umíme vypočítat.
- Platí tedy  $(-15) + ? = 0$ .
- Aby uvedený součet byl roven 0, musí být  $(-3) \cdot (-5) = 15$ .

c) Využijeme násobení čísla 1 a  $-1$ . Násobíme-li celé číslo číslem 1, součin je roven tomuto číslu

$$5 \cdot 1 = 5, \quad (-5) \cdot 1 = -5.$$

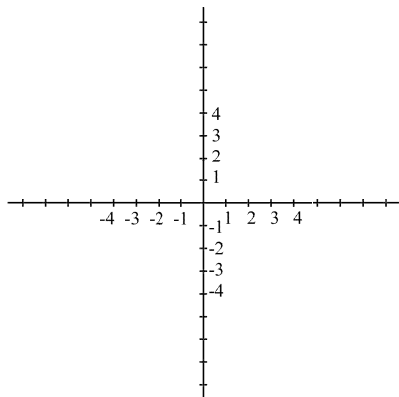
Násobíme-li celé číslo číslem  $-1$ , získáme číslo opačné k tomuto číslu

$$5 \cdot (-1) = -5, \quad (-5) \cdot (-1) = 5.$$

Tuto skutečnost pak můžeme zobecnit (uvedený způsob odvození pravidla pro výpočet součinu dvou záporných čísel však není pro všechny děti dostatečně průkazný, a to především proto, že jeden z činitelů je roven  $-1$ ).

d) Využijeme grafického znázornění. Tato možnost přiblížení součinu dvou celých čísel se opírá o podobnost a práci se souřadnou soustavou, což ještě v 7. ročníku ZŠ zpravidla není probráno, avšak obrázek je pro některé žáky natolik přesvědčivý, že je možné, jako jednu z použitelných možností, jej zde uvést.

Sestrojíme dvě nevzájem kolmé přímky (osy) a na ně znázorníme obrazy celých čísel tak, že obraz prvního činitele znázorňujeme vždy na vodorovné přímce a obraz druhého činitele na přímce svislé (obr. 1).



Obr. 1

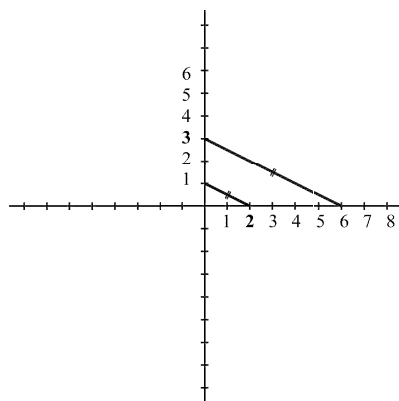
Nyní postupně ukážeme, jak znázorňovat následující součiny:

$$(i) \quad 2 \cdot 3 = 6$$

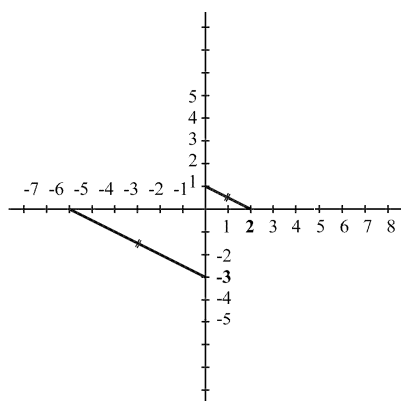
Obraz čísla 2 na vodorovné přímce spojíme s obrazem čísla 1 na svislé přímce a obrazem čísla 3 na svislé přímce vedeme rovnoběžku. Ta prochází obrazem čísla 6 na vodorovné přímce (obr. 2).

$$(ii) \quad 2 \cdot (-3) = -6$$

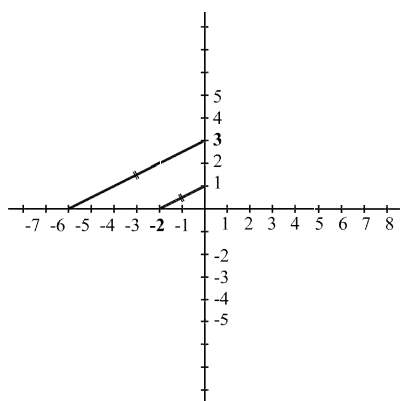
Postupujeme analogicky – obraz čísla 2 spojíme s obrazem čísla 1 a obrazem čísla  $-3$  na svislé přímce vedeme rovnoběžku. Ta prochází obrazem čísla  $-6$  na vodorovné přímce (obr. 3).



Obr. 2



Obr. 3



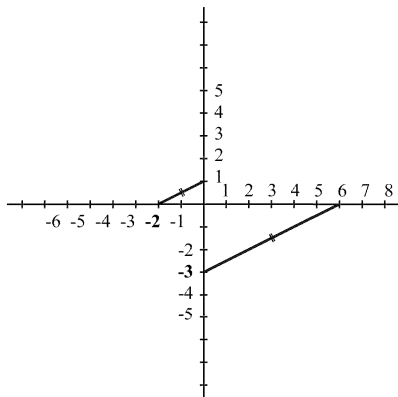
Obr. 4

$$(iii) \quad (-2) \cdot 3 = -6$$

Obraz čísla  $-2$  na vodorovné přímce spojíme s obrazem čísla  $1$  na svislé přímce a obrazem čísla  $3$  na svislé přímce vedeme rovnoběžku. Ta prochází obrazem čísla  $-6$  na vodorovné přímce (obr. 4).

$$(iv) \quad (-2) \cdot (-3) = 6$$

Opět postupujeme stejným způsobem. Obraz čísla  $-2$  na vodorovné přímce spojíme s obrazem čísla  $1$  na svislé přímce a obrazem čísla  $-3$  na svislé přímce vedeme rovnoběžku, která prochází bodem  $6$  na vodorovné přímce (obr. 5).



Obr. 5

e) Při násobení dvou čísel lze využít také absolutní hodnoty celého čísla a součinu absolutních hodnot dvou čísel. Skutečnost, že platí

$$2 \cdot 3 = 6, \quad (-2) \cdot 3 = -6, \quad 2 \cdot (-3) = -6, \quad (-2) \cdot (-3) = 6$$

prezentujeme takto: Nejprve vynásobíme absolutní hodnoty obou činitelů, tj.  $2 \cdot 3 = 6$ , a pak zohledníme následující skutečnosti:

Jsou-li čísla, která násobíme, obě kladná nebo obě záporná, pak hodnota součinu je kladná.

Je-li jeden z činitelů kladný a druhý činitel je záporný, je součin záporný.

Tento poznatek pak můžeme zobecnit na součin většího počtu činitelů a můžeme vyslovit tak následující pravidlo:

*Jestliže násobíme více celočíselných činitelů a v součinu je sudý počet záporných činitelů (popř. žádný činitel není záporný), má jejich součin kladnou hodnotu.*

*Jestliže násobíme více celočíselných činitelů a v součinu je lichý počet záporných činitelů, má součin zápornou hodnotu.*

f) Při vlastní práci se žáky můžeme také využít také metody „práce s chybou“, kdy žákům předložíme různé příklady násobení celých čísel, z nichž některé jsou správné a některé jsou chybné. Žáci pak na základě vlastní úvahy zjišťují, které z uvedených výsledků jsou správné a které ne (a proč).

Např. žákům zadáme následující příklady:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 3 &= 15, & (-5) \cdot 3 &= -15, & 5 \cdot (-3) &= -15, & (-5) \cdot (-3) &= 15, \\ 2 \cdot 8 &= 16, & (-2) \cdot 8 &= -16, & 2 \cdot (-8) &= -16, & (-2) \cdot (-8) &= 16, \\ 6 \cdot 4 &= 24, & (-6) \cdot 4 &= -24, & 6 \cdot (-4) &= -24, & (-6) \cdot (-4) &= 24. \end{aligned}$$

Při řešení podobných příkladů můžeme poznat, jaké jsou myšlenkové pochody jednotlivých žáků.

Závěrem lze pak uvést sumarizovat nejpodstatnější vlastnosti násobení celých čísel, kterými jsou komutativnost násobení, asociativnost násobení, násobení číslem 1, násobení číslem 0 a distributivnost násobení vzhledem ke sčítání.

## Dělení celých čísel

Dělení celých čísel lze chápat jako inverzní operaci k násobení celých čísel. Jestliže pro dvě nenulová celá čísla platí  $a \cdot b = c$ , pak  $c : b = a$  a také  $c : a = b$ . (Např.  $2 \cdot 3 = 6$ , pak  $6 : 3 = 2$ , ale také  $6 : 2 = 3$ ). Jakými způsoby můžeme dělení celých čísel žákům přiblížit?

a) Dělení dvou přirozených čísel je náplní osnov učiva matematiky na 1. stupni ZŠ. Dělení dvou celých čísel, kdy dělenec nebo dělitel jsou záporná celá čísla, můžeme ilustrovat následujícím způsobem: Lze použít instrukativní postup, v němž žákům sdělíme známé (důležité) poznatky a vyzveme je, aby si je zafixovali, popř. je necháme tvořit motivační úlohy pro různé situace a ponecháme na žácích samotných, aby si poznatky (pravidla) odvodili samostatně.

(i) Dělenec je záporný, dělitel je kladný (podíl je záporný).

Mám dluh 15 Kč, vypůjčil jsem si stejnou částku od tří spolužáků. Kolik Kč dlužím každému z nich?

$$(-15) : 3 = -5.$$

Každému spolužákovi tedy dlužím 5 Kč.

- (ii) Dělenec i dělitel jsou čísla záporná (podíl je kladný).

Mám dluh 15 Kč, půjčoval jsem si po pěti korunách. Kolika spolužákům dlužím tuto částku?

$$(-15) : (-5) = 3.$$

Částku 5 Kč tedy dlužím třem spolužákům.

- (iii) Dělenec je kladný, dělitel je záporný (podíl je záporný).

Najít v reálném životě model situace, která by ilustrovala dělení přirozeného čísla celý záporným číslem, je poměrně obtížné. Můžeme tedy využít motivace vlastní matematikou. Např. takto: Máme provést dělení  $15 : (-5)$  a nevíme, jaký je výsledek. Výsledek si označíme určitým symbolem, např.  $a$ . Pak platí

$$15 : (-5) = a.$$

Zde si můžeme uvědomit, jakým způsobem provádíme zkoušku při známém dělení dvou celých čísel. Pro výsledek dělení  $a$  platí

$$a \cdot (-5) = 15,$$

tedy na základě výše uvedených poznatků platí  $a = -3$ , a tudíž

$$15 : (-5) = -3.$$

b) Jiný postup se opírá o vlastnosti absolutní hodnoty celého čísla. Provedeme tedy dělení absolutních hodnot daných dvou celých čísel. Podíl bude kladný, jestliže dělenec i dělitel jsou dvě přirozená čísla nebo pokud jsou dělenec i dělitel obě záporná celá čísla. Např.

$$15 : 5 = 3, \quad \text{resp.} \quad (-15) : (-5) = 3.$$

Jestliže buď dělenec je přirozené číslo a dělitel je záporné celé číslo, nebo dělenec je záporné celé číslo a dělitel je číslo přirozené, je hodnota podílu číslo záporné. Např.

$$(-15) : 5 = -3, \quad \text{resp.} \quad 15 : (-5) = -3.$$

c) Využijeme skutečnosti, že operace násobení a dělení jsou navzájem inverzní.

- $5 \cdot 3 = 15$ , tedy  $15 : 3 = 5$ ,  $15 : 5 = 3$ ,
- $5 \cdot (-3) = -15$ , tedy  $(-15) : (-3) = 5$ ,  $(-15) : 5 = -3$ ,
- $(-3) \cdot 5 = -15$ , tedy  $(-15) : 5 = -3$ ,  $(-15) : (-3) = 5$ ,
- $(-3) \cdot (-5) = 15$ , tedy  $15 : (-5) = -3$ ,  $15 : (-3) = -5$ .

Na tomto místě je třeba upozornit na zvláštní případy při dělení. Pro každé celé číslo  $a$  různé od nuly platí

$$a : a = 1 \qquad a : 1 = a.$$

Znovu zde zopakujeme specifické postavení čísla 0 při dělení celých čísel. Je-li dělenec roven nule a dělitel celé číslo různé od nuly, je podíl roven 0. Je-li dělenec celé číslo různé od nuly a dělitel je nula, dělení nelze provést, viz [1] (str. 259).

Uvedené postupy pro vyvození násobení a dělení celých čísel, zejména pak záporných, mohou posloužit jako příspěvek k hlubšímu pochopení daného učiva a mohou přispět k tomu, aby se vyučování matematice posunulo od instruktivního předávání hotových poznatků k vyučování konstruktivistickému.

## L i t e r a t u r a

- [1] *Blažková, R.*: Co, proč a jak ve školské matematice I. MFI, roč. 14, 2004/05, č. 5.  
[2] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky. SPN, Bratislava 1990.

# O některých vlastnostech ortických trojúhelníků

MAREK PECHAL

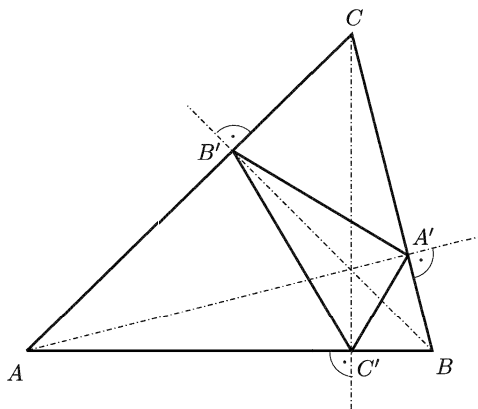
posluchač Matematicko-fyzikální fakulty UK, Praha

Cílem tohoto příspěvku je zkoumání některých vlastností tzv. *ortického trojúhelníku* (příslušného danému trojúhelníku) a dále pak odvození několika zajímavých výsledků týkajících se posloupnosti získané opakovaným

konstruováním takových trojúhelníků. Článek navazuje na výsledky uvedené v [1] a [2]. Závěrečný výsledek, který je v tomto článku odvozen, lze považovat za jisté zobecnění tvrzení odvozených v obou citovaných článcích.

## 1. Ortický trojúhelník

V rovině uvažujme trojúhelník  $ABC$ , který není pravoúhlý. Paty jeho výšek z vrcholů  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , jež označíme po řadě  $A'$ ,  $B'$  a  $C'$ , tvoří vrcholy trojúhelníku  $A'B'C'$ , který nazýváme *ortický trojúhelník* (obr. 1). Takový trojúhelník zřejmě existuje, právě když trojúhelník  $ABC$  není pravoúhlý.



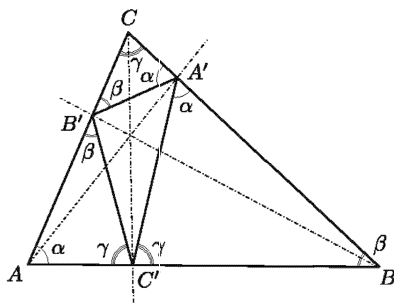
Obr. 1

Ortický trojúhelník má ve vztahu k danému trojúhelníku  $ABC$  řadu pozoruhodných vlastností. Existují zajímavé vztahy mezi metrickými parametry (délkami stran, velikostmi jeho vnitřních úhlů, poloměry opsaných kružnic), ale i mezi různými význačnými body v těchto trojúhelnících. Zde budou postupně uvedeny pouze základní vztahy mezi nimi (jejich detailnější rozbor nalezne čtenář např. v [3]).

### 1.1 Vnitřní úhly v ortickém trojúhelníku

Nejprve odvodíme velikosti vnitřních úhlů v ortickém trojúhelníku  $A'B'C'$  v závislosti na velikostech vnitřních úhlů daného trojúhelníku

$ABC$ . Přitom je třeba rozlišit, zda daný trojúhelník  $ABC$  je ostroúhlý nebo tupouhlý.



Obr. 2

- a) Mějme ostroúhlý trojúhelník  $ABC$  s vnitřními úhly  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  (v obvyklém značení) a jeho ortický trojúhelník  $A'B'C'$  (obr. 2). Protože platí  $|\angle BB'A| = |\angle BA'A| = \frac{\pi}{2}$ , je čtyřúhelník  $ABA'B'$  tětiový. Zřejmě tedy  $\alpha + |\angle BA'B'| = \pi$ . Odtud dostáváme  $|\angle B'A'C| = \alpha$ . Analogicky zjistíme, že  $|\angle A'B'C| = \beta$ . Z tětiových čtyřúhelníků  $BCB'C'$  a  $CAC'A'$  dále plyne  $|\angle C'B'A| = \beta$ ,  $|\angle B'C'A| = \gamma$ ,  $|\angle A'C'B| = \gamma$  a  $|\angle C'A'B| = \alpha$ .

Pro velikosti vnitřních úhlů v ortickém trojúhelníku  $A'B'C'$  pak platí

$$|\angle C'A'B'| = \pi - |\angle B'A'C| - |\angle C'A'B| = \pi - 2\alpha,$$

$$|\angle A'B'C'| = \pi - 2\beta \quad \text{a} \quad |\angle B'C'A'| = \pi - 2\gamma.$$

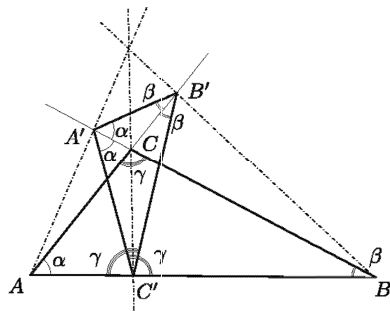
Označíme-li vnitřní úhly při vrcholech  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  v ortickém trojúhelníku  $A'B'C'$  po řadě  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ , je tedy

$$\alpha' = \pi - 2\alpha,$$

$$\beta' = \pi - 2\beta,$$

$$\gamma' = \pi - 2\gamma.$$

- b) Nechť trojúhelník  $ABC$  je tupouhlý.



Obr. 3

Uvažujme stejné označení jako v případě ostroúhlého trojúhelníku. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že daný trojúhelník má tupý úhel při vrcholu  $C$  (obr. 3). Nejprve využijeme toho, že čtyřúhelník  $ABB'A'$  je tětiový. Z vlastností obvodových úhlů plyne  $|\angle AB'A'| = \beta$  a  $|\angle B'A'B| = \alpha$ . Protože čtyřúhelníky  $AC'C'A'$  a  $BB'C'C'$  jsou tětiové, platí dále rovnosti  $|\angle C'A'C'| = \alpha$ ,  $|\angle AC'A'| = |\angle ACA'|$  a  $|\angle C'B'C'| = \beta$ ,  $|\angle B'C'B| = |\angle B'CB|$ . Vzhledem k tomu, že platí  $|\angle ACA'| = |\angle B'CB| = \pi - \gamma$  (a tedy rovněž  $|\angle AC'B'| = |\angle BC'A'| = \gamma$ ), platí pro velikosti vnitřních úhlů  $\alpha'$ ,  $\beta'$  a  $\gamma'$  v ortickém trojúhelníku vztahy

$$\begin{aligned}\alpha' &= 2\alpha, \\ \beta' &= 2\beta, \\ \gamma' &= 2\gamma - \pi.\end{aligned}$$

## 1.2 Vztah ortocentra k ortickému trojúhelníku

Při odvozování velikostí vnitřních úhlů ortického trojúhelníku jsme zjistili, že platí vztahy

$$\begin{aligned}|\angle AC'B'| &= |\angle BC'A'|, \\ |\angle C'A'B| &= |\angle B'A'C|, \\ |\angle A'B'C| &= |\angle C'B'A|.\end{aligned}$$

Opět je třeba odděleně zkoumat případy, kdy je daný trojúhelník ostroúhlý, resp. tupoúhlý.

- a) Nechť  $ABC$  je ostroúhlý trojúhelník. V tomto případě vidíme, že z uvedených rovností pro velikosti příslušných úhlů plyne, že osa úhlu  $B'C'A'^{*}$ ) je kolmá k přímce  $AB$  a je tedy výškou na stranu  $AB$  v trojúhelníku  $ABC$ . Analogická tvrzení platí i pro zbývající dvě osy vnitřních úhlů v ortickém trojúhelníku  $A'B'C'$ .

Výšky v trojúhelníku  $ABC$  jsou tudíž totožné s osami vnitřních úhlů v trojúhelníku  $A'B'C'$ . Ortocentrum ostroúhlého trojúhelníku proto splývá se středem kružnice vepsané jeho ortickému trojúhelníku.

- b) Pro tupoúhlý trojúhelník  $ABC$  s tupým úhlem při vrcholu  $C$  a pro jeho ortický trojúhelník  $A'B'C'$  z uvedených rovností plyne (obr. 3), že výška na stranu  $AB$  v trojúhelníku  $ABC$  je totožná s osou úhlu  $A'C'B'$ , avšak osy úhlů  $C'B'A'$  a  $B'A'C'$  nyní na rozdíl od případu ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$  splývají po řadě s přímkami  $AC$  a  $BC$ . Výšky na strany  $AC$  a  $BC$  v trojúhelníku  $ABC$  tedy nejsou totožné s osami vnitřních, nýbrž vedlejších úhlů při vrcholech  $A'$  a  $B'$  v trojúhelníku  $A'B'C'$ .

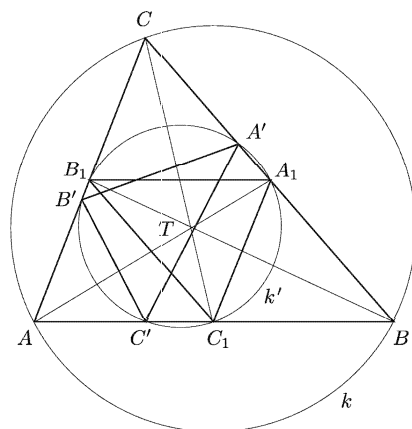
Průsečík výšek v trojúhelníku  $ABC$  je tedy totožný s průsečíkem os vnitřního úhlu při vrcholu  $C'$  a vedlejších úhlů při vrcholech  $A'$  a  $B'$  v trojúhelníku  $A'B'C'$ . Proto ortocentrum tupoúhlého trojúhelníku splývá se středem kružnice připsané jeho ortickému trojúhelníku, a to při straně ležící proti vrcholu odpovídajícímu vrcholu s tupým úhlem v původním trojúhelníku.

### 1.3 Poloměr kružnice opsané

Vzhledem k tomu, že paty výšek libovolného trojúhelníku  $T$  leží na jemu příslušné Feuerbachově kružnici devíti bodů (viz např. [3]), je tato kružnice zároveň kružnicí opsanou jeho ortickému trojúhelníku. Na Feuerbachově kružnici však leží také středy stran trojúhelníku  $T$ . Proto je Feuerbachova kružnice obrazem kružnice opsané trojúhelníku  $T$  ve stejnolehlosti se středem v jeho těžišti a koeficientem stejnolehlosti  $-\frac{1}{2}$  (obr. 4). Poloměr Feuerbachovy kružnice devíti bodů (tj. kružnice opsané ortickému trojúhelníku) je tedy poloviční oproti poloměru kružnice opsané danému trojúhelníku  $T$ .

---

<sup>\*)</sup> Osami úhlů, resp. výškami zde budeme rozumět přímky.



Obr. 4

## 2. Posloupnost ortických trojúhelníků

Není-li sestrojený ortický trojúhelník  $A'B'C'$  příslušný danému trojúhelníku  $ABC$  pravoúhlý, lze zkonstruovat jeho ortický trojúhelník atd. Nesetkáme-li se tedy při postupném sestrojování dalších ortických trojúhelníků s trojúhelníkem pravoúhlým, bude tato posloupnost ortických trojúhelníků nekonečná.

Je známo (viz [1] a [2]), že k danému ostroúhlému trojúhelníku existuje nekonečná posloupnost ostroúhlých ortických trojúhelníků, právě když je daný trojúhelník  $ABC$  rovnostranný. V tomto článku bude odvozeno podobné kritérium, aniž bychom se nějakým způsobem omezovali pouze na ostroúhlé trojúhelníky. Zavedme pro jednoduchost následující označení: Budiž  $n$  dané přirozené číslo. Řekneme, že reálné číslo  $x$  je *tvaru*  $P_n$ , existuje-li celé číslo  $m$ , které není dělitelné dvěma, takové, že platí  $x = \frac{m\pi}{2^n}$ . Všimněme si ještě, že žádné reálné číslo nemůže být zároveň tvaru  $P_i$  i  $P_j$  pro libovolná přirozená čísla  $i \neq j$ . O reálné číse, které je tvaru  $P_n$  pro některé přirozené  $n$ , řekneme, že je *tvaru*  $P$ .

Dále dokážeme následující pomocné tvrzení.

### Lemma

- Není-li reálné číslo  $x$  tvaru  $P$ , pak ani žádné z čísel  $2x$ ,  $\pi - 2x$ ,  $2x - \pi$  není tvaru  $P$ .

- b) Je-li reálné číslo  $x$  tvaru  $P_n$  pro určité přirozené číslo  $n > 1$ , pak je každé z čísel  $2x$ ,  $\pi - 2x$ ,  $2x - \pi$  tvaru  $P_{n-1}$ .

*Důkaz.*

- a) Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme tedy, že  $x$  není tvaru  $P$  a přitom aspoň jedno z čísel  $2x$ ,  $\pi - 2x$ ,  $2x - \pi$  je tvaru  $P_n$  pro určité přirozené  $n$ . Bez újmy na obecnosti nechť je to například číslo  $2x$ . Pak lze toto číslo vyjádřit ve tvaru

$$2x = \frac{m\pi}{2^n}, \quad \text{tedy} \quad x = \frac{m\pi}{2^{n+1}}$$

a  $x$  je proto tvaru  $P_{n+1}$ , což je spor. Zcela analogicky dospějeme ke sporu i v případech, že je některé ze zbývajících dvou čísel  $\pi - 2x$  a  $2x - \pi$  tvaru  $P_n$ .

- b) Je-li  $x$  tvaru  $P_n$  pro některé přirozené číslo  $n > 1$ , pak je  $x = \frac{m\pi}{2^n}$ , a tedy

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{\pi m}{2^{n-1}}, \\ \pi - 2x &= \frac{\pi(2^{n-1} - m)}{2^{n-1}}, \\ 2x - \pi &= \frac{\pi(m - 2^{n-1})}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že uvažovaná čísla jsou skutečně tvaru  $P_{n-1}$  (celá čísla  $m$ ,  $2^{n-1} - m$  a  $m - 2^{n-1}$  nejsou evidentně dělitelná číslem 2).

Tím je dokončen důkaz obou částí lemmatu.

Pomocí výše zavedené konvence budeme rozlišovat různé „typy“ trojúhelníků následujícím způsobem: Nechť  $n$  je dané přirozené číslo. Jestliže je alespoň jedna z velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku  $T$  tvaru  $P_n$  a přitom žádná není tvaru  $P_m$  pro žádné přirozené  $m < n$ , řekneme, že trojúhelník  $T$  je *typu*  $P_n$ . Pokud je trojúhelník  $T$  typu  $P_n$  pro některé přirozené  $n$ , řekneme (podobně), že  $T$  je typu  $P$ .

Snadno nahlédneme, že při takto zavedeném označení je libovolný pravoúhlý trojúhelník typu  $P_1$  (a naopak každý trojúhelník typu  $P_1$  je pravoúhlý).

Užitím výše uvedeného lemmatu pro velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku  $T$  a v jeho ortickém trojúhelníku  $T'$  plyne tvrzení: Nemá-li trojúhelník  $T$  typu  $P$ , pak ani trojúhelník  $T'$  (který zřejmě existuje, protože  $T$  není pravoúhlý) není typu  $P$ . Opakováním této úvahy zjistíme, že žádný z členů konstruované posloupnosti ortických trojúhelníků není typu  $P$ , a tedy nemůže být pravoúhlý. Jestliže tedy daný trojúhelník není typu  $P$ , pak příslušná posloupnost jeho ortických trojúhelníků je nekonečná.

Snadno lze také zjistit, že je-li trojúhelník  $T$  typu  $P_n$  pro některé přirozené  $n > 1$ , pak jeho ortický trojúhelník je typu  $P_{n-1}$ . Pokračujeme-li v konstruování posloupnosti ortických trojúhelníků dále,  $k$ -tý člen vzniklé posloupnosti je typu  $P_{n-k}$ , tudíž v pořadí  $(n-1)$ -ní ortický trojúhelník je typu  $P_1$ , a tedy pravoúhlý. Pro daný trojúhelník typu  $P_n$  je tedy posloupnost ortických trojúhelníků konečná a má právě  $n-1$  členů.

Závěry z předchozích dvou odstavců shrnuje následující věta.

## Věta

*Posloupnost ortických trojúhelníků je nekonečná, právě když žádný z vnitřních úhlů daného (výchozího) trojúhelníku nelze zapsat ve tvaru  $\frac{\pi m}{2^n}$ , kde  $n$  je přirozené číslo a  $m$  je liché (přirozené) číslo.*

*Je-li možno velikosti některých vnitřních úhlů daného trojúhelníku zapsat v uvedeném tvaru, má odpovídající posloupnost ortických trojúhelníků právě  $n-1$  členů, kde  $n$  je nejmenší z exponentů u čísla 2 v příslušných zápisech velikostí jeho vnitřních úhlů.*

## Literatura

- [1] Švrček, J.: O posloupnosti ortických trojúhelníků. Rozhledy M-F, roč. 64, 1985/86, č. 7.
- [2] Calábek, P. – Švrček, J.: Rekurentní posloupnosti v geometrii. MFI, roč. 12, 2002/03, č. 10.
- [3] Švrček, J. – Vanžura, J.: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha 1988.

# Zlatý vrch nad Českou Kamenicí aneb funkce v přírodě

PETR EISENMANN

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Bývalý lom Zlatý vrch nad Lískou u České Kamenice v Severních Čechách je tradičním místem zastavení při toulkách na okraji Lužických hor. Lom zde byl založen někdy kolem roku 1870. Čedičové sloupce v něm byly dokonale vyvinuté a jen málo rozpukané, takže se daly lámat až 6 m dlouhé. Pro svou velkou odolnost se údajně používaly i při stavbě mořských hrází v Nizozemí. Těžba zde byla definitivně zastavena až v roce 1973, kdy byla odkryta celá lomová stěna, tvořená až 30 m dlouhými dokonale vyvinutými čedičovými sloupy. Zlatý vrch je národní přírodní rezervací.

Člověk spjatý s matematikou si při pohledu na tvar čedičových sloupců (obr. 1) může pomyslet: Předě mnou zde stojí parametrický systém funkcí. V následujícím příspěvku se pokusíme tyto funkce popsat předpisem. Předpokládat budeme pouze elementární znalosti ze základů diferenciálního počtu funkcí jedné reálné proměnné.

Nejjednodušší variantou je použít k tomu celistvou racionální funkci, tedy polynom. Zde by vzhledem ke tvaru čedičových sloupců mohl vyhovovat již polynom třetího stupně, tedy

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Umístíme inflexní bod hledané funkce  $y$  (bod, ve kterém se zde funkce mění z konkávní na konvexní) do počátku. Z toho plyne podmínka

$$y(0) = 0, \quad \text{tedy} \quad d = 0.$$

Funkce  $y$  musí být zřejmě rostoucí. Její derivace

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

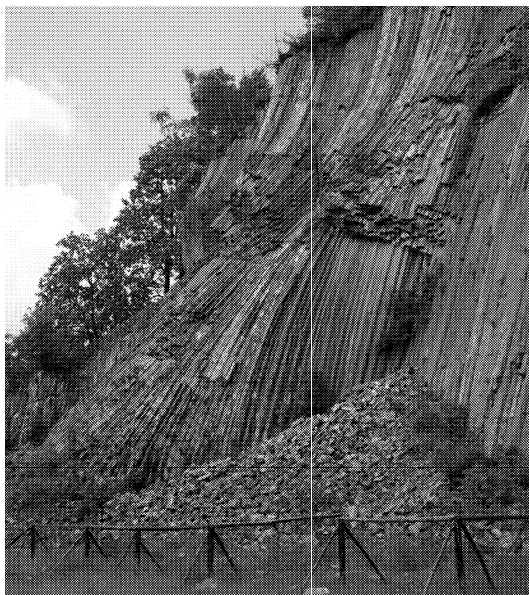
tedy musí být kladná. Toho můžeme jednoduše dosáhnout například volbou koeficientů

$$b = 0, \quad a > 0, \quad c > 0.$$

Těmto podmínkám vyhovuje i další, následující požadavek. Potřebujeme totiž, aby funkce  $y$  byla na intervalu  $(-\infty; 0)$  konkávní a na intervalu  $(0; \infty)$  konvexní. Musí tedy platit

$$y'' = 6ax < 0 \quad \text{pro všechna reálná } x < 0,$$

$$y'' = 6ax > 0 \quad \text{pro všechna reálná } x > 0$$



Obr. 1

Z obrázku 1 je patrné, že tečna ke grafu funkce  $y$  v počátku by měla s kladným směrem osy  $x$  svírat úhel asi  $70^\circ$ . Mělo by tedy přibližně platit

$$y'(0) = \operatorname{tg} 70^\circ.$$

Volme tedy koeficient  $c = 3$ . Na základě provedených úvah vypadá předpis hledané funkce  $y$  prozatím takto

$$y = ax^3 + 3x.$$

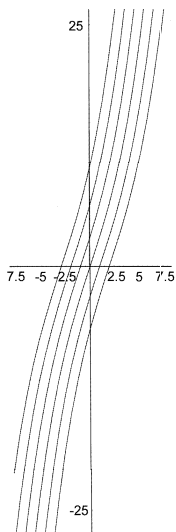
Stanovit hodnotu koeficientu  $a$  je vhodné pomocí nějakého programu umožňujícího kreslení grafů funkcí. Touto cestou jsme při výuce na gymnáziu dospěli pomocí programu *Mathematica* k hodnotě  $a = 0,05$ . Předpis hledané funkce  $y$  je tedy

$$y = 0,05x^3 + 3x.$$

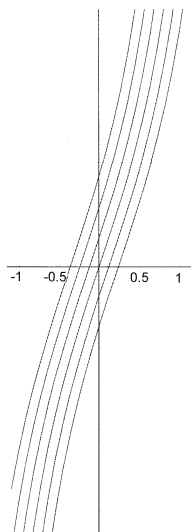
Posledním krokem nyní bude vytvořit z této funkce parametrický systém funkcí odpovídající obrázku 1. Vzhledem k tomu, že derivace funkce  $y$  (a tedy i směrnice tečny ke grafu této funkce) je v každém bodě větší než 1 (je větší nebo rovna třem), bude vhodné parametr vložit do argumentu. Hledaný předpis tedy může být

$$y = 0,05(x + n)^3 + 3(x + n),$$

kde  $n = 0; 1; -1; 2; -2; 3; \dots$ . Obrázek grafů funkcí tohoto parametrického systému je na obr. 2.



Obr. 2



Obr. 3

Další možnost, jak zvolit parametrický systém popisující obr. 1, navrhli při experimentální výuce na gymnáziu sami studenti. Těm se v závěru předchozí fáze vybavila funkce tangens. Ta totiž bez dalších úprav splňuje všechny požadavky kladené na hledanou funkci. Jedinou nutnou korekcí zde byla úprava hodnoty první derivace v počátku. V souladu s předchozím řešením jsme zvolili první derivaci v počátku rovnou 3. Navržený předpis tedy byl

$$y = 3 \operatorname{tg}(x + n),$$

kde  $n = 0; 0, 1; -0, 1; 0, 2; -0, 2; 0, 3; \dots$ . Grafy funkcí tohoto parametrického systému jsou znázorněny na obr. 3.

# Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 131 a 132, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle tohoto (16.) ročníku našeho časopisu.

## Úloha 131

V trojúhelníku  $ABC$  při obvyklém označení stran, úhlů a výšek platí rovnost

$$\frac{1}{v_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

právě když jeden z úhlů  $\gamma$ ,  $|\alpha - \beta|$  má velikost  $90^\circ$ . Dokažte.

*Jaromír Šimša*

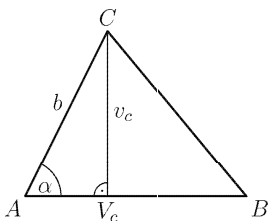
*Řešení:*

Uvažujme libovolný trojúhelník  $ABC$ . Označme  $V_c$  patu výšky z vrcholu  $C$  ke straně  $AB$ . Je-li  $\alpha < 90^\circ$ , potom v pravoúhlém trojúhelníku  $AV_cC$  s pravým úhlem při vrcholu  $C$  platí  $v_c = b \sin \alpha$  (obr. 1a). Pokud je  $\alpha > 90^\circ$ , potom v pravoúhlém trojúhelníku  $AV_cC$  platí  $v_c = b \sin(180^\circ - \alpha) = b \sin \alpha$  (obr. 1b). Pro  $\alpha = 90^\circ$  platí rovněž  $v_c = b \sin \alpha$ . Proto v libovolném trojúhelníku  $ABC$  platí

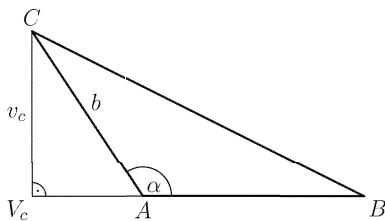
$$\frac{1}{b} = \frac{\sin \alpha}{v_c}.$$

Obdobně ukážeme, že

$$\frac{1}{a} = \frac{\sin \beta}{v_c}.$$



Obr. 1a



Obr. 1b

Rovnost ze zadání úlohy je tedy ekvivalentní s rovností

$$\frac{1}{v_c^2} = \frac{\sin^2 \beta}{v_c^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{v_c^2},$$

která je ekvivalentní s rovností

$$1 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta. \quad (1)$$

Postupnými úpravami pravé strany vztahu (1) dostaneme dále

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta) = \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = 1 - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Rovnost (1) je tedy ekvivalentní s rovností

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0. \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že  $\alpha$  a  $\beta$  jsou velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, je tato rovnost ekvivalentní s jednou ze tří rovností  $\alpha + \beta = 90^\circ$ ,  $\alpha - \beta = -90^\circ$  a  $\alpha - \beta = -90^\circ$ . V prvním případě platí  $\gamma = 90^\circ$ , druhé dva případy dávají  $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ , což jsme chtěli ukázat.

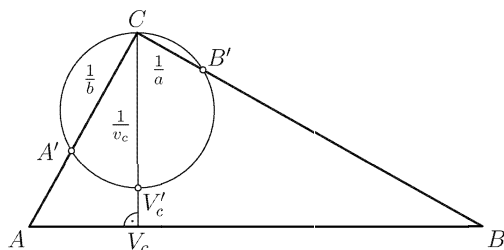
*Jiné řešení (podle Zbyňka Konečného):*

Nechť  $V_c$  je pata výšky z vrcholu  $C$  ke straně  $AB$ . Uvažujme po řadě obrazy  $A'$ ,  $V'_c$ ,  $B'$  bodů  $A$ ,  $V_c$ ,  $B$  v kruhové inverzi podle kružnice se středem v bodě  $C$  a poloměrem 1. Potom

$$|CA'| = \frac{1}{a}, \quad |CV'_c| = \frac{1}{v_c}, \quad |CB'| = \frac{1}{b}.$$

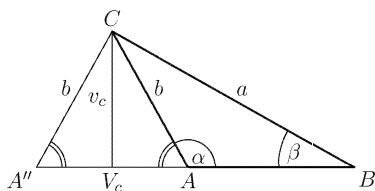
Protože body  $A$ ,  $V_c$ ,  $B$  leží v přímce a přímka  $CV_c$  je na tuto přímku kolmá, z vlastností uvažované kruhové inverze plyne, že body  $A'$ ,  $V'_c$ ,  $B'$  a  $C$  leží na kružnici s průměrem  $CV'_c$  (obr. 2).

Pokud bod  $V_c$  (tedy i bod  $V'_c$ ) leží uvnitř úhlu  $ACB$ , je rovnost ze zadání podle Pythagorovy věty a vlastností Thaletovy kružnice ekvivalentní s podmínkou  $\gamma = 90^\circ$ .



Obr. 2

Nechť bod  $V_c$  neleží uvnitř úhlu  $ACB$ . Jak rovnost ze zadání úlohy, tak podmínky pro úhly vylučují, že by mohl ležet na jeho ramenech. Předpokládejme, že úhel  $CAB$  je tupý. Označme  $A''$  bod souměrně sdružený s bodem  $A$  podle bodu  $V_c$ . Platí  $|CA''| = b$ . Nyní pata výšky z vrcholu  $C$  ke straně  $A''B$  trojúhelníku  $A''BC$  leží uvnitř úhlu  $A''CB$  (obr. 3). Rovnost ze zadání je tedy ekvivalentní s podmínkou, že úhel  $A''CB$  je pravý. Vzhledem k tomu, že  $|\angle CA''A| = |\angle CAA''| = 180^\circ - \alpha$ , je tato podmínka ekvivalentní s rovností  $(180^\circ - \alpha) + \beta = 90^\circ$ , tedy  $\alpha - \beta = 90^\circ$ . V případě, že úhel  $CBA$  je tupý, bychom obdobně ukázali, že rovnost ze zadání úlohy je ekvivalentní s podmínkou  $\beta - \alpha = 90^\circ$ .



Obr. 3

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Josef Křišťan* z Plzně, *Miroslav Klímoš* z GMK v Bílovci, *Zbyněk Konečný*, *Samuel Říha*, *Jiří Řihák*, *Hana Šormová* a *Petr Velan*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše a *Tomáš Princ* z WG v Ostravě-Porubě.

Neúplné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně a *Jana Medková* z G v Brně, Křenová.

### Úloha 132

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla  $a, b, c$  platí nerovnost

$$\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{27}{8}.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

*Jaroslav Švrček*

*Řešení:*

Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro kladná reálná čísla  $b+c, c+a, a+b$  platí

$$\frac{(b+c) + (c+a) + (a+b)}{3} \geq \sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)},$$

přičemž rovnost nastává, právě když  $b+c = c+a = a+b$ , tj. právě když  $a = b = c$ . Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$\frac{(a+b+c)^3}{(b+c)(c+a)(a+b)} \geq \frac{27}{8},$$

kterou snadno upravíme na žádaný tvar

$$\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \left(1 + \frac{b}{c+a}\right) \left(1 + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{27}{8}.$$

Rovnost zde nastává, právě když  $a = b = c$ .

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Josef Křišťan* z Plzně, *Hana Bendová* z G v České Lípě, *Anežka Faltýnková* z GJŠ v Přerově, *Tomáš Jeziorský*, *Miroslav Klimoš*, *Vojtěch Kozák*, *Lucie Mohelníková*, *Vít Orava* *Tomáš Raček*, a *Miroslav Štufka*, všichni z GMK v Bílovci, *Jan Komínek*, *Zbyněk Konečný*, *Samuel Říha*, *Jiří Řihák*, *Hana Šormová* a *Petr Velan*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Korbel* z G v Jihlavě, *Jana Medková* z G v Brně, Křenová a *Tomáš Princ* z WG v Ostravě-Porubě.

Neúplné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy a *František Jáchim* z Volyně.