

# MATEMATIKA

## Dvojtředové čtyřúhelníky a Fussův problém

BARBORA HAVÍŘOVÁ

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

K běžnému učivu planimetrie na gymnáziu patří zavedení pojmů tětivový a tečnový čtyřúhelník a uvedení jejich základních vlastností, včetně jejich využití v některých úlohách. Bývá zmíněn rovněž dvojtředový čtyřúhelník, tj. čtyřúhelník, který je současně tětivový a tečnový.

Úlohy týkající se dvojtředových čtyřúhelníků jsou velmi zajímavé. Je užitečné (a přitom poutavé) zabývat se podrobněji jejich vlastnostmi. Za pozornost stojí zejména *Fussův problém* uvádějící souvislost mezi poloměrem vepsané a opsané kružnice. V závěru příspěvku jsou zmíněny také dvojtředové mnohoúhelníky.

### 1. Tětivový, tečnový a dvojtředový čtyřúhelník

Před vlastním zkoumáním vlastností dvojtředového čtyřúhelníku je užitečné připomenout si základní vlastnosti obou druhů zmíněných čtyřúhelníků, které jsou uvedeny v běžné učebnici planimetrie pro gymnázia [2]. Uvažujme v dalším textu čtyřúhelník  $ABCD$  s obvyklým označením stran a vnitřních úhlů.

Je známo, že čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici se nazývá *tětivový*. Součet jeho protějších vnitřních úhlů je úhel přímý, tedy

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ. \quad (1)$$

Obráceně každý konvexní čtyřúhelník, jehož součet protějších vnitřních úhlů je úhel přímý, je tětivový. Tyto poznatky plynou z vlastností obvodových úhlů nad tětivami dané kružnice.

Čtyřúhelník, jemuž lze vepsat kružnici se nazývá *tečnový*. Známým faktem je, že součty délek protějších stran tečnového čtyřúhelníku mají tutéž hodnotu, tedy

$$a + c = b + d \quad (2)$$

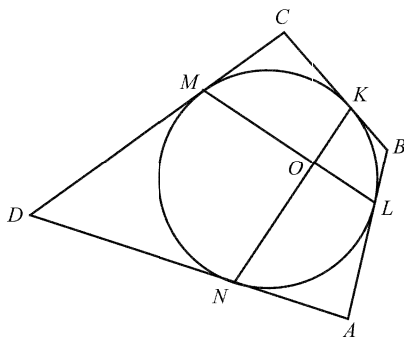
(plyne ze shodnosti úseků tečen z vnějšího bodu kružnice k bodům dotyku). Obráceně, každý konvexní čtyřúhelník, jehož součty délek protějších stran se rovnají, je tečnový.

V další části se budeme zabývat některými zajímavými vlastnostmi dvojstředového čtyřúhelníka.

### Věta 1

Nechť  $ABCD$  je dvojstředový čtyřúhelník,  $K, L, M, N$  nechť značí body dotyku kružnice jemu vepsané po řadě se stranami  $AB, BC, CD, DA$ . Potom přímky  $KM$  a  $LN$  jsou navzájem kolmé. Obráceně: Každý tečnový čtyřúhelník, v němž jsou spojnice protějších bodů dotyku vepsané kružnice navzájem kolmé, je rovněž tětivový, a tedy dvojstředový.

*Důkaz:* Označme jako obvykle vnitřní úhly u vrcholů  $A, C$  po řadě  $\alpha, \gamma$ . Dále označme  $\kappa = |\sphericalangle AKM|$ ,  $\lambda = |\sphericalangle NLC|$ ,  $\mu = |\sphericalangle CMK|$  a  $\nu = |\sphericalangle ONA|$ . Odchylku přímek  $KM$  a  $LN$  označme  $\omega$  (obr. 1).



Obr. 1

Přímky  $AB$  a  $CD$  jako tečny v bodech  $M$  a  $K$  jsou souměrně sdružené podle osy tětivy  $MK$  kružnice vepsané, proto jsou u vrcholů  $M$  a  $K$  shodné dvojice vedlejších úhlů o velikostech  $\kappa$  a  $\mu$ . Totéž platí pro vedlejší úhly o velikostech  $\lambda$  a  $\nu$  u vrcholů  $L$  a  $N$ . Ve čtyřúhelnících  $AKON$  a  $CMOL$  platí

$$\gamma + \mu + \lambda + \omega = 360^\circ,$$

$$\alpha + \kappa + \nu + \omega = 360^\circ.$$

Sečtením těchto rovností dostaneme

$$\underbrace{\alpha + \gamma}_{180^\circ} + \underbrace{\mu + \kappa}_{180^\circ} + \underbrace{\lambda + \nu}_{180^\circ} + 2\omega = 720^\circ \quad \text{a odtud} \quad \omega = 90^\circ.$$

Obrácením předchozích úvah zjistíme, že z rovnosti  $\omega = 90^\circ$  plyne  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ . Tím je důkaz hotov.

Vyjdeme-li tedy od dvou na sebe kolmých tětiv dané kružnice a v jejich krajních bodech sestrojíme tečny k této kružnici, vymezí tyto čtyři přímky dvojtředový čtyřúhelník. Tohoto postupu lze využít pro sestrojení obecného dvojtředového čtyřúhelníku.

## 2. Fussův problém

Dvojtředové čtyřúhelníky a obecně mnohoúhelníky podrobněji zkoumal *Nicolaus Fuss* (1755–1826), švýcarský matematik, který na doporučení Daniela Bernoulliho odešel pracovat do St. Petersburgu k Leonhardovi Eulerovi. Pod vedením L. Eulera se zabýval sférickou geometrií, trigonometrií, diferenciální geometrií, diferenciálními rovnicemi a mnohými dalšími tématy. Za svoje práce získal několik významných ocenění.

N. Fuss objevil vztah mezi poloměrem vepsané a opsané kružnice a vzdáleností jejich středů pro dvojtředový čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník, sedmiúhelník a osmiúhelník. Vyřešil tak úlohu, kterou dnes nazýváme Fussův problém:

### Úloha

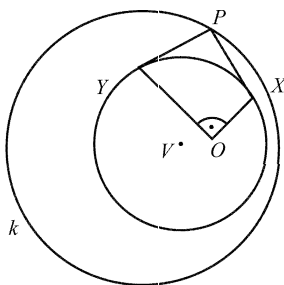
*Najděte vztah mezi poloměrem kružnice vepsané a opsané a vzdáleností jejich středů v obecném dvojtředovém čtyřúhelníku.*

**Řešení:**<sup>\*)</sup> Vraťme se k označení podle obr. 1. Zjistili jsme, že úsečky  $KM$  a  $LN$  dělí dvojstředový čtyřúhelník  $ABCD$  na čtyři menší čtyřúhelníky  $AKON$ ,  $BLOK$ ,  $CMOL$  a  $DNOM$ , které jsou téhož typu: mají pravý úhel u společného vrcholu  $O$ , k němu sousední vrcholy leží na menší kružnici a strany neobsahující vrchol  $O$  leží na tečnách k této kružnici. Takový typ čtyřúhelníku  $OXPY$  vyšetříme obecně. Dále uvažujeme následující situaci:

- Je dána kružnice  $k$  se středem  $V$ ,
- ve vnitřní oblasti kružnice  $k$  je dán bod  $O$ ,
- sestrojíme libovolný pravý úhel s vrcholem v daném bodě  $O$ ,
- v průsečících  $X, Y$  ramen úhlu s kružnicí  $k$  sestrojíme tečny.

Zkoumejme nyní polohu průsečíku  $P$  sestrojených tečen při rotaci praveho úhlu kolem vrcholu  $O$ .

Pomocí vhodného programu, například *Cabri*, je možno prohlédnout si hledanou množinu bodů (obr. 2). Na první pohled se zdá, že hledaná množina je pravděpodobně kružnice. Tuto domněnku podpoříme exaktním výpočtem.



Obr. 2

Trojúhelník  $OXY$  je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu  $O$ . Označíme-li patu výšky z vrcholu  $O$  písmenem  $F$ , pak podle Eukleidovy věty o výšce platí  $|OF|^2 = |FX| \cdot |FY|$ . Dále označíme  $e$  velikost úsečky  $VO$ ,  $\varphi$  velikost úhlu  $OV P$ ,  $\rho$  poloměr kružnice  $k$  a  $p$  velikost úsečky  $VP$  (obr. 3).

<sup>\*)</sup> K vyřešení Fussova problému lze použít uvedený postup (viz [1]). Zajímavé shrnutí řešení pro dvojstředové mnohoúhelníky s větším počtem vrcholů lze nalézt například v [3].

Přímka  $VP$  je osa úsečky  $XY$ , proto  $|NX| = |NY|$  a úhel  $VNY$  je pravý. Dále  $|NF| = e \cdot \sin \varphi$ . Platí

$$|OF| = |VN| - e \cdot \cos \varphi,$$

$$|FX| = |NX| - e \cdot \sin \varphi,$$

$$|FY| = |NX| + e \cdot \sin \varphi.$$

Po dosazení do rovnosti  $|OF|^2 = |FX| \cdot |FY|$  postupně dostaneme

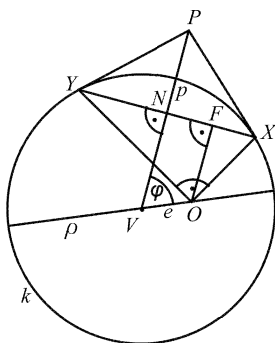
$$(|VN| - e \cdot \cos \varphi)^2 = (|NX| - e \cdot \sin \varphi)(|NX| + e \cdot \sin \varphi),$$

$$|VN|^2 - 2|VN|e \cdot \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi = |NX|^2 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi,$$

$$|VN|^2 - 2|VN|e \cdot \cos \varphi + e^2 = |NX|^2.$$

Trojúhelník  $VXN$  je pravoúhlý,  $|VX| = \rho$ , a proto  $|NX|^2 = \rho^2 - |VN|^2$  (Pythagorova věta). Po dosazení do předchozího vztahu vychází

$$2|VN|^2 - 2|VN|e \cdot \cos \varphi + e^2 = \rho^2.$$



Obr. 3

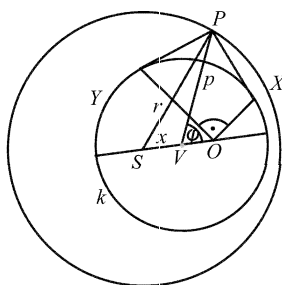
Také trojúhelník  $VXP$  je pravoúhlý (přímka  $XP$  je tečna), proto podle Eukleidovy věty o odvěsně platí  $|VX|^2 = |VP| \cdot |VN|$ , neboli  $\rho^2 = p|VN|$ . Po dosazení za  $|VN|$  a úpravě dostaneme rovnici

$$\frac{2\rho^4}{\rho^2 - e^2} = 2 \frac{\rho^2 e}{\rho^2 - e^2} p \cos \varphi + p^2. \quad (3)$$

V tomto vztahu jsou  $p$  a  $\varphi$  proměnné závislé na poloze bodu  $P$  (a tedy na otočení pravého úhlu  $XOY$ ),  $\rho$  a  $e$  jsou pro zadanou kružnici a zadaný bod  $O$  konstanty. Podle výsledku programu Cabri předpokládáme, že všechny takové body  $P$  leží na kružnici, jejíž střed  $S$  musí ležet na přímce  $MO$  (plyne ze symetrie problému). Označíme-li  $x = |SV|$  vzdálenost obou středů, pak pro poloměr  $r = |SP|$  „předpokládané“ kružnice se středem  $S$  platí

$$r^2 = x^2 + p^2 + 2xp \cos \varphi \quad (4)$$

(kosinová věta pro trojúhelník  $SV P$ , obr. 4).



Obr. 4

Srovnáním (4) s dříve odvozeným vztahem (3) dostáváme konstantní hodnotu  $r$  pro

$$x = \frac{\rho^2 e}{\rho^2 - e^2}.$$

Množina bodů  $P$  s požadovanými vlastnostmi je tedy kružnice o středu  $S$  a poloměru  $r$ . Dosazením nalezené hodnoty  $x$  a vyloučením neznámé  $e$  ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \frac{2\rho^4}{\rho^2 - e^2} &= 2 \frac{\rho^2 e}{\rho^2 - e^2} p \cos \varphi + p^2, \\ r^2 - x^2 &= 2xp \cos \varphi + p^2. \end{aligned}$$

získáme vztah mezi poloměrem zadané kružnice  $\rho$ , nalezené kružnice  $r$  a vzdáleností jejich středů  $x$

$$2\rho^2(r^2 + x^2) = (r^2 - x^2)^2.$$

Vyjdeme-li z bodu  $P$  vnější kružnice, nakreslíme tečnu k vnitřní kružnici, z průsečíku s vnější kružnicí opět tečnu k vnitřní atd., vrátíme se čtvrtou tečnou zpět do bodu  $P$ , neboť získáme čtyřúhelník „slepený“ ze čtyř čtyřúhelníků zkoumaného typu a tedy čtyřúhelník dvojstředový. Bod  $P$  může být na vnější kružnici umístěn libovolně, pohybem bodu  $P$  proto obdržíme všechny dvojstředové čtyřúhelníky se zadanou opsanou a vepsanou kružnicí. Provedeným výpočtem jsme nejen potvrdili domněnku o zkoumané množině bodů, ale rovněž našli řešení Fussova problému.

## Závěr

Jsou-li  $\rho$  a  $r$  poloměry kružnice vepsané a opsané libovolnému dvojstředovému čtyřúhelníku, pak vzdálenost  $x$  jejich středů vyhovuje rovnici

$$2\rho^2(r^2 + x^2) = (r^2 - x^2)^2.$$

Pro  $x \in (0; r - \rho)$ ,  $r \geq \rho\sqrt{2}$  má tato rovnice jediné řešení

$$x = \sqrt{r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{4r^2 + \rho^2}}.$$

Pro  $r < \rho\sqrt{2}$  žádné řešení nemá, a tedy dvojstředový čtyřúhelník nelze v tomto případě sestavit. Pro  $r = \rho\sqrt{2}$  vychází  $x = 0$ , středy obou kružnic splývají a každý odpovídající dvojstředový čtyřúhelník je čtverec.

Odvozený vztah mezi veličinami  $\rho$ ,  $r$  a  $x$  lze ještě upravit na tvar

$$\frac{1}{(r - x)^2} + \frac{1}{(r + x)^2} = \frac{1}{\rho^2}.$$

## 3. Další vlastnosti dvojstředového čtyřúhelníku

V průběhu řešení Fussova problému jsme objevili a dokázali následující větu:

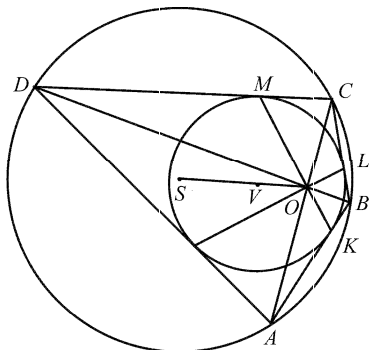
### Věta 2

Střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané a průsečík spojnic bodů dotyku kružnice vepsané dvojstředovému čtyřúhelníku leží na jedné přímce.

Jinak pojatý důkaz věty 2 je uveden například v [5].

### Věta 3

V libovolném tečnovém čtyřúhelníku průsečík spojnic bodů dotyku kružnice vepsané splývá s průsečíkem úhlopříček (viz obr. 5).



Obr. 5

*Důkaz* (viz [4]): Označme nejprve  $X$  průsečík úhlopříčky  $AC$  a spojnice bodů dotyku  $KM$ . Platí

$$|\sphericalangle AXK| = |\sphericalangle CXM|$$

(vrcholové úhly) a tedy i

$$\sin |\sphericalangle AXK| = \sin |\sphericalangle CXM|,$$

dále

$$|\sphericalangle AKX| = |\sphericalangle DMX| = 180^\circ - |\sphericalangle CMX|,$$

proto

$$\sin |\sphericalangle AKX| = \sin |\sphericalangle CMX|.$$

Pro obsah trojúhelníku  $AKX$  platí

$$\begin{aligned} S_{AKX} &= \frac{1}{2} \cdot |AX| \cdot |KX| \cdot \sin |\sphericalangle AXK| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot |AK| \cdot |KX| \cdot \sin |\sphericalangle AKX|. \end{aligned}$$

Pro obsah trojúhelníku  $CMX$  platí

$$\begin{aligned} S_{CMX} &= \frac{1}{2} \cdot |CX| \cdot |MX| \cdot \sin |\sphericalangle CXM| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |MX| \cdot \sin |\sphericalangle CMX|. \end{aligned}$$

Odtud

$$\frac{S_{AKX}}{S_{CMX}} = \frac{|AX| \cdot |KX|}{|CX| \cdot |MX|} = \frac{|AK| \cdot |KX|}{|CM| \cdot |MX|}$$

a tedy

$$\frac{|AX|}{|CX|} = \frac{|AK|}{|CM|}. \quad (5)$$

Analogickým výpočtem zjistíme, že pro průsečík  $Y$  úhlopříčky  $AC$  a spojnice bodů dotyku  $LN$  platí

$$\frac{|AY|}{|CY|} = \frac{|AN|}{|CL|}. \quad (6)$$

Ze symetrie tečen plynou rovnosti

$$|AK| = |AN| \text{ a } |CL| = |CM|,$$

které podle (5) a (6) znamenají, že body  $X$  a  $Y$  dělí úsečku  $AC$  ve stejném poměru, takže  $X = Y$ . Dokázali jsme, že úhlopříčka  $AC$  prochází průsečíkem úseček  $KM$  a  $LN$ . S ohledem na symetrii musí tímto průsečíkem procházet i úhlopříčka  $BD$  a celý důkaz je hotov.

#### 4. Konstrukce dvojstředového čtyřúhelníku

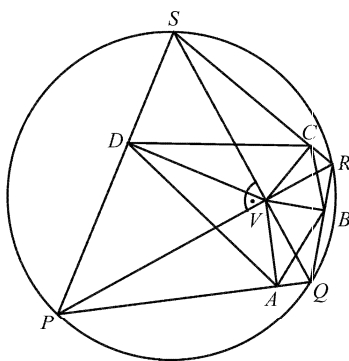
První (již dříve zmíněná) možnost snadné konstrukce obecného dvojstředového čtyřúhelníku plyne z kolmosti spojnic bodů dotyku kružnice vepsané. Tuto konstrukci s jinak pojatým důkazem lze nalézt v [6]. Postup je následující:

- dvě kolmé tětivy téže kružnice,
- tečny ke kružnici v krajních bodech tětív,
- průsečíky tečen jsou vrcholy dvojstředového čtyřúhelníku.

Jiný postup konstrukce dvojstředového čtyřúhelníku začíná podobně (obr. 6):

- dvě kolmé tětivy téže kružnice,
- čtyřúhelník s vrcholy v krajních bodech tětiv,
- kolmice z průsečíku úhlopříček na strany čtyřúhelníku,
- pátý kolmic jsou vrcholy dvojstředového čtyřúhelníku.

Průsečík úhlopříček výchozího čtyřúhelníku je střed vepsané kružnice výsledného dvojstředového čtyřúhelníku, průsečík spojnic středů protějších stran výchozího čtyřúhelníku je střed opsané kružnice, na níž leží i zmíněné středy stran. Na tomto místě je třeba dokázat, že čtyřúhelník sestrojený uvedeným postupem je skutečně dvojstředový a má uvedené vlastnosti.



Obr. 6

*Důkaz správnosti uvedené konstrukce:\*)* Označme  $PQRS$  výchozí tětivový čtyřúhelník,  $V$  průsečík jeho úhlopříček a  $A, B, C, D$  po řadě pátý kolmic z bodu  $V$  na strany  $PQ, QR, RS, SP$  (obr. 6).

Čtyřúhelník  $AQBV$  je tětivový (právé úhly u vrcholů  $A$  a  $B$ ), proto platí  $|\sphericalangle ABV| = |\sphericalangle AQV|$ . Ze stejného důvodu ve čtyřúhelníku  $PQRS$  platí  $|\sphericalangle PQS| = |\sphericalangle PRS|$  a ve čtyřúhelníku  $VBRC$  pak  $|\sphericalangle VRC| = |\sphericalangle VBC|$ . Protože  $|\sphericalangle AQV|$  a  $|\sphericalangle PQS|$  jsou různá označení téhož úhlu stejně jako  $|\sphericalangle PRS|$  a  $|\sphericalangle VRC|$ , celkem platí

$$|\sphericalangle ABV| = |\sphericalangle VBC|.$$

\*) Podobný důkaz lze najít například v [7].

Z toho plyne, že přímka  $VB$  je osa úhlu  $ABC$ . Analogicky jsou i přímky  $VC$ ,  $VD$  a  $VA$  osy úhlů  $BCD$ ,  $CDA$  a  $DAB$ . Protože všechny tyto osy vnitřních úhlů procházejí jedním bodem  $V$ , čtyřúhelník  $ABCD$  je tečnový a bod  $V$  je střed kružnice jemu vepsané.

Nyní zbývá dokázat, že čtyřúhelník  $ABCD$  je také tětiový. Již víme, že

$$|\sphericalangle BVQ| = |\sphericalangle BAQ| = 90^\circ - |\sphericalangle VAB| = 90^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle DAB|.$$

Analogicky

$$|\sphericalangle AVQ| = 90^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle BCD|.$$

Protože  $PR \perp QS$ , platí

$$|\sphericalangle BVQ| + |\sphericalangle AVQ| = 90^\circ,$$

neboli

$$|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| = 180^\circ,$$

což znamená, že čtyřúhelník  $ABCD$  je tětiový a důkaz je hotov.

Nakreslíme-li oba postupy s tímž výsledným dvojtředovým čtyřúhelníkem  $ABCD$  do jednoho obrázku, zjistíme, že pomocné čtyřúhelníky s vrcholy v krajních bodech výchozích tětív jsou podobné. Podrobnější zkoumání této podobnosti vede k mnoha dalším zajímavým závěrům.

## 5. Ponceletova lomená čára, Ponceletova věta

Řešením Fussova problému jsme došli k velmi zajímavému důsledku. Existuje-li pro dvě zadané kružnice čtyřúhelník opsaný jedné z nich a vepsaný do druhé, existuje nekonečně mnoho čtyřúhelníků s touto vlastností. Tento poznatek dalekosáhle zobecnil francouzský matematik *Jean Victor Poncelet* (1788–1867).

### Definice

Jsou dány dvě kružnice, jedna uvnitř druhé. Začneme-li v libovolném bodě vnější kružnice, vedeme tečnu k vnitřní kružnici, z průsečíku s vnější kružnicí opět vedeme tečnu k vnitřní atd., získáme tzv. *Ponceletovu lomenou čáru*. Je-li tato čára tvořena posloupností  $n$  tětív, mluvíme o  $n$ -stranné Ponceletově lomené čáře.

Analogicky lze Ponceletovu lomenou čáru definovat pro dvě kuželosečky. Více viz např. [3]. Ponceletovy lomené čáry mají pozoruhodnou vlastnost, kterou objevil a dokázal právě J. V. Poncelet a kterou na závěr uvádíme.

#### Věta 4

Je-li pro dvě zadané kružnice  $n$ -stranná Ponceletova lomená čára vedená z jednoho bodu vnější kružnice uzavřená (tvoří tzv. Ponceletův  $n$ -úhelník), pak je uzavřená a  $n$ -stranná pro libovolnou polohu počátečního bodu na vnější kružnici.

#### Literatura

- [1] *Dörrie, H.*: 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution. Dover Publications Inc., New York 1965.
- [2] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia (planimetrie). Prometheus, Praha 2001.
- [3] *Weisstein, E. W.*: Poncelet's Porism. MathWorld – A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/PonceletsPorism.html>
- [4] *Bogomolny, A.*: A Property of Circumscribed Quadrilaterals. Cut the Knot. <http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Geometry/CircumQuadri.shtml>
- [5] *Bogomolny, A.*: Collinearity in Bicentric Quadrilaterals. Cut the Knot. <http://www.cut-the-knot.org/ctk/BicentricQuadri.shtml>
- [6] *Bogomolny, A.*: Easy Construction of Bicentric Quadrilateral. Cut the Knot. <http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Geometry/BicentricQuadri.shtml>
- [7] *Bogomolny, A.*: Easy Construction of Bicentric Quadrilateral II. Cut the Knot. <http://www.cut-the-knot.com/Curriculum/Geometry/BicentricQuadri2.shtml>
- [8] *O'Connor, J. J. – Robertson, E. F.*: Nicolaus Fuss. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Fuss.html>, 1996.
- [9] *O'Connor, J. J. – Robertson, E. F.*: Jean Victor Poncelet. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. <http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/Mathematicians/Poncelet.html>, 1996.

Všechny uvedené elektronické zdroje jsou citovány ke dni 10. 7. 2006.

# Omlouvám se, že jsem to nevypočítal, ale kalkulačka to neuměla a v tabulkách jsem to nenašel

FRANTIŠEK JÁCHIM

Základní škola Volyně, Vyšší odborná škola a Střední průmyslová škola Volyně

V titulku jsem si dovolil použít sdělení žáka u přijímacích zkoušek nanečisto, které vepsal do zkušebního protokolu. Tento – naštěstí výjimečný – student vyzbrojen informacemi o tom, že skončilo tzv. biflování a nastal čas pouhého vyhledávání informací a využívání stále dokonalejší techniky, poznal na vlastní kůži, že k tomu, aby člověk uměl více, je nutné nejprve umět méně, ale přece jen *umět*. Možná mu nikdo neřekl, že získat vzdělání (a tím i potencialitu být v životě úspěšný a obecně prospěšný) vyžaduje systematické úsilí, námahu, přemýšlení a také trochu paměti. Jelikož „hledáčů“ tak základní vzorců, jakými je obsah čtverce, kruhu, obvodu obdélníku či Pythagorova věta bylo při pohledu do třídy více (někteří, když našli, již neměli čas řešit příklady), usoudil jsem, že přicházejí z prostředí, kde hlubší myšlenková činnost, postřeh a důvtip spolu se schopností se soustředit a usilovat jsou nahrazovány povrchností a podceněním výcviku v hlubší myšlenkové činnosti. Možná i pod vlivem prosakování *Rámcového vzdělávacího programu do Školních vzdělávacích programů*, který tak významně potlačuje učivo a jeho systém (naštěstí v matematice a fyzice snad relativně nejméně), ačkoli k získání cílové kompetence (v tomto případě asi řešení problémů) to bez zvládnutí určitého učiva a technik prostě nepůjde.

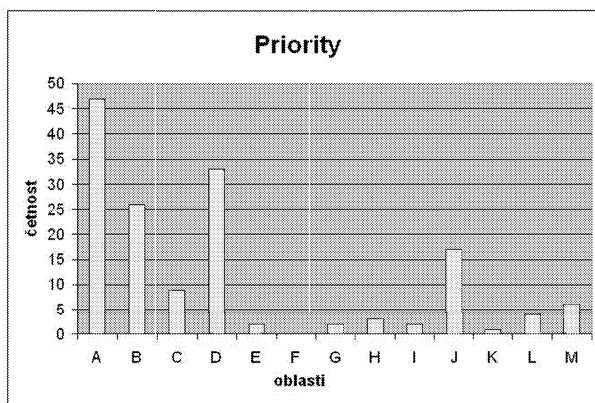
Když jsem si po absolvování školení pro koordinátory tvorby ŠVP na školách k pojům *motivovat žáky, vytvářet jim příjemné a milé prostředí a moc toho po nich nechtít*, sám doplnil takové pojmy jako *pravidelná příprava, úsilí, odpovědnost za vlastní výsledky, pečlivost, pořádnost, systematická práce, radost po úspěšné namáhavé práci*, začal jsem se svým týmem připravovat vlastní ŠVP.

Jelikož žáci po absolvování základní školy neodcházejí jen tak „do života“, nýbrž ve své profesionální přípravě pokračují na některé střední škole, kde jejich schopnosti jsou rozvíjeny již újeji zaměřenými směry ve

vztahu k budoucí kvalifikaci, považoval jsem za nutné (a také slušné) zeptat se i svých kolegů na středních školách. Hlavním úkolem školy základní je podle mého soudu připravit žáky tak, aby se v dalším studiu dobře adaptovali a byli v něm úspěšní. Jen tak ve finále mohou *něčím být*, což chápu jako první cíl jejich vzdělávání. Proto jsem z důvodů kontinuity vzdělání poprosil kantory tří typů středních škol (1 gymnázia, 1 střední odborné školy a 1 středního odborného učiliště) o sdělení názoru na budoucí absolventy základní školy. Šlo o střední školy kvalitní, jejichž absolventi snadno nalézají uplatnění buď v dalším studiu nebo ve svých oborech.

Některé otázky z mého dotazníku pro učitele středních škol si dovoluji včetně odpovědí uvést (leckde do dotazníku vepsali poznámky).

1) Které z následujících oblastí by měla základní škola označit jako prioritní? (Obr. 1)

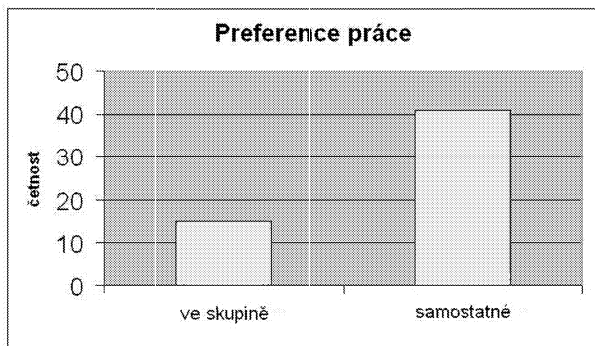


Obr. 1 A – četba a jazyková komunikace v českém jazyce, B – jazykové vzdělávání v anglickém jazyce, C – jazykové vzdělávání v dalším cizím jazyce, D – matematika, E – historie státních útvarů na našem území, F – historie Evropy, G – multikulturní výchova, H – environmentální výchova, I – mediální výchova, J – osobnostní a sociální výchova, K – výchova demokratického občana, L – sport, M – výchova směřující k získání manuálních dovedností

Učitelé středních škol výrazně preferují potřebu jazykového vzdělávání, dovednosti číst s porozuměním, umět se vyjadřovat (shoda se ZŠ). Pilířem pro vzdělávání v naukových oblastech se tu ukazuje matematika. Ve vzdělávacích programech bude hrát důležitou roli v mezipředmětových vztazích

především v návaznosti na studium přírodních věd i v celkovém pohledu člověka na efektivní řešení nejrůznějších problémů (shoda se ZŠ).

2) Žák ZŠ by měl být více veden k práci ve skupině nebo k práci samostatné? (Obr. 2)



Obr. 2

V tomto pohledu středoškolských učitelů je kladen důraz na osobní odpovědnost žáka při jeho vlastní práci a za jejích výsledky. Praxe zatím ukazuje, že vstup absolventa kterékoli školy do profesní kariéry je spíše soutěží než spoluprací. Požadavkem RVP ZV je naopak preference práce skupinové na úrovni spolupráce.

3) Absolvent ZŠ by měl mít

- a) více vědomostí,
- b) stejně vědomostí, ale lépe zvládnutých,
- c) méně vědomostí. (Obr. 3)

Středoškolští učitelé považují stávající rozsah vědomostí absolventa ZŠ za významný pro další vzdělávání. Jejich stávající rozsah se zdá jako optimální. Domnívám se, že zúžení rozsahu vědomostí by ztížilo přechod žáků na střední školy a vyvolalo by u nich velkou zátěž zejména v počátcích středoškolského studia.

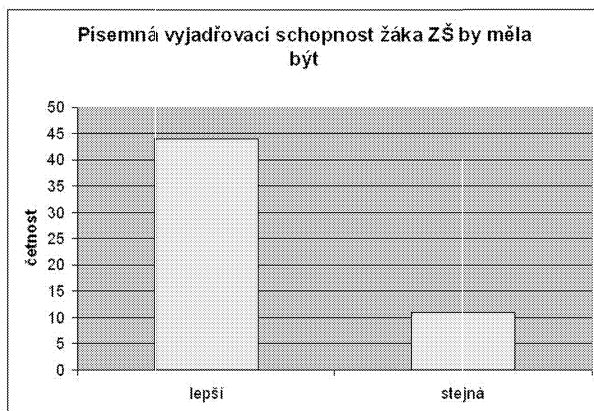


Obr. 3

4) Písemná vyjadřovací schopnost absolventa ZŠ

a) by měla být lepší,

b) vzhledem k používání komunikačních prostředků postačuje. (Obr. 4)

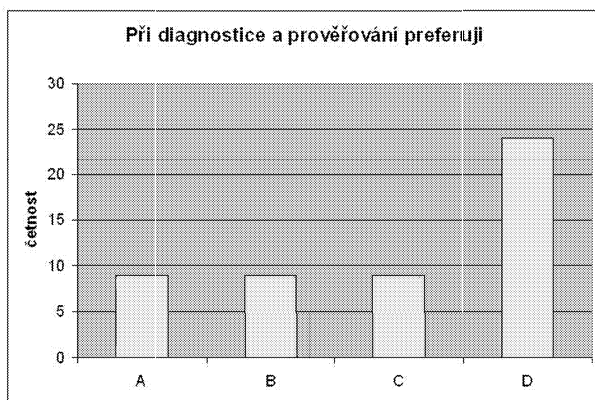


Obr. 4

Tyto odpovědi dobře korespondují s otázkou č. 1. I učitelé ZŠ pociťují výrazný pokles čtenářských dovedností, kvality čtení s porozuměním, což

přináší následné obtíže i ve výuce matematiky a ostatních předmětů. Žákům ZŠ chybí i dovednost komunikace v odborných termínech a symbolech jednotlivých oborů. Podle mého názoru se jejich komunikace stává obsažnější, ale prázdnější. Celá tato oblast (včetně matematiky a fyziky – jako příkladů symbolického vyjadřování) vyžaduje velkou pozornost.

- 5) Které metody při diagnostice a prověřování preferujete?
- a) standardizovaný test (SCIO, KALIBRO, CERMAT, aj.),
  - b) vlastní test (např. s volbou odpovědi),
  - c) individuální rozhovor,
  - d) písemné prověřování souborem otázek (úkolů, příkladů, ...).
- (Obr. 5)



Obr. 5 A – standardizovaný test, B – vlastní test, C – individuální rozhovor, D – písemné prověřování

Převládá písemná forma diagnostiky a prověřování. V matematice je výrazně uplatňován bodový (nebo procentový) systém převáděný v klasifikaci. Nastaveny jsou tak i celostátní evaluační nástroje nejen pro matematiku (např. KALIBRO, SCIO – procentní vyhodnocení úspěšnosti). I v matematice ZŠ (i fyzice) se jeví jako nejefektivnější a nejspravedlivější. Kritéria jsou zpravidla žákům známá předem a výsledné hodnocení je bezproblémové. Na středních školách je tato metoda evaluace používána mnohem více než na základní škole, žáci by měli na ZŠ být na toto připravováni.

Protože externě učím na střední škole a učil jsem i fyziku v 1. ročníku, pokouším se najít nejvhodnější „most“ mezi výukou na ZŠ a SŠ. Mám dojem, že na ZŠ je velká péče věnována žákovi jako takovému, zatímco na střední škole se více pečuje o jeho vzdělávání, což je pro jeho budoucnost významnější. V náročnějších podmínkách se totiž lépe rozvíjejí schopnosti studentů (chtějí-li sami k tomu přispět) a někteří jsou možná překvapeni, čeho pod pedagogickým tlakem učitelů mohou dosáhnout. Snížit náročnost studia na SŠ by znamenalo snížit hodnotu absolventa, což není vůbec žádoucí především v jeho zájmu.

A pokud jde o rodiče žáků ZŠ? I ti jsou přizváni, aby řekli svůj názor. V rámci SWOT analýzy nám rodiče žáků 8. ročníku dali najevo, že kvalitní a náročnou výuku matematiky plně schvalují – v anonymním dotazníku dali paní učitelce, která takto činí, známku 1, 35.

Proto s termínem *přízpůsobením základní školy žákovi* je třeba zacházet navýsost opatrně. Velmi pohodlný život ve školních lavicích může být jen předehrou k životním zklamáním.

## Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 10. 3. 2007 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v  $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

### Úloha 135

Nechť  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a  $d$  jsou obvykle označené délky stran konvexního čtyřúhelníku  $ABCD$  a  $e$ ,  $f$  délky jeho úhlopříček  $AC$  a  $BD$ . Dokažte, že platí

$$(e + f)^2 \leq (a + c)^2 + (b + d)^2.$$

Pro jaké konvexní čtyřúhelníky nastane rovnost?

*Radek Horenský*

### Úloha 136

Dokažte, že neexistuje reálné číslo  $c$ , pro které by čísla

$$x_1 = (c-1)(c-2)\dots(c-2006), \quad x_2 = (c+1)(c+2)\dots(c+2006)$$

byla kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 + (c^2 - 1^2)(c^2 - 2^2)\dots(c^2 - 2006^2) = 0.$$

*Jaroslav Zhouf*

Dále uvádíme bilanci za uplynulý (13.) ročník této rubriky, který je zároveň třetím ročníkem dalšího cyklu dlouhodobé soutěže. Redakce obdržela celkem 138 úplných nebo částečných řešení od 53 jednotlivců. Za každou úplně vyřešenou úlohu řešitel obdržel 6 bodů, za částečně vyřešenou 3 body;  $k$ -násobným laureátem této rubriky se stává ten řešitel, který získá od 11. ročníku alespoň  $k$ -násobek čísla 93 (rubrika byla založena v roce 1993).

Pořadí řešitelů po druhém ročníku druhého cyklu dlouhodobé soutěže:

1. *Anton Hnáth* z Moravan (132 b.), 2. *Jaroslav Hančl* z GMK Bílovec (102 b.), 3.–6. *Miroslav Hübsch* z Prahy 5, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Marek Pechal* z G Zlín, Lesní čtvrť a *Jan Uhlík*, z G Brno, tř. Kpt. Jaroše, (všichni 78 b.) 7. *Karol Gajdoš* z Trnavy (72 b.), 8. *Jozef Mészáros* z Jelky (69 b.).

Prvními laureáty druhého cyklu této rubriky se tak stávají *Anton Hnáth* a *Jaroslav Hančl*. Srdečně jim blahopřejeme a posíláme knihy z nakladatelství Prometheus.

*Pavel Calábek*