

MATEMATIKA

Jaká matematika se ukrývá v pražském orloji?

MICHAL KRÍŽEK – LAWRENCE SOMER – ALENA ŠOLCOVÁ

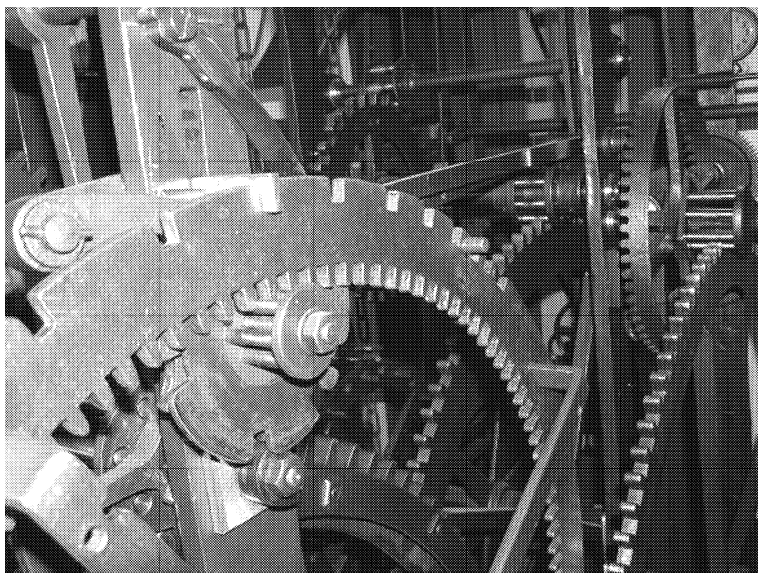
Matematický ústav AV ČR, Praha – Stavební fakulta ČVUT, Praha

1. Úvod

Pražský orloj vznikl v době mistra Jana Husa – kolem roku 1410. Jeho mechanicko-matematický model navrhl *Jan Ondřejův*, zvaný *Šindel*, který se zabýval matematikou a astronomií na pražské univerzitě (viz [3, s. 15]). Jeho starší kolega *Křišťan z Prachatic* již kolem roku 1406 zde přednášel o konstrukci astrolábu. Unikátní stroj orloje je umístěn uvnitř staroměstské radniční věže. Vytvořil jej *Mikuláš z Kadaně* (viz [1]). Původně se skládal ze dvou částí: jicího (tj. hlavního hodinového) stroje a bicího stroje. Později byl doplněn ještě o stroj apoštolský (zvonící), který pohybuje figurami u ostění astronomického ciferníku a pohání průvod apoštolů. V průběhu staletí byla konstrukce orloje vícekrát zdokonalována, např. pověstným *Janem z Růže* (*mistrem Hanušem*).

Genialitu tehdejších hodinářů můžeme demonstrovat na konstrukci zařízení pro přesnou regulaci úderů zvonu. Bicí stroj obsahuje velké oběžné kolo o průměru 65 cm s 24 zářezy na vnějším obvodu, jejichž vzdálenosti postupně narůstají (viz obr. 1 a 2). To umožňuje periodické opakování 1–24 úderů zvonu během každého dne.*¹ Součástí bicího stroje je i pomocné kolečko o průměru 13 cm, jehož obvod je rozdělen 6 zářezy na segmenty o délkách oblouku 1, 2, 3, 4, 3, 2 (viz obr. 1 a 2). Tato čísla se periodicky opakují po každé otočce a jejich součet je $s = 15$. Na začátku

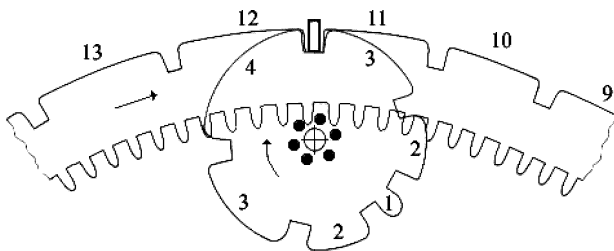
*¹ Počet úderů zvonu odpovídá SEČ, tj. v letním čase orloj odbíjí vždy o hodinu méně.



Obr. 1 Detail bicího stroje pražského orloje z počátku 15. století.

každé hodiny se zvedne západka, obě kola se začnou otáčet a zvon odbíjí příslušný počet hodin. Kola se zastaví, jakmile západka zapadne současně do zářezů na obou kolech. Každý den udeří zvon celkem $1 + 2 + \dots + 24 = 300$ krát, a protože toto číslo je dělitelné $s = 15$, bude pomocné kolečko na počátku každého dne vždy ve stejné poloze.

Velké kolo má 120 vnitřních zubů, které zapadají do cévového kola se 6 vodorovnými tyčkami, jež obklopují střed pomocného kolečka (obr. 1 a 2). Protože se velké kolo otočí jednou denně, pomocné kolečko se otočí za tu dobu 20krát. Obvodová rychlost pomocného kolečka je ale přibližně 4krát větší, protože jeho obvod je 5krát menší než obvod velkého kola. To umožňuje dostatečně přesnou regulaci počtu úderů zvonu zejména při opotřebení zářezů velkého kola. Bez pomocného kolečka by totiž mohl zvon udeřit např. jen 11krát místo 12krát, pokud by segment označený 12 na obr. 2 měl již příliš zaoblené konce. Pro jeden úder zvonu hodinu po půlnoci je dokonce pomocné kolečko nezbytné, neboť na velkém kole schází příslušný segment (obr. 1 a 4).



Obr. 2 Počet úderů zvonu je označen čísly $\dots, 9, 10, 11, 12, 13, \dots$ po vnějším obvodu velkého kola. Za ním je umístěno pomocné kolečko, jehož obvod je zářezy rozdělen na segmenty o délkách oblouku 1, 2, 3, 4, 3, 2. Západka je znázorněna malým obdélníčkem nahoře uprostřed.

Když se pomocné kolečko otáčí, vytváří pomocí délek segmentů mezi jednotlivými zářezy periodickou posloupnost, jejíž částečné součty odpovídají počtu úderů zvonu v každou celou hodinu,

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & \underbrace{3 & 2}_{5} & \underbrace{1 & 2 & 3}_{6} & \underbrace{4 & 3}_{7} \\
 \\
 \underbrace{2 & 1 & 2 & 3}_{8} & \underbrace{4 & 3 & 2}_{9} & \underbrace{1 & 2 & 3 & 4}_{10} & \underbrace{3 & 2 & 1 & 2 & 3}_{11} & \underbrace{4 & 3 & 2 & 1 & 2}_{12} \\
 \\
 \underbrace{3 & 4 & 3 & 2 & 1}_{13} & \underbrace{2 & 3 & 4 & 3 & 2}_{14} & \underbrace{1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2}_{15} \dots
 \end{array} \tag{1}$$

V další kapitole ukážeme, že takto bychom mohli pokračovat až do nekonečna. Všechny periodické posloupnosti ale tuto pozoruhodnou součtovou vlastnost nemají. Například je patrné, že nelze použít periodu 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, protože pro 6 úderů zvonu je $6 < 4 + 3$. Rovněž perioda 1, 2, 3, 2 se k tomuto účelu nehodí, neboť pro 4 údery máme $2 + 1 < 4 < 2 + 1 + 2$.

2. Trojúhelníková čísla a periodické posloupnosti

V této kapitole ukážeme, jak souvisí *trojúhelníková čísla*

$$T_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{2}$$

s bicím strojem pražského orloje. Budeme se též zabývat periodickými posloupnostmi, které mají podobnou vlastnost jako posloupnost 1, 2, 3, 4,

3, 2, ... v (1), tj. které by mohly být použity při konstrukci pomocného kolečka. Množinu přirozených čísel označíme $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Definice 1

Posloupnost $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ se nazývá *periodická*, jestliže existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall i \in \mathbb{N} : a_{i+p} = a_i. \quad (3)$$

Konečná posloupnost $a_1, \dots, a_p$ se nazývá *perioda* a p *délka periody*. Nejmenší p splňující (3) se nazývá *minimální délka periody* a jemu odpovídající posloupnost $a_1, \dots, a_p$ *minimální perioda*.

Definice 2

Nechť $(a_i) \subset \mathbb{N}$ je periodická posloupnost. Řekneme, že trojúhelníkové číslo T_k pro $k \in \mathbb{N}$ je *dosažitelné* pomocí posloupnosti (a_i) , jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$T_k = \sum_{i=1}^n a_i. \quad (4)$$

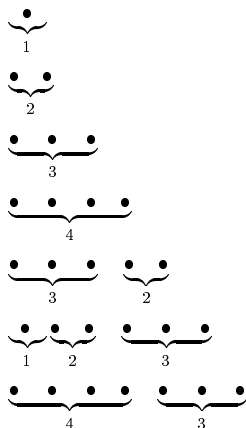
Posloupnost (a_i) se nazývá *šindelovská*, jestliže T_k je dosažitelné pomocí (a_i) pro všechna $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} : T_k = \sum_{i=1}^n a_i. \quad (5)$$

Trojúhelníkové číslo T_k na levé straně je rovno součtu $1 + \dots + k$ hodin na velkém kole, zatímco součet na pravé straně odpovídá celkovému pootočení pomocného kolečka (obr. 3). Přitom pro k -tou hodinu platí

$$k = T_k - T_{k-1} = \sum_{i=m+1}^n a_i, \quad (6)$$

kde $T_{k-1} = \sum_{i=1}^m a_i$. Protože $a_i > 0$, je číslo n ve vztahu (5) závisující na k určeno jednoznačně. Z (2) a (4) je také patrné, že $a_1 = 1$, je-li (a_i) šindelovská posloupnost.



Obr. 3 Schematické znázornění trojúhelníkového čísla T_7 . Černé tečky v k -tém řádku znázorňují počet úderů zvonu v k -té hodině, viz (6). Čísly jsou označeny délky segmentů mezi zářezy na pomocném kolečku.

Následující věta ukazuje, že podmínku (5) lze zaměnit mnohem jednodušší podmínkou, jež obsahuje pouze konečný počet čísel k . To nám umožňuje provést jen konečný počet aritmetických operací, abychom zjistili, zda zvolená perioda $a_1, \dots, a_p$ dává šindelovskou posloupnost ve smyslu definice 2. Součet prvků periody budeme nadále označovat

$$s = \sum_{i=1}^p a_i. \quad (7)$$

Věta 1

Periodická posloupnost (a_i) je pro liché s ve vztahu (7) šindelovská, jestliže T_k je dosažitelné pomocí (a_i) pro $k = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(s-1)$.

Důkaz. Příklad $s = 1$ je triviální. Nechť tedy $s \geq 3$ je liché a necht'

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, \frac{1}{2}(s-1)\} \quad \exists n \in \mathbb{N} : T_k = \sum_{i=1}^n a_i. \quad (8)$$

Podle (7) platí

$$1 + 2 + \dots + (s - 1) = \frac{s - 1}{2} \sum_{i=1}^p a_i, \quad (9)$$

kde p je délka periody a $\frac{1}{2}(s - 1)$ je celé číslo. Pro odpovídající posloupnost

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_p}_s, \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_p}_s, \dots, \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_p}_s, \quad (10)$$

pak vztah (9) vyjadřuje, že se perioda $a_1, a_2, \dots, a_p$ v posloupnosti (10) opakuje $\frac{1}{2}(s - 1)$ krát.

Musíme ověřit rovnost (4) pro všechna $k \geq \frac{1}{2}(s + 1)$ za předpokladu (8). Pro $k = s - 1$, které je sudé, pomocí (2), (9) a (3) dostáváme

$$T_k = T_{s-1} = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^{\frac{pk}{2}} a_i,$$

neboli $n = \frac{1}{2}pk$ ve vztahu (4), a číslo T_{s-1} je tedy dosažitelné.

Předpokládejme nyní, že $k = s - 1 - k'$, kde $1 \leq k' \leq \frac{1}{2}(s - 3)$ a $s > 3$. Podle předpokladu (8) existuje $n' \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\frac{k'(k' + 1)}{2} = \sum_{i=1}^{n'} a_i. \quad (11)$$

Ze vztahu (2) plyne, že

$$T_k = T_{s-1-k'} = \frac{(s - 1 - k')(s - k')}{2} = \frac{s(s - 1 - 2k')}{2} + \frac{k'(k' + 1)}{2}. \quad (12)$$

Protože s je liché a $1 \leq k' \leq \frac{1}{2}(s - 3)$, je $m = s - 1 - 2k'$ sudé přirozené číslo. Tedy podle (12), (7), (11) a (3) platí

$$T_k = \frac{s - 1 - 2k'}{2} \sum_{i=1}^p a_i + \sum_{i=1}^{n'} a_i = \sum_{i=1}^{\frac{pm}{2} + n'} a_i.$$

Dále nechť $k = qs + k'$ pro $q \in \mathbb{N}$ a $0 \leq k' < s$. Potom z (2) a (7) obdržíme

$$T_k = \frac{(qs + k')(qs + k' + 1)}{2} = sj + \frac{k'(k' + 1)}{2} = \sum_{i=1}^{pj} a_i + T_{k'},$$

kde $j = \frac{1}{2}q(qs + 1) + qk'$ je celé číslo a $T_{k'} = 0$ pro $k' = 0$.

Z předchozí části důkazu již ale víme, že $T_{k'} = \sum_{i=1}^{n'} a_i$ pro nějaké $n' \in \mathbb{N}$ a $0 < k' < s$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Číslo $\frac{1}{2}(s-1)$ ve vztahu (8) nelze zredukovat, je-li p délka minimální periody odpovídající s . Abychom se o tom přesvědčili, stačí uvažovat posloupnost (a_i) s minimální periodou 1, 2, 2, 1, 4, 1, 4 a součtem $s = 15$. Pak podle definice 2 jsou trojúhelníková čísla $T_1, \dots, T_6$ dosažitelná pomocí (a_i) , ale T_7 není.

Příklady

Význam věty 1 můžeme demonstrovat na posloupnosti (1) pro $s = 15$. Stačí totiž ověřit vztah (5) pouze pro $k \leq \frac{1}{2}(s-1) = 7$, tedy jen první řádek ve vztahu (1). Dosažitelnost celých čísel $k > 7$ na dalších řádcích (1) pak vyplývá z věty 1.

Podobně můžeme ověřit předpoklady věty 1 i pro další periody:

- 1, 2 pro $p = 2$ a $s = 3$,
- 1, 2, 2 pro $p = 3$ a $s = 5$,
- 1, 2, 3, 1 pro $p = 4$ a $s = 7$,
- 1, 2, 3, 3 pro $p = 4$ a $s = 9$,
- 1, 2, 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4 pro $p = 11$ a $s = 25$.

Existují šindelovské posloupnosti i pro s sudá. Jednu takovou můžeme zkonstruovat např. z periody 1, 2, 1, 1, 1:

$$1\ 2\ \underbrace{1\ 1\ 1}_3\ \underbrace{1\ 2\ 1}_4\ \underbrace{1\ 1\ 1\ 2}_5\ \underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 2}_6\ \dots \quad (13)$$

Činitel $\frac{1}{2}(s-1)$ na pravé straně (9) ale není celočíselný. Proto příslušné prvky posloupnosti vyjadřující číslo $s = 6$ ve (13) nejsou ve stejném pořadí jako daná perioda.

Věta 2

Periodická posloupnost (a_i) je pro sudá s ve vztahu (7) šindelovská, jestliže T_k je dosažitelné pomocí (a_i) pro $k = 1, 2, \dots, s-1$.

Důkaz. Nechť s ve vztahu (7) je sudé a nechť

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, s-1\} \quad \exists n \in \mathbb{N} : T_k = \sum_{i=1}^n a_i. \quad (14)$$

Ze vztahů (7) a (3) vyplývá, že

$$T_{2s-1} = (2s-1) \sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^{(2s-1)p} a_i.$$

Nechť $k = 2s - 1 - k'$, kde $1 \leq k' \leq s - 1$. Podle předpokladu (14) existuje $n' \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\frac{k'(k'+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n'} a_i.$$

Potom z (2) máme

$$T_k = T_{2s-1-k'} = \frac{(2s-1-k')(2s-k')}{2} = s(2s-1-2k') + \frac{k'(k'+1)}{2},$$

a tudíž

$$T_k = (2s-1-2k') \sum_{i=1}^p a_i + \sum_{i=1}^{n'} a_i = \sum_{i=1}^{pm+n'} a_i,$$

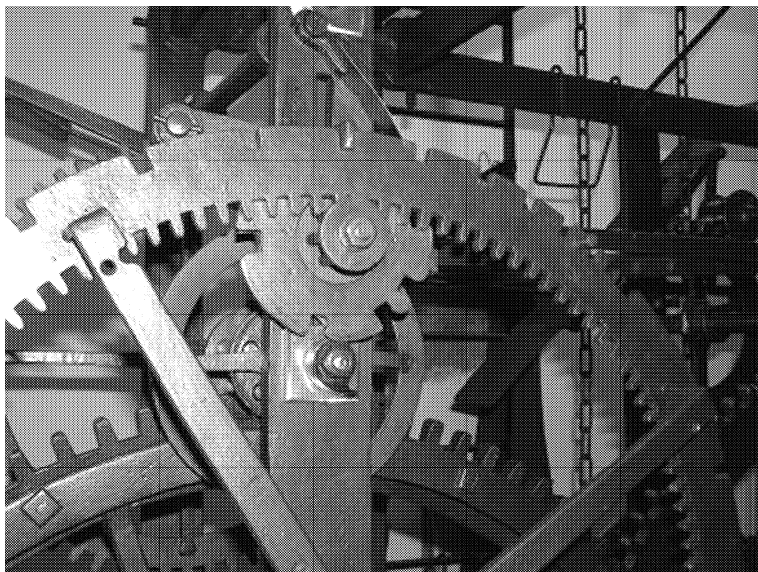
kde $m = 2s - 1 - 2k'$.

Zbytek důkazu pro $k \geq 2s - 1$ se podobá důkazu věty 1.

3. Závěrečné poznámky

Číslo $s - 1$ v (14) opět nelze zredukovat, je-li p délka minimální periody odpovídající s . Abychom toto ověřili, stačí uvažovat periodickou posloupnost (a_i) s minimální periodou 1, 2, 1 a $s = 4$. Pak jsou trojúhelníková čísla T_1 a T_2 dosažitelná pomocí (a_i) , avšak T_3 dosažitelné není.

V článku [2] jsou uvedeny nutné a postačující podmínky pro to, aby posloupnost (a_i) byla šindelovská, a to ve smyslu definice 2. Je zde uveden též algoritmus, pomocí něhož nalezneme všechny šindelovské posloupnosti pro dané s . Např. pro $s = 2^m$, $m \geq 0$, jediná možná šindelovská posloupnost je 1, 1, 1, ...



Obr. 4 Umístění pomocného kolečka v bicím stroji. Západka je v poloze mezi segmenty odpovídajícími 8. a 9. hodině ranní.

Pražský orloj je patrně nejstarší a stále fungující hodinový stroj, který obsahuje takové důmyslné zařízení pro přesnou regulaci počtu úderů zvonu (viz obr. 4 a [1, s. 78]). Závěrem ještě poznamenejme, že Šindel se narodil v Hradci Králové. Proto dalekohled na tamní hvězdárně nese jeho jméno. Také planetka č. 3847 dostala jméno Šindel.

Literatura

- [1] *Horský, Z.*: Pražský orloj. Panorama, Praha 1988.
- [2] *Křížek, M. – Šolcová, A. – Somer, L.*: Triangular numbers and the astronomical clock of Prague, preprint MŮ AV ČR, Praha, <http://mat.fsv.cvut.cz/solcova>.
- [3] *Smolík, J.*: Matematikové v Čechách od založení university Pražské. Publ. nákladem spisovatelovým, Antonín Renn, Praha 1864.

Zaokrouhlování na různé způsoby

OLDŘICH ODVÁRKO – JARMILA ROBOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Ve školské aritmetice se často setkáváme s úlohami, ve kterých se výsledná čísla zaokrouhlují. V takových úlohách se můžeme setkat s požadavkem zaokrouhlení výsledku na jednotky daného řádu. Princip zaokrouhlování přirozených čísel na požadované jednotky (např. na desítky, stovky či tisíce) je naznačen pomocí konkrétního příkladu na obr. 1 [2].

Před číslicemi 0, 1, 2, 3, 4 zaokrouhluje DOLŮ.	
Před číslicemi 5, 6, 7, 8, 9 zaokrouhluje NAHORU.	
Na desítky:	
5 8 6 4 $\approx$ 5 860	5 4 3 7 $\approx$ 5 440
Na stovky:	
5 8 6 4 $\approx$ 5 900	5 4 3 7 $\approx$ 5 400
Na tisíce:	
5 8 6 4 $\approx$ 6 000	5 4 3 7 $\approx$ 5 000

Obr. 1

Zaokrouhlování desetinných čísel na dané jednotky se provádí obdobným způsobem (např. na setiny), jak je uvedeno v konkrétním příkladu na obr. 2 [3].

Zaokrouhluje na setiny:	
6, 2 3 4 8 $\approx$ 6,23	6, 2 3 7 2 $\approx$ 6,24
Když je na místě tisícín číslice 0, 1, 2, 3 nebo 4, zaokrouhluje DOLŮ.	Když je na místě tisícín číslice 5, 6, 7, 8 nebo 9, zaokrouhluje NAHORU.

Obr. 2

Podle [1] zaokrouhlením čísla rozumíme nahrazení daného čísla číslem, které je menší nebo větší než dané číslo a obsahuje celistvý počet jednotek určitého řádu, přičemž se od daného čísla liší co nejméně. Říkáme,

že jsme dané číslo *zaokrouhlili na jednotky určitého řádu*; číslo např. zaokrouhlíme na desetiny, setiny, tisíce atd. Je-li zaokrouhlené číslo menší než dané číslo, zaokrouhlili jsme *dolů*, je-li větší, zaokrouhlili jsme *nahoru*. Abychom při zaokrouhlení udělali co nejmenší chybu, postupujeme podle tohoto pravidla:

Je-li první zanedbaná číslice menší než pět, pak ponechané číslice neměníme (zaokrouhlíme dolů); je-li první zanedbaná číslice větší nebo rovna pěti, pak poslední ponechanou číslici nahradíme číslicí o jednotku větší (zaokrouhlíme nahoru).

Tím dosáhneme toho, že nepřesnost zaokrouhlení není větší než polovina jednotky řádu, na který jsme zaokrouhlovali.

V dalším textu budeme pro naše účely takovéto zaokrouhlování nazývat *aritmetické*, tj. podle pravidel aritmetiky.

V praxi se v různých situacích (nakupování, nedoplatky energií, placení daní) můžeme setkat s dalšími metodami zaokrouhlování, které jsou odlišné od způsobů používaných ve školské matematice. Podívejme se nyní na účty z obchodů (obr. 3 a obr. 4).

DELVITA a.s. Za Panskou zahradou 1018 252 19 Rudna u Prahy DIC:CZ16190955 SUPERMARKET METRO			
JAHODY BAL. 250G		19.90B	
TCHIBO EXCLUSIVE75		26.90C	
PAPRIKA CERVENA			
0.530 kg x 69.90/kg		37.00B	
PFANNER RUZ. GRAP.		37.90B	
SUBTOTAL	4 art	121.70	
TOTAL		121.50	

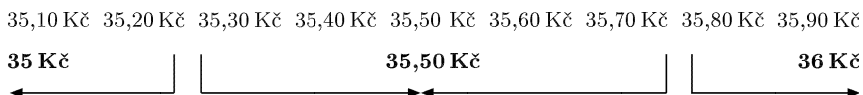
Obr. 3

NORMA, K.S., PLATNERSKA 4, PRAHA 1 ICO:47114789, DIC:CZ47114789,			
033		08.04.06	
		KC	
TATRANKY 50G		5,50 A	
TATRANKY 50G		5,50 A	
COKOLADA NA VA		9,90 B	
BANANKY 250G		29,90 B	
MEZISOUC		51,00	
CELKEM		51,00	

Obr. 4

Sečteme-li ceny všeho zboží na účtence z obr. 3, obdržíme částku 121,70 Kč. Celková cena nákupu na pokladně však činila 121,50 Kč. Součet cen veškerého zboží na účtence z obr. 4 činí 50,80 Kč; celková cena nákupu byla zaokrouhlena na 51 Kč.

Vzhledem k tomu, že ceny jednotlivých druhů zboží jsou v obchodech uvedeny na desetihaléře, avšak nejmenší peněžní jednotkou je padesátihaléř, může vzniknout rozdíl mezi součtem cen zboží a cenou nákupu. Pak je třeba součet cen zboží zaokrouhlit. Zaokrouhlování cen v obchodech (obr. 3, obr. 4) probíhá většinou tak, jak ukazujeme na příkladu na obr. 5.



Obr. 5

Tento způsob zaokrouhlování nazveme pracovní *aritmetické zaokrouhlování na padesátihaléře*.

Použité zaokrouhlení z obr. 5 na první pohled neodpovídá matematickému pravidlu, které učíme žáky ve škole. Pokud si ale uvědomíme, že „jednotkou“, na kterou zde zaokrouhlujeme, je padesátihaléř, pak výsledná cena splňuje základní požadavek, aby nepřesnost zaokrouhlení nebyla větší než polovina jednotky řádu, na který zaokrouhlujeme. Polovina z padesáti haléřů je 25 haléřů, cena nákupu na obr. 3 převýšila padesát haléřů o 20 haléřů, a proto byla správně výsledná cena zaokrouhlena na padesátihaléře dolů. Cena nákupu na obr. 4 přesáhla padesát haléřů o 30 haléřů, a proto byla zaokrouhlena na padesátihaléře nahoru.

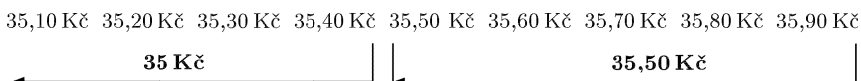
TESCO	
Tesco Stores ČR a.s., Veselá 663 199 06 Praha 9-Letňany IČ: 45308314 spisová značka B 1377 vedená u rejstříkového soudu v Praze OD TESCO NÁRODNÍ, Národní 26, Praha 1	
MASKA V UB.MATA 15G	KČ 56,40A
CELKEM	56,40
ZAOKROUHLZENÍ	-0,40
CELKEM	56,00
MOTOVOST	100,00
V R A C E N O	44,00

Obr. 6

CARREFOUR STODULKY	
Carrefour ČR, s.r.o., ul. Národní 4 tel.: 251 173 111 158 00 Praha - 13 Stodulky IČO: 62584821 DIČ: CZ62584821 Aktuální nabídky akčního zboží najdete: www.carrefour.cz ***** Otevírací doba od 8:00 - 22:00 hod.	
KIT KAT CHUNKY 46G	8,90 B
TWIX 58G	9,90 B
MEZISOUČET	18,80
MEZISOUČET	18,80
Zaokrouhlení	0,30- B
CELKEM	18,50

Obr. 7

Některé velké obchodní řetězce zaokrouhlují poněkud odlišným způsobem, jak je ilustrováno účtenkami na obr. 6 a 7. Uvedený způsob zaokrouhlování přiblíží konkrétní příklad na obr. 8.



Obr. 8

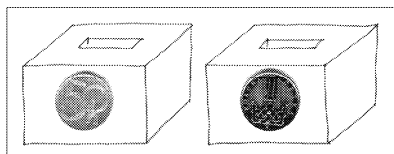
Tento druhý způsob zaokrouhlování, který nazveme *zaokrouhlování na padesátníky* dolů, se používá nejen v obchodech, ale také například při vyúčtování telefonních poplatků u Českého Telecomu (obr. 9).

Bytové stanice pro osobní potřebu					
Platby	Popis	Množství	DPH	Cena služby	Cena celkem
Stálé platby	Používání HTS	1	19%	335,00	
	Nájem stand tel přístroje I	1	19%	5,98	340,98
Platby za spojení	Počet spojení	Provoz	Účtovaná délka		
Místní - síť ČESKÉHO TELECOMU	6	Silný	0.14.00	19%	0,00
	1	Slabý	0.05.00	19%	0,00
Místní - ostatní pevné sítě	1	Silný	0.14.00	19%	0,00
Dálkové - síť ČESKÉHO TELECOMU	3	Silný	0.22.30	19%	0,00
	4	Slabý	0.10.00	19%	0,00
Mezinárodní - pevná síť	1	Slabý	0.01.00	19%	3,80
Xcell - pevná síť	2	Slabý	0.15.33	19%	50,91
					54,71
Daňová rekapitulace :		Sazba DPH	Cena bez DPH	DPH	Cena celkem s DPH
		19%	395,69	75,18	470,87
		Celkem	395,69	75,18	470,87
				Hesleřové vyrovnání	-0,37
Splatno ke dni 06.09.2004				Celkem k platbě včetně DPH	470,50

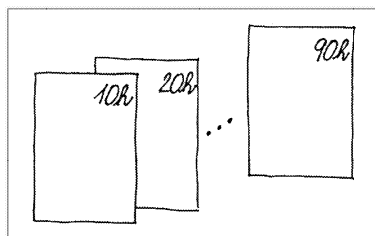
Obr. 9

To, jakým způsobem se zaokrouhlují ceny nákupu v obchodech, mohou žáci sami objevit experimentální formou. Na začátku experimentu připravíme dvě krabice, do kterých žáci během několika týdnů házejí účtenky z různých obchodů, a to podle následujících pravidel:

- do krabice s padesátníkem patří účtenky, na kterých cena nákupu končí padesátihaléřem,
- do krabice s korunovou mincí náleží účtenky, na kterých je cena nákupu v celých korunách (obr. 10).



Obr. 10



Obr. 11

Po ukončení sběru účtenek prohlédneme jednotlivé účtenky a stranou odložíme ty, na kterých se cena nákupu liší od součtu cen zboží o více než 20 haléřů (jde o zaokrouhlování na padesátihaléře dolů); k těmto účtenkám se vrátíme později. Stranou našeho zájmu zůstanou také účtenky, kde je součet cen zboží v celých korunách. Dále připravíme devět čtvrtků a na každou z nich nadepíšeme počet haléřů, na které končí součet všech cen zboží (obr. 11).

Žáci postupně třídí účtenky z obou krabic a lepší je na jednotlivé čtvrtky podle toho, zda *celková cena zboží* končí desetihaléřem, dvacetihaléřem, ... (obr. 3, 4). V některých případech, tak jak je tomu například na obr. 4, musí žáci celkovou cenu zboží před zaokrouhlením vypočítat, neboť účtenka tento údaj neobsahuje. V okamžiku, kdy jsou účtenky přehledně rozříděny, žáci opět rozdělí čtvrtky do dvou skupin podle toho, zda *výsledná cena nákupu* končí padesátihaléřem či celou korunou. A nyní už mohou žáci dospět k pravidlu *aritmetického zaokrouhlování na padesátihaléře*.

Dále můžeme žákům zadat účtenky, které jsme před prvním zpracováním odložili stranou, a nechat je, aby obdobným způsobem přišli na princip zaokrouhlování cen nákupu na padesátníky dolů. Podmínkou úspěšného vyřešení úkolu je samozřejmě shromáždění dostatečného počtu pokladních dokladů, ze kterých bude možné jednoznačně odvodit metodu zaokrouhlování.

Uvedené dva způsoby zaokrouhlování cen nejsou jediné, se kterými se můžeme v praxi setkat.

Pokud prozkoumáme účtenky na obr. 12 a obr. 13, zjistíme, že v případě platby kartou se ceny nezaokrouhlují. Při bezhotovostním styku, kdy se peněžní částka převádí mezi bankovními účty, se totiž tato částka ponechává nezaokrouhlená.



Obr. 12



Obr. 13

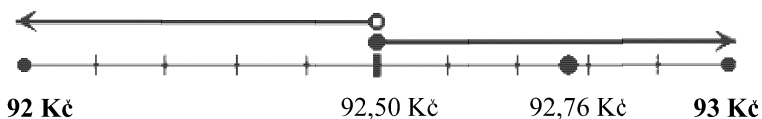
V některých případech, kdy nemáme dostatečný počet podkladů, můžeme na základě účtu vytvářet jen hypotézy o příslušném způsobu zaozkrouhlování. Na obr. 14 je uveden účet za plyn.

Pro přepoččet z m ³ na kWh bylo použito spaliné teplo: 10,5488									
Přepočtená roční spotřeba (v kWh): 464									
Celkový odběr zemního plynu v m ³ : 44		z toho v kWh: 464				z toho v MWh: 0,464			
Zaplacené zálohy zahrnuté do faktury:									
Datum přijetí	Výše platby[Kč]	%DPH	Základ DPH[Kč]	DPH[Kč]	Datum přijetí	Výše platby[Kč]	%DPH	Základ DPH[Kč]	DPH[Kč]
11.02.2005	210,00	19%	176,46	33,54	11.05.2005	210,00	19%	176,46	33,54
11.08.2005	210,00	19%	176,46	33,54	11.11.2005	210,00	19%	176,46	33,54
Odvedené DPH celkem:		134,16							
Cena celkem bez DPH:		783,81							
Základ pro DPH 19%:		783,81							
DPH 19% (koef. 0,1597):		148,95							
Cena celkem včetně DPH:		932,76							
Zahrnuté zálohy celkem:		840,00							
Zaokrouhlení:		0,24							
NEDOPLATEK (Kč):				93,00					

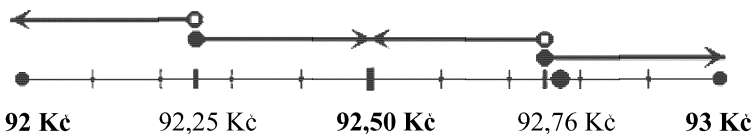
Obr. 14

Rozdíl mezi cenou dodané energie, která je 932,76 Kč, a zaplacenými zálohami 840,00 Kč činí 92,76 Kč, nedoplatek byl stanoven na 93 Kč. Na rozdíl od nákupů v obchodech, kde jsou ceny zboží v desetihaléřích, je zde nejmenší jednotkou 1 haléř. K výsledné částce 93 Kč mohly plynárny dospět, pokud použily například

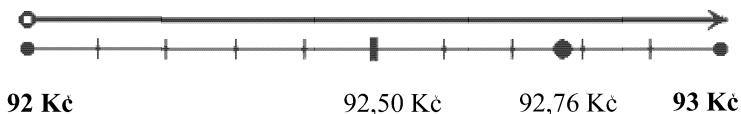
- *aritmetické zaokrouhlování na koruny* (76 haléřů je více než polovina koruny, na kterou zaokrouhlujeme),



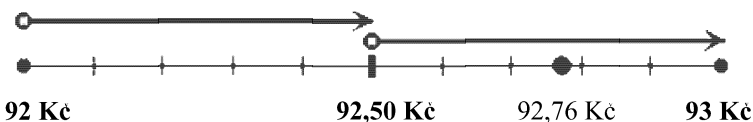
- *aritmetické zaokrouhlování na padesátihaléře* (76 haléřů přesáhlo jednotku – padesátihaléř – o více než polovinu této jednotky),



- *zaokrouhlování na koruny nahoru,*



- *zaokrouhlování na padesátihaléře nahoru.*



Uvedené úvahy jsou však jen hypotézami, neboť z jednoho účtu nepoznáme, o který způsob zaokrouhlování jde. Posledním dvěma metodám, tj. zaokrouhlování na koruny nahoru a na padesátihaléře nahoru, se budeme podrobněji věnovat někdy příště.

Literatura

- [1] *Kolektiv autorů*: Slovník školské matematiky. SPN, Praha 1981.
- [2] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 6. ročník základních škol. 1. díl. Prometheus, Praha 1997.
- [3] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 6. ročník základních škol. 2. díl. Prometheus, Praha 1997.

Zajímavé matematické úlohy

Uvádíme zadání další dvojice úloh naší pravidelné rubriky. Jejich řešení zašlete nejpozději do 10. 1. 2007 na adresu: Redakce časopisu MFI, tř. Svobody 26, 771 46 Olomouc. Jejich řešení lze zaslat také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 133

Dokažte, že v desetinném rozvoji čísla $a = 0,0999^{999}$ je za desetinnou čárkou (před první platnou číslicí) právě 999 nul.

Stanislav Trávníček

Úloha 134

Nechť bod R leží na straně BC čtverce $ABCD$. Uvažujme dále čtverec $BPQR$, jehož vrchol P je bod polopřímky opačné k polopřímce BA . Nechť X je průsečík přímk AR a BD a Y průsečík přímk BQ a PC .

- a) Dokažte, že přímky AR a PC jsou navzájem kolmé.
- b) Dokažte, že přímky XY a AB jsou rovnoběžné.

Gottfried Perz (Graz)