

MATEMATIKA

Nejen o objevu nesouměřitelnosti (iracionality) ve starověkém Řecku

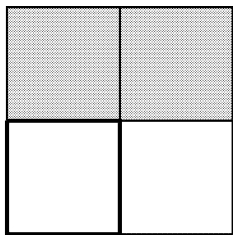
JAN HOUSKA

Výzkumný ústav pedagogický, Praha

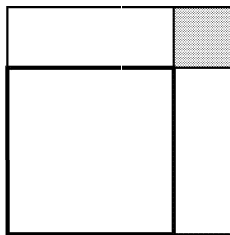
D. J. Struik: „*Nejzávažnějším objevem připisovaným pythagorejcům bylo odhalení iracionality jako nesouměřitelnosti úseček. Tento objev byl možná výsledkem jejich zájmu o střední geometrickou úměrnou $a : b = b : c$, která byla symbolem aristokratičnosti. Co bylo střední geometrickou úměrnou dvou posvátných symbolů 1 a $2^{\sqrt{2}}$, viz [2].*

Jedním z nejhlubších výsledků matematiky antického Řecka byl objev, že se v matematických úvahách mohou vyskytnout délky úseček, které nelze vyjádřit jako přirozený násobek jednotky délky vzhledem k jiné úsečce, jejíž délka tímto způsobem vyjádřit lze. Tato skutečnost označovaná jako nesouměřitelnost ukázala – vyjádřeno z dnešního pohledu, že v geometrii nevystačíme pouze s racionálními čísly – kromě racionálních čísel je třeba zavést čísla iracionální, jež není možno reprezentovat zlomkem s celočíselným čitatelem a jmenovatelem. Objev nesouměřitelnosti je připisován pythagorejské škole (asi polovina 5. stol. před n. l.), která je známa svými důmyslnými úvahami o přirozených číslech a jejich poměrech. Historie matematiky věnovala a dosud věnuje otázce objevu nesouměřitelnosti, jejímu přijetí, vývoji a zařazení do systému starověké řecké matematiky značnou pozornost, její závěry jsou však kvůli nedostatku věrohodných pramenů do značné míry hypotetické [1]. Naším cílem je vytěžit z těchto studií prvky, které jsou využitelné ve středoškolské matematice.

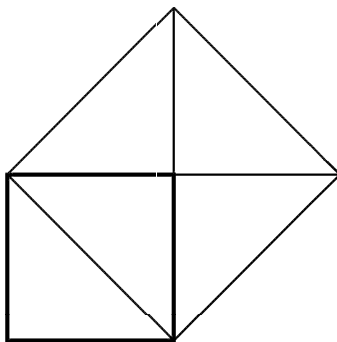
Nesouměřitelnost byla patrně objevena v souvislosti s výpočtem délky úhlopříčky čtverce. Známý důkaz sporem nesouměřitelnosti délky strany a úhlopříčky čtverce pochází z Eukleidových Základů (4. stol. před n. l.) a bývá označován jako důkaz typu „sudé a zároveň liché číslo“.



Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 1c

Původní pythagorejskou úvahu o objevu nesouměřitelnosti v tomto případě neznáme, lze se však domnívat, že určení délky úhlopříčky čtverce probíhalo obdobně, jak to zachytil *Platon* ve svém díle „Menon“: Sokrates vybízí chlapce – otroka, aby sestrojil čtverec s dvojnásobným obsahem, než má daný čtverec. Chlapec to zkouší třikrát. Poprvé zdvojnásobí stranu daného čtverce a zjistí z nákresu, že vznikne čtverec se čtyřikrát větším obsahem (obr. 1a). Potom zvětší stranu daného čtverce o polovinu a opět zjistí, že sestrojený čtverec má také větší obsah než dvojnásobek původního čtverce, totiž o čtvrtinu obsahu původního čtverce (obr. 1b). Po třetí zvolí jako stranu výsledného čtverce úhlopříčku daného čtverce

a z nákresu zjišťuje, že dostane přesně čtverec s dvojnásobným obsahem (obr. 1c). Na obrázcích je výchozí čtverec narýsován tučně. Šedou barvou je vyznačena část výsledného čtverce, která přesahuje požadavek úlohy. Délka úhlopříčky původního čtverce je tedy délka strany čtverce s dvojnásobným obsahem. Na to navazuje důkaz, že délku úhlopříčky nelze přesně vypočítat (vyjádřit racionálním číslem) pomocí délky strany.

Pro délku u úhlopříčky a s strany čtverce platí vztah $u^2 = 2s^2$.

Předpokládejme, že délku u úhlopříčky jednotkového čtverce ($s = 1$) lze vyjádřit jako poměr dvou přirozených čísel p a q . Potom platí

$$u^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2, \quad p \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{N}$$

a můžeme navíc předpokládat, že čísla p , q jsou navzájem nesoudělná. Po úpravě dostaneme

$$p^2 = 2q^2 \quad (1)$$

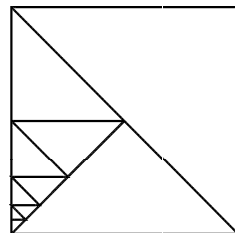
tudíž p^2 je sudé a tedy rovněž p je sudé číslo, takže q by mělo být (vzhledem k předpokládané nesoudělnosti) liché. Dosadíme-li do (1) $p = 2m$, kde $m \in \mathbb{N}$, dostaneme

$$q^2 = 2m^2$$

takže q^2 a také q má být sudé, což je spor s nesoudělností přirozených čísel p a q . Délka úhlopříčky jednotkového čtverce nemůže být vyjádřena racionálním číslem [2]. V Eukleidových Základech nacházíme tento důkaz v geometrické podobě – jako úvahu o délce u strany čtverce, který má dvakrát větší obsah než čtverec o straně délky s .

Uvedená úvaha vede k tomu, že v podílu délek úhlopříčky a strany čtverce lze do nekonečna krátit dvěma. Tento závěr možno nahlédnout graficky (obr. 2).

Objev nesouměřitelnosti (řecky – $\alpha'\lambda\sigma\gamma\sigma\varsigma$, $\alpha'\sigma\upsilon'\mu\mu\epsilon\tau\gamma\sigma\varsigma$) je pokládán za počátek deduktivního myšlení v řecké matematice, za odklon od empirie. Je možné, že doprovodným jevem pro vznik pojmu souměřitelnosti a jeho negace byla zkušenost při studiu harmonických souzvuků vzniklých při rozeznění strun ze stejného materiálu, jejichž délky jsou v poměru malých celých čísel, pokus o rozdělení oktávy podle úměry



Obr. 2

$1 : x = x : 2$ (geometrický průměr čísel 1 a 2), vedl k disharmonii [3]. Studium tónů a zvuku bylo jednou z důležitých oblastí výzkumu pythagorejské školy. Nesouměřitelnost ovšem mohla být objevena pouze matematickou (logickou) úvahou, ne pokusně.

Důkaz existence nesouměřitelnosti (iracionality) mohl souviset s hledáním největšího společného dělitele dvou přirozeným čísel (nebo společné míry dvou veličin – délek, obsahů nebo objemů), a tedy s aplikací Eukleidova algoritmu pro nalezení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel. Dělíme-li délku (Řekové užívali postupné odčítání) úhlopříčky u délkou její strany s , dostaneme

$$\frac{u}{s} = 1 + \frac{u-s}{s}.$$

Dále pokračujeme tak, že dělíme dělitele zbytkem, tj.

$$\frac{s}{u-s} = 2 + \frac{3s-2u}{u-s}.$$

Avšak

$$\frac{3s-2u}{u-s} = \frac{u-s}{s},$$

neboť

$$u^2 = 2s^2.$$

Algoritmus je v našem případě nekonečný a vede k nekonečnému řetězovému zlomku

$$\frac{u}{s} = 1 + \frac{1}{\frac{s}{u-s}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{u-s}{s}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\dots}}$$

Vidíme, že tento řetězový zlomek je periodický. (Je známo, že právě kvadratické iracionality mají rozvoje v řetězové zlomky periodické.)

Protože $\frac{u}{s} = \sqrt{2}$, dostáváme vyjádření $\sqrt{2}$ řetězovým zlomkem, jehož první aproximace jsou $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29} \dots$. Užití nekonečného Eukleidova algoritmu pro důkaz nesouměřitelnosti není doloženo, nicméně *Aristarchos ze Samu* a *Platon* užili pro poměr délky úhlopříčky a strany čtverce hodnotu $7 : 5$ a Heron z Alexandrie $17 : 12$. K těmto aproximacím lze dospět také jiným způsobem. Rovnice

$$u^2 - 2s^2 = 0,$$

jak jsme ukázali, nemá řešení v oboru přirozených čísel. Vzniká tedy přirozená otázka týkající se řešení rovnice

$$u^2 - 2s^2 = \pm 1 \quad (2)$$

v oboru přirozených čísel. Užitím principu matematické indukce snadno dokážeme, že řešením rovnice (2) je každá dvojice u_n, s_n tvaru

$$u_1 = 1, \quad s_1 = 1, \quad u_{n+1} = 2s_n + u_n \quad s_{n+1} = s_n + u_n.$$

Odtud opět dostaneme výše uvedené racionální aproximace pro $\sqrt{2}$. Když dělíme obě strany rovnice (2) výrazem s^2 , obdržíme $\frac{u^2}{s^2} - 2 = \frac{1}{s^2}$. Tento tvar rovnice (2) již napovídá, že čím větší s zvolíme, tím lepší bude aproximace čísla $\sqrt{2}$.

Zatím jsme se zabývali především iracionálním poměrem délky úhlopříčky a strany ve čtverci. Řekové říkali, že „úhlopříčka a strana čtverce není souměřitelná v délce, je však souměřitelná ve čtverci“ – neexistuje délková jednotka tak, aby délka strany čtverce a zároveň úhlopříčka byly celočíselnými násobky této jednotky, ale existuje jednotka obsahu tak, že obsah čtverce nad stranou i úhlopříčkou čtverce jsou celočíselnými násobky jednotky obsahu.

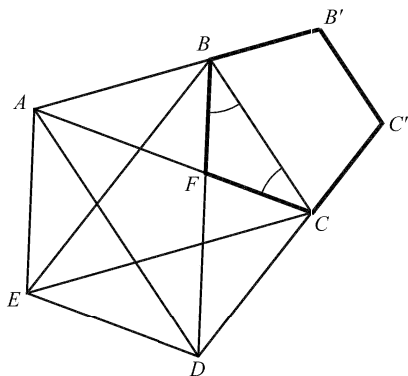
Naproti tomu Řekové věděli, že „součet úhlopříčky a strany není souměřitelný se stranou ani v délce, ani ve čtverci“. Že není součet délky úhlopříčky a strany čtverce souměřitelný s délkou strany, je zřejmé, že platí také druhé tvrzení, plyne ihned výpočtem podílu

$$\left(\frac{u + s}{s} \right)^2 = 3 + 2 \cdot \frac{u}{s}$$

Právě uvedený objev nesouměřitelnosti má úzký vztah k Pythagorově větě. Prvotní představa pythagorejské školy zřejmě byla, že délky stran ve všech pravoúhlých trojúhelnících lze vyjádřit vždy přirozenými čísly, podobně jako v případě pythagorejských trojúhelníků 3, 4, 5 nebo 5, 12, 13 nebo 8, 15, 17 apod. Tento dojem narušila analýza situace v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku, její obdoba se objevila v dalších pravoúhlých trojúhelnících. Kolem roku 410 před n. l. dokázal žák pythagorejců *Theodoros z Kyrény*, že také délky $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$ atd. až do $\sqrt{17}$ jsou vesměs iracionální čísla. Nevíme ale, jak k tomu dospěl, mohl však užít

obdobu předchozí úvahy, např. uvažovat, zda délka třetí strany v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou dvakrát delší než je jedna z odvěsen může být číslo racionální). Podobně lze dokázat, že $\sqrt[3]{2}$ je iracionální (*Theaitetos z Athén*, 414–369 před n. l.). Délka úsečky daná tímto číslem se objevila při řešení problému o zdvojení objemu krychle (tzv. dělský problém), úsečka této délky navíc není *sestrojitelná* z jednotkové úsečky pouhým pravítkem a kružítkem (eukleidovsky), viz [2].

Na základě některých pramenů vznikla hypotéza, že nejdříve byla objevena nesouměřitelnost úseček v pravidelném pětiúhelníku, který souvisel se znakem pythagorejské školy, viz [4] a [8].



Obr. 3

Na obr. 3 je zobrazen pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Nechť dále

$$F \in \overline{AC} \cap \overline{BD}, \quad \triangle ABC \sim \triangle BFC(uu), \quad |AB| = |BC| = |AF|,$$

takže platí

$$\begin{aligned} |AC| : |AB| &= |BC| : |FC| = |AC| : |AF| = \\ &= |AF| : |FC| = |AB| : (|AC| - |AB|) \end{aligned} \quad (3)$$

To je však známý „poměr zlatého řezu“ (termín zavedl až *Leonardo da Vinci* v 15. stol.). Zvolíme-li $|AB| = 1$, pak

$$|AC| = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \quad (4)$$

Nesouměřitelnost úseček AC a AB je vidět z (3) na první pohled, poměr $|AC| : |AB|$ předpokládaný v základním tvaru lze vyjádřit podle (3) zlomkem s menším čitatelem a jmenovatelem, což je spor s předpokladem. Takto lze pokračovat do nekonečna, to lze opět nahlédnout graficky, strana BC je úhlopříčkou dalšího pravidelného pětiúhelníku $BB'C'CF$ atd. (obr. 3) S využitím Eukleidova algoritmu obdržíme z (3) vyjádření $|AC|$ (tj. poměr zlatého řezu) řetězovým periodickým zlomkem

$$\frac{|AC|}{|AB|} = 1 + \frac{|AC| - |AB|}{|AB|} = 1 + \frac{1}{\frac{|AC|}{|AB|}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}.$$

Podle této verze si pythagorejci byli vědomi, že jejich znak obsahuje tajemství nesouměřitelnosti, které zde bylo očividnější než ve čtverci. (Všimněme si, že k důkazu nesouměřitelnosti tímto způsobem není zapotřebí Pythagorova věta.) Podle legendy byl pythagorejec *Hippasos z Metapontu* za prozrazení tajemství nesouměřitelnosti proklet a bohové ho utopili v moři. (Podle jiné verze byl pouze vyhoštěn z kruhu pythagorejců a byl mu vystaven fiktivní hrob, ale možná se naplnily následně skutky oba.) Byl potrestán za to, že prozradil objev nesouměřitelnosti, nebo za to, že ve čtverci objevil to, co bylo posvátné v pythagorejském znaku?

Pravidelný pětiúhelník byl v antice znám jako stěna pravidelného dvácnástistěnu (v tomto tvaru krystalizují pyrity, které se vyskytují v Itálii, setkáváme se s ním již u Etrusků). Vedle tohoto pravidelného tělesa znali pythagorejci pravidelný čtyřstěn, pravidelný šestistěn (krychli) a pravidelný osmistěn. Pravidelný mnohostěn je konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou navzájem shodné pravidelné mnohoúhelníky a každým vrcholem prochází stejný počet hran. (Dva shodné pravidelné čtyřstěny „slepené“ v jedné stěně nevytvoří pravidelný mnohostěn!) Naznačíme, jak lze „objevit“ všechny pravidelné mnohostěny. Z každého vrcholu pravidelného mnohostěnu vychází stejný počet m hran a každá stěna je pravidelný n -úhelník ($n \geq 3, m \geq 3$).

Velikost vnitřního úhlu jeho stěny je

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} < 360^\circ$$

Každý vrchol mnohostěnu je společným vrcholem m úhlů této velikosti a jejich součet je menší než 360° . Dostaneme tak nerovnici

$$\frac{m(n-2) \cdot 180^\circ}{n} < 360^\circ$$

a po snadné úpravě tedy

$$(m-2)(n-2) < 4 \quad (5)$$

V oboru přirozených čísel za dané podmínky řeší nerovnici (5) právě pět dvojic:

$$[3, 3], [3, 4], [4, 3], [3, 5], [5, 3]$$

Označíme-li počet vrcholů pravidelného mnohostěnu v , počet jeho stěn s a počet jeho hran h , máme

$$vm = 2h, \quad sn = 2h. \quad (6)$$

V každém konvexním mnohostěnu přitom platí známý Eulerův vztah

$$s + v = h + 2 \quad (7)$$

Pomocí řešení nerovnice (5) a dále využitím vztahů (6) a (7) můžeme sestavit tabulku

m	n	v	s	h	
3	3	4	4	6	pravidelný čtyřstěn
3	4	8	6	12	pravidelný šestistěn (krychle)
4	3	6	8	12	pravidelný osmistěn
3	5	20	12	30	pravidelný dvanáctistěn
5	3	12	20	30	pravidelný dvacetistěn

Všech pět typů pravidelných mnohostěnů existuje (pythagorejci znali jen čtyři) a jsou analyzovány v Eukleidových Základech, platónská filozofie připisovala tvaru atomů základních živlů tvar pravidelných mnohostěnů : čtyřstěn – ohni, dvacetistěn – vodě, osmistěn – vzduchu, krychle – zemi, dvanáctistěn – vesmíru, viz např. [6].

Pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ lze sestrojit eukleidovsky. Užitím (4) a Pythagorovy věty (obr. 4) – podle *Herona z Alexandrie* v 1. stol. n. l. – sestrojíme úhlopříčku AC . Jestliže

$$|AB| = 1, \quad |BG| = |CG| = \frac{1}{2}, \quad \text{pak } |AG| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad |AC| = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}).$$

Zavedením substituce

$$y = x + \frac{1}{x}$$

přejdeme ke kvadratické rovnici

$$y^2 + y - 1 = 0. \quad (10)$$

Její kořeny jsou

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Pomocí tohoto výsledku již určíme kořen x_2 rovnice (8), který odpovídá vrcholu A_2 uvažovaného pravidelného pětiúhelníku. Platí

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

a dále

$$|A_1 A_2| = |x_1 - x_2| = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Geometrická konstrukce délky úsečky je připomenuta na obr. 5.

$$|SA_1| = 1, \quad M \in SA_1, \quad |MS| = |MA_1|, \quad |MN| = |MP|, \quad |PN| = |A_1 A_2|.$$

Čtenáři ponecháváme důkaz toho, že kladný kořen rovnice (10) je délkou strany $B_1 B_2$ pravidelného desetiúhelníku (vepsaného do jednotkové kružnice), že $|B_1 B_2| = |PS|$. Lze jej mj. najít např. v [9]. Dále lze také ukázat, že v tomto případě platí pro délky stran pravidelného šesti, deseti a pětiúhelníku zajímavý vztah

$$d_6^2 + d_{10}^2 = d_5^2,$$

který znal již Euklides.

(Návod: Užijte početně i graficky součet komplexních čísel $x_2 + x_5$.)

Geometrická klasifikace druhých odmocnin a „druhých odmocnin z druhých odmocnin“ je uvedena v Euklidových Základech a je připisována zmíněnému Theaitetovi z Athén, který také studoval pátý z pravidelných mnohostěnů – pravidelný dvacetistěn [6].

Literatura

- [1] *Knorr, W. R.*: The Evolution of the Euclidean Elements, A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry, D.Reidel Publishing Company 1975, Dordrecht, Holland.
- [2] *Struik, D. J.*: Dějiny matematiky, MME 43, Orbis, Praha 1963.
- [3] *Szabó, A.*: The Beginnings of Greek Mathematics, Akadémiai Kiadó, Budapest 1978.
- [4] *Vopěnka, P.*: Rozpravy s geometrií, Pyramida, Praha 1989, s. 86–89.
- [5] *Šofr, B.*: Euklidovské geometrické konstrukcie, Alfa, Bratislava 1976, s. 164–165.
- [6] *Kolman, A.*: Dějiny matematiky ve starověku, Academia, Praha 1968, s. 110–112.
- [7] *Tropfke, J.*: Geschichte der Elementar-Mathematik, Band 4, Walde de Gruyter et Co., Berlin 1940, s. 241–245.
- [8] *Cooke, R.*: The History of Mathematics, A Brief Course, John Wiley et Sons 1997, New York – Chichester – Weinheim – Brisbane – Singapore – Toronto, s. 74–78.
- [9] *Švrček, J.*: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku. Matematika a fyzika ve škole, roč. 16, č. 8. 1985/86, s. 524–527.

Co, proč a jak ve školské matematice V

RŮŽENA BLAŽKOVÁ

Pedagogická fakulta MU, Brno

Celá čísla, zejména záporná

S přirozenými čísly a s nulou děti počítají již od prvního stupně základní školy, avšak zavedení záporných čísel se realizuje až na druhém stupni ZŠ, zpravidla v sedmém ročníku. Tak, jak bylo problematické pochopení záporného čísla v historii, tak se můžeme setkat s problémy při počítání se zápornými čísly i u některých žáků. Z historického hlediska lidé počítali daleko dříve s kladnými zlomky než se zápornými čísly. Počítání se zápornými čísly se však vyvíjelo mnohem obtížněji než počítání se zlomky a vývoj trval více než tisíc let.

První náznaky lze najít u *Diofanta z Alexandrie*, který sice záporná čísla neznal, ale jeho početní výrazy se skládají z tzv. „přičítaných“ jako čísel přidávaných a „odčítaných“ jako čísel odebíraných. Daleko lepší představu o záporných číslech měli čínští a indiští matematikové. V Číně se při evidenci majetků a dluhů vyskytla potřeba zapisovat kladná a záporná čísla

jako samostatné objekty a používali k zápisu dvě barvy (k označení čísel kladných barvu červenou a k označení záporných čísel barvu černou) – Matematika v devíti knihách (1. století). V Indii vychází představa záporných čísel rovněž z účetnictví a záporná čísla jsou zapisována s tečkou nad nimi umístěnou. Indičtí matematikové, zejména *Brahmagupta* a *Bhaskara* (7. století), překračují rámec vazby na konkrétní představy celých čísel a formulují poměrně přesná pravidla pro počítání se zápornými čísly.

V Evropě se představy záporných čísel zpočátku spojovaly s představou aktiva a dluhu, avšak ještě v 17. a 18. století někteří matematikové popírali objektivnost existence záporné veličiny. Vyskytly se různé paradoxy spojené s počítáním se zápornými čísly, které vycházely z představ předmětných, problémy přinášely záporné kořeny algebraických rovnic. Řešení různých paradoxů a zejména pak nové podněty, které přinesla geometrie (*René Descartes* – záporné souřadnice v analytické geometrii) a fyzika (*Isaac Newton* – záporné zrychlení) přispěly k hlubšímu studiu čísel záporných. *Leonhard Euler* chápal záporná množství jako reálná a uváděl, že je vždy možno ukázat, co představují. Pochopil, že množina reálných čísel je jedinou strukturou a vymezil její zákonitosti. Axiomatické vybudování aritmetiky v 19. století pak přineslo vyřešení problému existence čísel záporných.

V algebře se rozšiřování číselných oborů opírá o izomorfismus struktur (v nově vytvořené struktuře musí existovat vlastní část, která je izomorfní s původním oborem). Vlastní konstrukce se nazývá izomorfním vnořením např. pologrupy všech přirozených čísel do grupy všech celých čísel. Rozšíření polookruhu všech přirozených čísel na obor integrity všech celých čísel se tedy provádí pomocí vnořování jednotlivých algebraických struktur. Pomocí uspořádaných dvojic přirozených čísel se definuje určitá relace mezi uspořádanými dvojicemi. O této relaci je možno dokázat, že je relací ekvivalence, která rozkládá množinu všech přirozených čísel na třídy navzájem ekvivalentních uspořádaných dvojic a tyto třídy jsou celá čísla. Poté se definuje uspořádání, součet, součin celých čísel.

S jakými představami záporných čísel se setkávají děti na základní škole? Nejčastější (již na prvním stupni ZŠ) je měření teplot nad nulou i pod nulou, ve výtahu se mohou setkat s označením dolních podlaží pod přízemím, v soutěžích označují kladné a záporné body, na vodní hladině se mohou setkat s označením pod normálem a nad normálem. V dějepise se žáci setkávají s označením roků před našim letopočtem, v zeměpise s označením prohlubní pod hladinou moře, v biologii se mohou setkat s rozmezím

teplot, ve kterých mohou žít různí živočichové a rostliny. Při poskytovní úvěrů se setkají s formou dluhu. Setkají se také se situací, kdy mají odečíst větší číslo od menšího a mnoho dětí již na prvním stupni dokáže tento rozdíl vypočítat. Podněty v běžném životě jsou rozmanité a je vhodné využít všech, které děti osloví.

Všechny modely záporných čísel z reálného života můžeme vyjádřit buď jako záporná množství (dluhy, chybějící prvky) nebo jako záporné údaje na stupnicích (teploměr, časová přímka, číselná osa) nebo jako výsledky operací (odebírání, odčítání, pohyb zpět). Z didaktického hlediska je toto téma poměrně náročné a je třeba poskytnout dětem dostatek času a jim blízké modely, na nichž záporná čísla a počítání s nimi lépe pochopí. Téma může vést také k formalismu ve výuce, neboť pouhé mechanické uplatňování různých pouček bez patřičného pochopení nevytváří potřebné poznatky. Nezvládnutí tématu se projeví později, při počítání se závorkami v číselných a algebraických výrazech, úpravách algebraických výrazů, řešení rovnic apod.

V rámci numerace se děti seznamují se záporným číslem a je dobré využít všech dostupných modelů, které děti nejlépe pochopí. Zde je třeba poukázat na další význam znaménka „–“. Doposud se s ním děti setkávaly jako s označením operace odčítání, nyní se užívá k označení záporného čísla. Žáci se naučí celá čísla zapisovat a číst, znázorňovat je na číselné ose. Současně se znázorňováním celých čísel na číselné ose se objeví pojem čísla opačného k danému číslu a další, již třetí význam znaménka „–“ k označení čísla opačného k danému číslu. Opačné číslo k číslu 8 je -8 , opačné číslo k číslu -8 je $-(-8)$, což je $+8$. Zde nacházíme podstatu mnemotechnické pomůcky, kterou žáci často používají: „mínus a mínus dává plus“. Znaménko „–“ má tedy tři významy

- slouží jako symbol k označení operace odčítání,
- označení čísla záporného,
- označení opačného čísla k danému číslu.

Znázorňování celého čísla na číselné ose a čísla k němu opačného vytváří předpoklady ke geometrickému chápání významu absolutní hodnoty celého čísla. Zde je třeba zdůraznit, že absolutní hodnota celého čísla je celé nezáporné číslo, pro něž platí:

Jestliže $a > 0$, pak $|a| = a$. Jestliže $a = 0$, pak $|a| = 0$. Jestliže $a < 0$, pak $|a| = -a$, přitom $-a$ je číslo kladné, neboť je to opačné číslo k zápornému

číslu a . Velikost úsečky na číselné ose s krajními body 0 a obraz příslušného čísla je geometrická interpretace absolutní hodnoty.

Provnávání celých čísel

Porovnávání čísel celých vychází z porovnávání čísel přirozených. Na prvním stupni děti porovnávají přirozená čísla buď pomocí zobrazení, tj. ve skupinách, které mají málo (např. méně než dvacet) prvků, vytvářejí dvojice a rozhodují, kde je více, stejně nebo méně prvků a na tomto základě provnávají čísla přirozená. Dále porovnávají přirozená čísla pomocí zápisu čísel v desítkové soustavě, kdy porovnávají počet jednotek příslušného řádu. K porovnávání přirozených čísel využívají také číselnou osu. Ze dvou čísel na číselné ose je větší to, jehož obraz je víc vpravo. U záporných čísel je situace složitější, protože např. $-50 < -20$, ale když děti chápou nesprávně interpretaci záporného čísla, myslí si, že dluh 50 Kč je větší než dluh 20 Kč, pak porovnají $-50 > -20$. Navíc, když se děti naučí porovnávat přirozená čísla na číselné ose pomocí vzdálenosti od počátku číselné osy („číslo 50 je větší než 20, protože je dál od nuly“), mají potom problémy s porovnáváním čísel záporných. Při porovnávání celých čísel je třeba vycházet ze správných interpretací (např. porovnávat teplotu, nikoliv „zimu“ apod.) a správně ilustrovat porovnávání na číselné ose - ze dvou celých čísel znázorněných na číselné ose je větší to, jehož obraz je vpravo od obrazu druhého čísla. Z toho pak vyvozují následující závěry:

- každé kladné číslo je větší než nula,
- každé záporné číslo je menší než nula,
- každé kladné číslo je větší než číslo záporné.

Sčítání a odčítání celých čísel

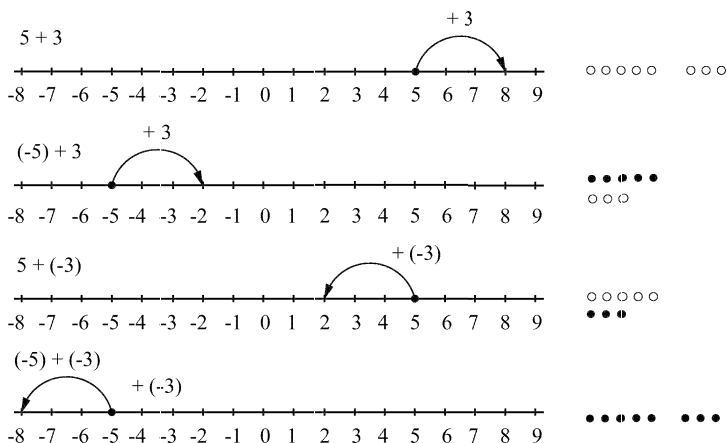
Sčítání celých čísel je v matematice definováno pomocí sčítání uspořádaných dvojic přirozených čísel, které reprezentují čísla celá. Každé celé číslo lze totiž zapsat jako rozdíl dvou přirozených čísel a, b , tj. $(a, b) = a - b$. Platí tedy

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Ve školské matematice se vychází z konkrétních představ (nejčastěji dluh, aktivum) a postupně se vyvozují jednotlivé spoje, které se zobecňují, např. následujícím způsobem:

- $5 + 3 = 8$
- $-5 + 3 = -2$
- $5 + (-3) = 2$
- $(-5) + (-3) = -8$

Znázornění je možno provádět buď na číselné ose, nebo se pomocí číselné osy ilustruje pohyb pomocí kroků doprava nebo doleva, nebo se používají knoflíky bílé (k označení čísla kladného) a černé (k označení čísla záporného), nebo kroužky s označením „+“ a „-“, kdy je možno využít aktiva a úbytku, nebo se pracuje s absolutními hodnotami celých čísel, viz obr. 1. Se všemi těmito možnostmi znázornění sčítání se můžeme setkat v různých řadách učebnic matematiky pro základní školy.



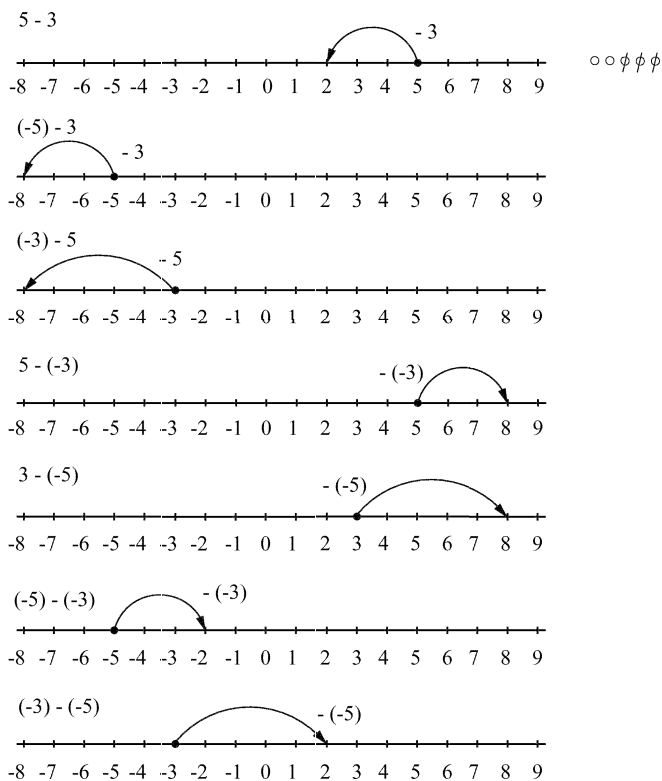
Obr. 1

Vlastnosti operace sčítání celých čísel, kterými jsou komutativnost sčítání (záměna sčítanců), asociativnost sčítání, (sdružování sčítanců), existence neutrálního prvku (přičítání nuly) a existence inverzního prvku ke každému prvku (číslo opačné) se uvádějí průběžně a na závěr se shrnou například v tabulce.

Odčítání je inverzní operací ke sčítání, takže pokud pro celá čísla a , b , c platí $a + b = c$, pak $c - b = a$ a také $c - a = b$. Jestliže např. $(-3) + (-5) = -8$, pak $(-8) - (-5) = (-3)$ a také $(-8) - (-3) = (-5)$. Odčítání se rovněž nejdříve odvozuje pro jednoduché případy a poté se zobecňuje. Jedná se o příklady typu:

- $5 - 3 = 2$,
- $(-5) - 3 = -8$,
- $(-3) - 5 = -8$,
- $5 - (-3) = 8$,
- $3 - (-5) = 8$,
- $(-5) - (-3) = -2$,
- $(-3) - (-5) = 2$.

Některé příklady odčítání lze znázornit pomocí aktiva a dluhu, všechny pak pomocí číselné osy nebo s využitím absolutních hodnot celých čísel (obr. 2).



Obr. 2

Velmi užitečné je poukázat ve výuce na souvislost sčítání a odčítání na konkrétních příkladech a dát tak podklad větám: Odečíst celé číslo znamená přičíst číslo opačné. Přičíst dané celé číslo znamená odečíst číslo opačné.

$$5 - 3 = 5 + (-3), \quad 5 - (-3) = 5 + 3 \quad \text{atd.}$$

Různé mnemotechnické pomůcky a „znaménková pravidla“ mohou některým žákům přinést přehled a pomůcku k počítání. Pro děti, které mají problémy s pamětí, mohou být zavádějící a někdy se jim pletou. Poté, co se naučí celá čísla násobit, mají někteří žáci ve znaménkách zmatek. Každá paměťová pomůcka by se vždy měla opírat o řádné odvození.

K procvičování operací sčítání a odčítání celých čísel lze využít jednak série příkladů z učebnic, jednak různých didaktických her, jako jsou lota, domina, křížovka se samokontrolou, magické čtverce, různé tabulky apod. Je možno využít i pohybových her, ve kterých se vyhledávají dvojice se stejným výsledkem daných operací nebo se mohou vytvářet skupiny žáků, kteří mají po výpočtu svých různých příkladů stejný výsledek apod.

L i t e r a t u r a

- [1] *Balada, F.*: Z dějin elementární matematiky. SPN, Praha 1959.
- [2] *Struik, D. J.*: Dějiny matematiky. Orbis, Praha 1963.
- [3] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky. SPN, Bratislava 1990.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme řešení úloh 129 a 130, jejichž zadání byla zveřejněna v devátém čísle loňského (15.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 129

V oboru přirozených čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} D(x, y) &= D(x + 3, y + 3), \\ n(x + 3, y + 3) &= 2 \cdot n(x, y), \end{aligned}$$

kde $D(x, y)$, $n(x, y)$ značí největšího společného dělitele, resp. nejmenší společný násobek přirozených čísel x a y .

Jaroslav Švrček

Řešení:

Pro všechna přirozená čísla a, b platí $ab = D(a, b) \cdot n(a, b)$.

Podle zadání pak dostaneme

$$2xy = 2 \cdot D(x, y) \cdot n(x, y) = D(x+3, y+3) \cdot n(x+3, y+3) = (x+3)(y+3).$$

Rovnici $2xy = (x+3)(y+3)$ upravíme na tvar

$$(x-3)(y-3) = 18. \quad (1)$$

Protože x a y jsou přirozená čísla, jsou s ohledem na možné rozklady čísla 18 v součin dvou celých čísel nutně také $x-3$ a $y-3$ přirozená čísla. Všechny vyhovující rozklady čísla 18 na součin činitelů z oboru přirozených čísel a jim odpovídající řešení rovnice (1) zapíšeme do tabulky.

$x-3$	1	2	3	6	9	18
$y-3$	18	9	6	3	2	1
x	4	5	6	9	12	21
y	21	12	9	6	5	4

Zkouškou snadno ověříme, že všechna řešení (x, y) dané soustavy jsou

$$(4; 21), (5; 12), (6; 9), (9; 6), (12; 5), (21; 4).$$

Správné řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Zdeněk Koňářik* ze Zruče, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Anežka Faltýnková* z GJŠ v Přerově, *Miloslav Holík*, *Tomáš Jeziorský*, *Miroslav Klímoš*, *Lucie Mohelníková*, *Vít Orava* a *Miroslav Štufka*, všichni z GMK v Bílovci, *Jan Komínek*, *Zbyněk Konečný*, *Samuel Říha*, *Jiří Řihák*, *Hana Šormová* a *Petr Velan*, všichni z G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Korbel* z G v Jihlavě, *Lukáš Malina* z GChD v Praze, *Jana Medková* z G v Brně, Křenová, *Tomáš Princ* z WG v Ostravě-Porubě a *Lenka Slavíková* z G v Mnichově Hradišti.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně a *Jitka Novotná* z GMK v Bílovci.

Úloha 130

Je dána úsečka AB s vnitřním bodem C . Určete množinu všech bodů D takových, že poloměr kružnice opsané trojúhelníku BCD je dvakrát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku ACD .

Jaroslav Zhouf

Řešení:

Uvažujme libovolný trojúhelník s poloměrem r kružnice jemu opsané. Nechť a, b, c značí velikosti jeho stran a α, β, γ velikosti odpovídajících vnitřních úhlů. Potom platí

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r.$$

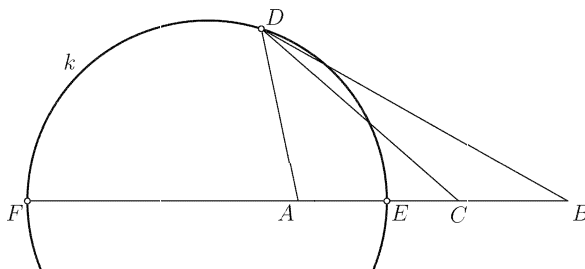
Pro poloměry r_1 a r_2 kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ACD a BCD platí na základě výše uvedeného vztahu

$$r_1 = \frac{|AD|}{2 \sin |\angle ACD|}, \quad r_2 = \frac{|BD|}{2 \sin |\angle BCD|}.$$

Protože $\sin |\angle BCD| = \sin |\angle ACD|$, hledáme body D s vlastností

$$\frac{1}{2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|AD|}{2 \sin |\angle ACD|} \cdot \frac{2 \sin |\angle BCD|}{|BD|} = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Poněvadž množinou všech bodů X roviny, pro něž platí $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{1}{2}$, je Apolloniova kružnice, leží bod D nutně na této kružnici. Uvažovaná Apolloniova kružnice k je sestrojena nad průměrem EF , kde bod E je bodem úsečky AB , pro který platí $\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{1}{2}$, a bod F je bodem polopřímky opačné k polopřímce AB , pro který platí $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{1}{2}$.



Naopak, každý bod D , který leží na této (Apolloniově) kružnici k a současně neleží na přímce AB má danou vlastnost.

Správné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Miloslav Hübsch* z Prahy 5, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Vladimír Pavel* z Blovic, *Zbyněk Konečný* z G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Lukáš Malina* z GChD v Praze, *Jana Medková* z G v Brně, Křenová, *Jitka Novotná* z GMK v Bílovci a *Lenka Slavíková* z G v Mnichově Hradišti.